

# 《数值计算方法训练》

## 实习报告



院 系: 数理学院数学系

专业年级: 信息与计算科学专业 2020 级

姓 名: 张三

学 号: 2019\*\*\*1

2023 年 1 月 2 日

## 一、拴牛鼻的绳子

农夫有一个长满草的半径为 10 米的圆形牛栏，他要将一头牛栓在栏桩上，但只让牛吃到一半草，问栓牛鼻的绳子应为多长？

### 1. 题目分析与思路

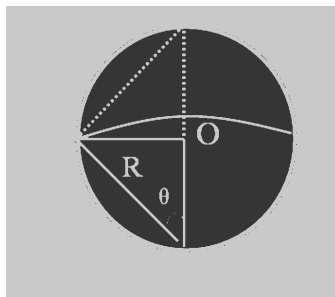


图 1: 圆形牛栏示例

如图 1 所示，设  $A$  为栓桩，绳  $AB$  长为  $R$ 。半径  $OA = OB = r = 10$ ， $\angle OAB = \theta$ ，那么  $R = 2r \cos \theta$ 。

由只让牛吃到一半的草，可得：

$$\text{扇形} BAC \text{ 面积} + 2 \times \text{冠形} ADB \text{ 面积} = \frac{1}{2} \pi r^2 \quad (1)$$

即

$$S_{\widehat{BAC}} + 2 \times (S_{\widehat{BOA}} - S_{\triangle BOA}) = \frac{1}{2} \pi r^2 \frac{2\theta}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\theta}{2\pi} \pi R^2 + 2 \left( \frac{\pi - 2\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} Rr \sin \theta \right) &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ \Rightarrow \theta R^2 + 2 \left( \frac{\pi - 2\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} Rr \sin \theta \right) &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ \Rightarrow 4\theta \cos^2 \theta + \pi - 2\theta - 2 \cos \theta \sin \theta &= \frac{1}{2} \pi \end{aligned}$$

从而得到关系式

$$2\theta \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} - \cos \theta \sin \theta - \frac{\pi}{4} - \theta = 0 \quad (2)$$

或

$$\theta = 2\theta \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} - \cos \theta \sin \theta - \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

于是问题求解转化为一个关于  $\theta$  的非线性方程。

求解这个方程的根  $\theta$  的值，进而由关系式  $R = 2r \cos \theta$  得到绳长。

## 2. 数值计算方法

这里，采用不动点迭代法求解方程的根。（注，也可以采用其他求根方法）

设方程  $f(\theta) = 2\theta \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} - \cos \theta \sin \theta - \frac{\pi}{4} - \theta = 0$  的不动点迭代格式为

$$\theta_{k+1} = \phi(\theta_k) = 2\theta_k \cos^2 \theta_k + \frac{\pi}{2} - \cos \theta_k \sin \theta_k - \frac{\pi}{4} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

采用 Python 编写程序，取  $\theta_0 = 0$ ，当迭代满足  $|\theta_{k+1} - \theta_k| < 0.00001$  时， $\theta_{k+1}$  为根的数值解，带入  $R = 2r \cos \theta$ ，得到  $R$  的值。

## 3. Python 代码

```
1 import math
2
3 def caculate(x):
4     return 2 * x * math.cos(x)**2 + math.pi/2 - math.sin(x) * math.cos(x) - math.pi/4
5
6 def main():
7     r = 10
8     x = 0
9     x0 = caculate(x)
10
11     while abs(x0 - x) >= 0.00001:
12         x = x0;
13         x0 = caculate(x)
14     R = 2 * 10 * math.cos(x0)
15
16     print("x0 = ", x0)
17     print("R = ", R)
18
19 if __name__ == "__main__":
20     main()
```

## 4. 结果分析

方程 (1.2) 的根为  $\theta = 0.9529$ ，绳长为  $R = 11.5872$ 。所以农夫在长满草的半径 10 米的圆形牛栏，将一头牛栓在栏桩上，但只让牛吃到一半草，栓牛鼻的绳长应为 11.5872 米。

## 二、 机床加工零件的外形

下表给出的  $x, y$  数据位于机翼断面的下轮廓线上，假设需要得到  $x$  坐标每改变 0.1 时  $y$  的坐标，试分段线性插值计算所需的数据，画出曲线，并分析结果。

x	0	3	5	7	9	11	19	13	14	15
y	0	1.2	1.7	2.0	2.1	2.0	1.8	1.2	1.0	1.6

## 1. 数值计算方法

分段线性插值公式：

$$S_i(x) = y_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + y_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (5)$$

事实上，分段线性插值函数是在两个节点构成的区间上实行  $n-1$  的拉格朗日插值得到的线性函数。用拉格朗日插值和分段线性插值计算所需的数据，并利用 Python 编写程序，分别得到坐标  $x$  每改变 0.1 时的对应  $y$  坐标，画出曲线，进行分析。

## 2. Python 代码

```

1 import numpy as np
2
3 def incmatrix(genl1,genl2):
4     m = len(genl1)
5     n = len(genl2)
6     M = None #to become the incidence matrix
7     VT = np.zeros((n*m,1), int) #dummy variable
8
9     #compute the bitwise xor matrix
10    M1 = bitxormatrix(genl1)
11    M2 = np.triu(bitxormatrix(genl2),1)
12
13    for i in range(m-1):
14        for j in range(i+1, m):
15            [r,c] = np.where(M2 == M1[i,j])
16            for k in range(len(r)):
17                VT[(i)*n + r[k]] = 1;
18                VT[(i)*n + c[k]] = 1;
19                VT[(j)*n + r[k]] = 1;
20                VT[(j)*n + c[k]] = 1;
21
22    if M is None:
23        M = np.copy(VT)
24    else:
25        M = np.concatenate((M, VT), 1)
26
27    VT = np.zeros((n*m,1), int)

```

28

29

`return M`

### 3. 结果分析

采用分段线性插值计算所得结果如图 2 所示，其中图像经过一定的后处理。从图中可以看出分段线性插值结果与原始数据吻合较好。

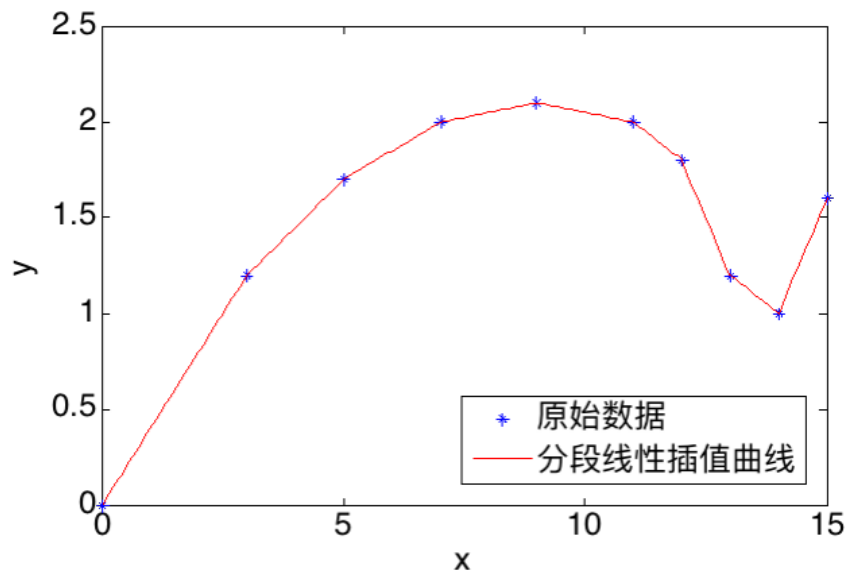


图 2: 分段线性插值结果与原始数据的比较

### 三、 必读材料读后感

Todo: 请于课程最后一次提交报告之前在此处填写不少于 500 字的读后感

### 四、 课程建议

Todo: 请给出课程建议