

《数值计算方法训练》

实习报告



院 系: 数理学院数学系

专业年级: 信息与计算科学专业 2020 级

姓 名: 张三

学 号: 2019***1

2023 年 1 月 2 日

一、拴牛鼻的绳子

农夫有一个长满草的半径为 10 米的圆形牛栏，他要将一头牛栓在栏桩上，但只让牛吃到一半草，问栓牛鼻的绳子应为多长？

1. 题目分析与思路

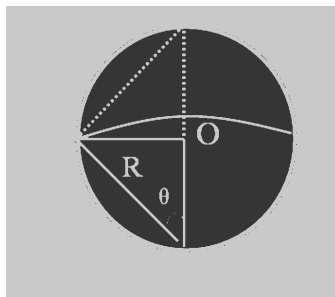


图 1: 圆形牛栏示例

如图 1 所示，设 A 为栓桩，绳 AB 长为 R 。半径 $OA = OB = r = 10$ ， $\angle OAB = \theta$ ，那么 $R = 2r \cos \theta$ 。

由只让牛吃到一半的草，可得：

$$\text{扇形} BAC \text{ 面积} + 2 \times \text{冠形} ADB \text{ 面积} = \frac{1}{2} \pi r^2 \quad (1)$$

即

$$\begin{aligned} S_{\widehat{BAC}} + 2 \times (S_{\widehat{BOA}} - S_{\triangle BOA}) &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ \frac{2\theta}{2\pi} \pi R^2 + 2 \left(\frac{\pi - 2\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} Rr \sin \theta \right) &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ \Rightarrow \theta R^2 + 2 \left(\frac{\pi - 2\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} Rr \sin \theta \right) &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ \Rightarrow 4\theta \cos^2 \theta + \pi - 2\theta - 2 \cos \theta \sin \theta &= \frac{1}{2} \pi \end{aligned}$$

从而得到关系式

$$2\theta \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} - \cos \theta \sin \theta - \frac{\pi}{4} - \theta = 0 \quad (2)$$

或

$$\theta = 2\theta \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} - \cos \theta \sin \theta - \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

于是问题求解转化为一个关于 θ 的非线性方程。

求解这个方程的根 θ 的值，进而由关系式 $R = 2r \cos \theta$ 得到绳长。

2. 数值计算方法

这里，采用不动点迭代法求解方程的根。（注，也可以采用其他求根方法）

设方程 $f(\theta) = 2\theta \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2} - \cos \theta \sin \theta - \frac{\pi}{4} - \theta = 0$ 的不动点迭代格式为

$$\theta_{k+1} = \phi(\theta_k) = 2\theta_k \cos^2 \theta_k + \frac{\pi}{2} - \cos \theta_k \sin \theta_k - \frac{\pi}{4} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

采用 Python 编写程序，取 $\theta_0 = 0$ ，当迭代满足 $|\theta_{k+1} - \theta_k| < 0.00001$ 时， θ_{k+1} 为根的数值解，带入 $R = 2r \cos \theta$ ，得到 R 的值。

3. Python 代码

```
1  '''
2  lab01: 拴牛鼻的绳子
3  '''
4  import math
5
6  def caculate(x):
7      return 2 * x * math.cos(x)**2 + math.pi/2 - math.sin(x) * math.cos(x) - math.pi/4
8
9  def main():
10     r = 10
11     x = 0
12     x0 = caculate(x)
13
14     while abs(x0 - x) >= 0.00001:
15         x = x0;
16         x0 = caculate(x)
17     R = 2 * 10 * math.cos(x0)
18
19     print("x0 = ", x0)
20     print("R = ", R)
21
22 if __name__ == "__main__":
23     main()
```

4. 结果分析

方程(2)的根为 $\theta = 0.9529$ ，绳长为 $R = 11.5872$ 。所以农夫在长满草的半径 10 米的圆形牛栏，将一头牛拴在栏桩上，但只让牛吃到一半草，拴牛鼻的绳长应为 11.5872 米。

二、 机床加工零件的外形

下表给出的 x, y 数据位于机翼断面的下轮廓线上，假设需要得到 x 坐标每改变 0.1 时 y 的坐标，试分段线性插值计算所需的数据，画出曲线，并分析结果。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 19 | 13 | 14 | 15 |
| y | 0 | 1.2 | 1.7 | 2.0 | 2.1 | 2.0 | 1.8 | 1.2 | 1.0 | 1.6 |

1. 数值计算方法

分段线性插值公式：

$$S_i(x) = y_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + y_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (5)$$

事实上，分段线性插值函数是在两个节点构成的区间上实行 $n-1$ 的拉格朗日插值得到的线性函数。用拉格朗日插值和分段线性插值计算所需的数据，并利用 Python 编写程序，分别得到坐标 x 每改变 0.1 时的对应 y 坐标，画出曲线，进行分析。

2. Python 代码

```
1 '''
2 lab02: 机床加工零件的外形
3 '''
4 def main():
5     # TODO: 分段线性插值的代码
6     pass
7
8 if __name__ == '__main__':
9     main()
```

3. 结果分析

采用分段线性插值计算所得结果如图 2 所示，其中图像经过一定的后处理。从图中可以看出分段线性插值结果与原始数据吻合较好。

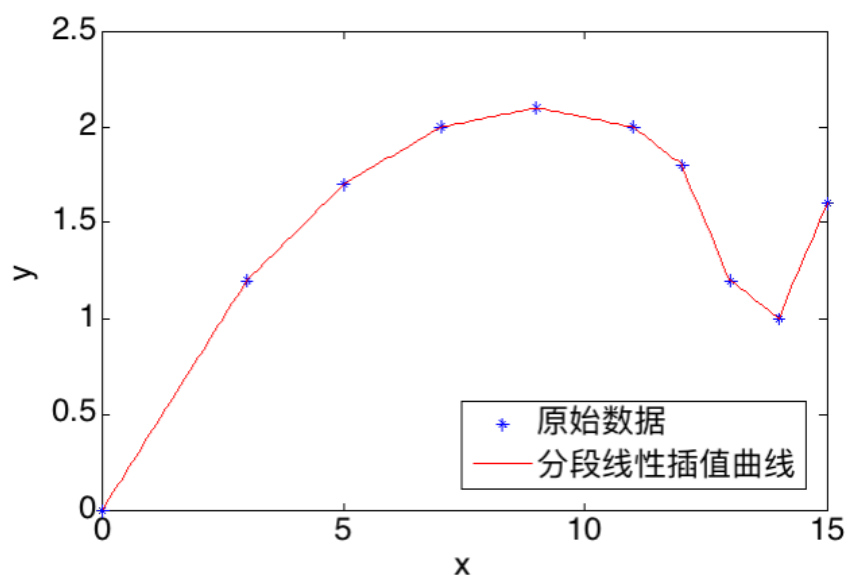


图 2: 分段线性插值结果与原始数据的比较

三、 必读材料读后感

Todo: 请于课程最后一次提交报告之前在此处填写不少于 500 字的读后感

四、 课程建议

Todo: 请给出课程建议