

作業三說明文件

1. 使用 2D Gaussian quadrature 計算

$$\int_0^2 \int_0^2 f(x, y) = \int_0^2 \int_0^2 (\sin(2\pi x) * \cos(3\pi y) + 1)$$

Gaussian quadrature formula

$$\left(\sum_{i=0}^n A_i \sum_{j=0}^m (B_j * f(a_i, b_j)) \right) * |J|$$

$n = N - 1$ ， N 為 X 方向上的 sample point 個數(取樣個數)

$m = M - 1$ ， M 為 Y 方向上的 sample point 個數(取樣個數)

$$A_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx, \quad l_i(x) = \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x - x_k)}{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x_i - x_k)}$$

$$B_j = \int_{-1}^1 l_j(y) dy, \quad l_j(y) = \frac{\prod_{k=0, k \neq j}^m (y - y_k)}{\prod_{k=0, k \neq j}^m (y_j - y_k)}$$

$|J|$ 為取樣面積與原始面積的比值，代表放大縮小的倍率

N or M	x_i or y_j	A_i or B_j
1	0	2
2	± 0.57735	1
3	0	0.888889
	± 0.774597	0.555556
4	± 0.339981	0.652145
	± 0.861136	0.347855

2. 運用以下條件的組合進行運算生成 9 個結果

甲、分段逼近的方式(Divide into cell)

Cell 個數	1	4	16
$ J $	1	0.25	0.0625

乙、增加取樣點

N or M	2	3	4
--------	---	---	---

丙、產生 9 個結果(60%)

	1	4	16
2	$Answer_0$	$Answer_1$	$Answer_2$
3	$Answer_3$	$Answer_4$	$Answer_5$
4	$Answer_6$	$Answer_7$	$Answer_8$

3. 利用其他數學工具(MatLab、[Gnu Octave](#) 等軟體)計算 $\int_0^2 \int_0^2 (\sin(2\pi x) + \cos(3\pi y) + 1)$ ，並將其結果當作基準以做以下的討論。(10%)

4. 觀察當取樣點固定時，隨著 cell 個數的遞增，準確度(與 3 比較)是否跟著增加?(10%)
5. 觀察當 cell 個數固定時，隨著取樣點的遞增，準確度(與 3 比較)是否跟著增加?(10%)
6. 比較以上(4、5)結果，觀察哪個因素影響較大?(10%)
7. 將以上用程式計算所得的結果與 3 的結果之間的相對誤差(relative error)視覺化(10%)。例如直方圖。
8. 舉例-計算 $Answer_1$

Cell 個數為 4， $N=M=2$ ，因為切成 4 個 cell，所以

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \int_0^2 (\sin(2\pi x) * \cos(3\pi y) + 1) \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (\sin(2\pi x) * \cos(3\pi y) + 1) \\
 &+ \int_1^2 \int_0^1 (\sin(2\pi x) * \cos(3\pi y) + 1) \\
 &+ \int_0^1 \int_1^2 (\sin(2\pi x) * \cos(3\pi y) + 1) \\
 &+ \int_1^2 \int_1^2 (\sin(2\pi x) * \cos(3\pi y) + 1) \\
 & \int_0^1 \int_0^1 (\sin(2\pi x) + \cos(3\pi y)) = \left(\sum_{i=0}^n A_i \sum_{j=0}^m (B_j * f(a_i, b_j)) \right) * |||
 \end{aligned}$$

Cell 個數 = 4 $\rightarrow ||| = 0.25$ (參考 2. 甲表格)

$N = M = 2 \rightarrow x_0 = y_0 = -0.557735$ ， $x_1 = y_1 = 0.557735$ (參考 1. 表格)，

$A_0 = A_1 = B_0 = B_1 = 1$ (參考 1. 表格)

$x, y \in [0, 1]$ ，非 $[-1, 1] \rightarrow$ comformation mapping(參考講義第 13 頁) \rightarrow

$$a_0 = b_0 = \left(\frac{1-0}{2} * -0.557735 + \frac{1+0}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} * -0.557735 + \frac{1}{2} \right)$$

$$a_1 = b_1 = \left(\frac{1}{2} * 0.557735 + \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=0}^n A_i \sum_{j=0}^m (B_j * f(a_i, b_j)) \right) * ||| \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} A_i \sum_{j=0}^{M-1} (B_j * f(a_i, b_j)) \right) * 0.25 \\
 &= 0.25 \sum_{i=0}^1 A_i \sum_{j=0}^1 (B_j * f(a_i, b_j))
 \end{aligned}$$

以上只是用來幫助同學理解，所以就不實際計算出結果了，若還是不夠清楚，可以再做補充。

9. 繳交格式 - 將程式與報告打包成壓縮檔後上傳到 tronclass，並在 demo 時

將印好的報告交給助教

10. 如果對題目有不了解或寫作業時有遇到困難，都可以到實驗室詢問助教。
11. 一維 Gaussian Quadrature 程式可參考
 \SampleCodes\GaussQuadrature\gauss_qudarature.cpp
12. 繳交期限 – 12/13 (一)
13. Demo 期限 – 12/20(一)