

物流系统建模与仿真

第十二节 一阶系统的理论

一阶系统的数学原理

作为仿真系统的基础结构，探究一阶系统数学原理是深刻理解系统运行机制的必要环节。

一阶系统特征：一个状态变量

$$\dot{x} = -\lambda x + u(t)$$

x 是系统状态变量

u 是控制变量，基础结构中设置为常数

t 是时间

一阶系统数学描述的含义：在时域中，系统状态的变化由其自身状态的函数决定

一阶系统的数学原理

- › 利用泰勒级数展开

$$\therefore \quad \quad \quad {}_2x^2 + a_3x^3 \cdots \quad \quad \quad \cdots$$

- › 任意函数可以分解成状态变量的多项式形式，
- › 保留项数越多，系统结构越复杂，同时误差越小

$$\therefore \quad \quad \quad {}_2x^2 + a_3x^3 \cdots$$

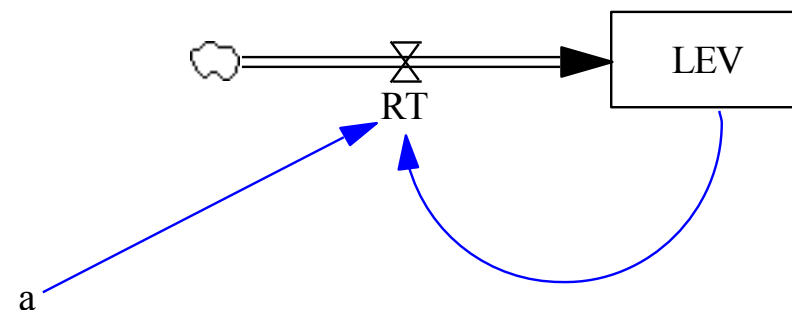
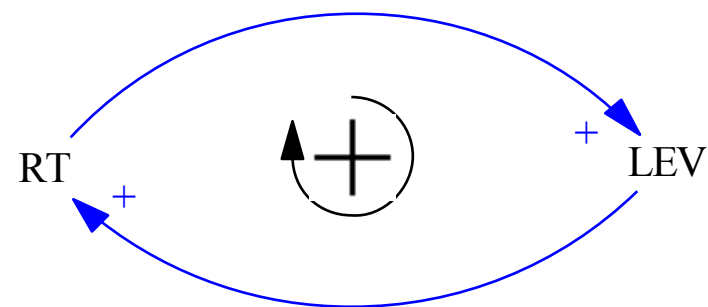
- › 当 $n=1$ 时，变为一阶常微分方程

$$\therefore$$

正反馈基本结构

右侧给出了正反馈基本结构的因果分析图和系统流图。如图所示：

- 两个相互加强的变量组成
- 分别对应了流图中的存量和流量
- 回持续强化系统中的变化



正反馈原理

方便起见，令存量用符号L代替，流量用R代替

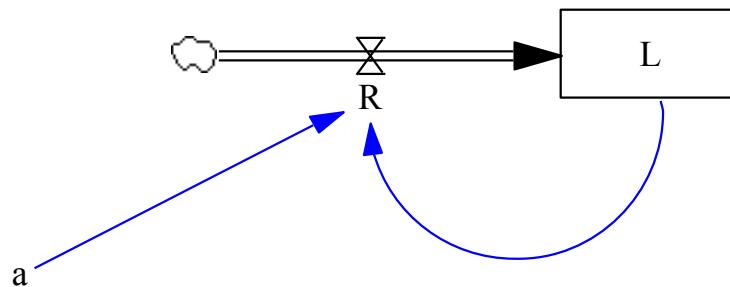
存量变化率为 $R = \frac{dL}{dt}$

系统运行的方程为 $\frac{dL}{dt} = 0.2 * L$

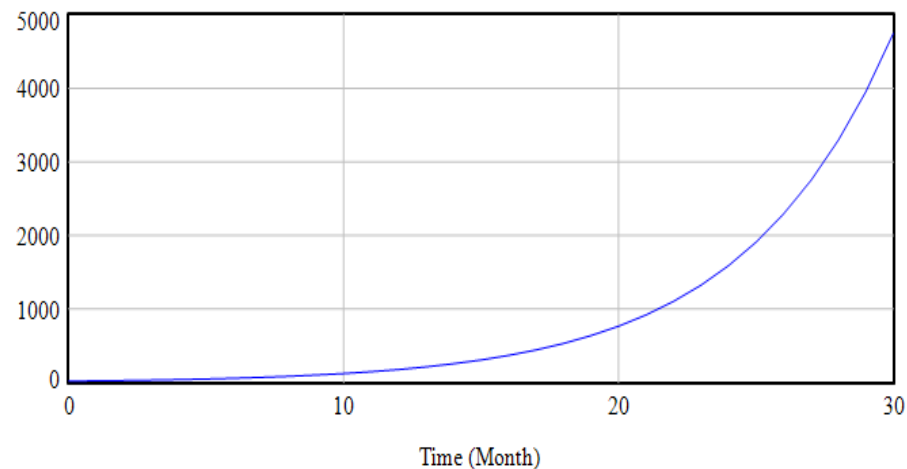
时间变量TIME简化为变量t

一般化的方程也常写为 $\dot{L} = \dots$

即一阶常微分方程



系统方程设置
 $LEV = \text{INTEG}(RT, 20)$
 $RT = 0.2 * S$



正反馈的行为模式

求解方程

$$\frac{dL}{dt} = 0.2 * L$$

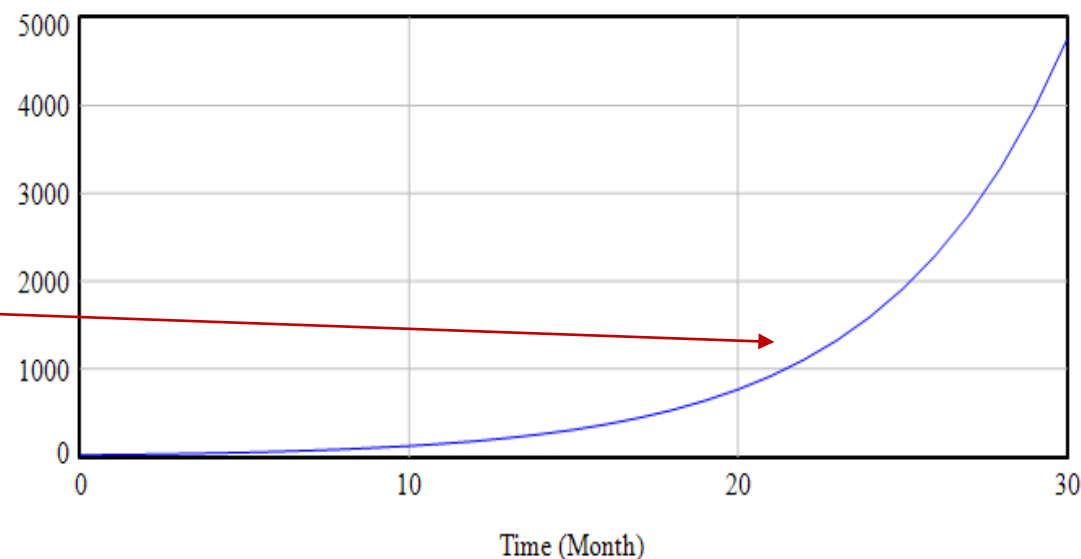
得到L的解析式

$$L = 100e^{0.2t}$$

即 正反馈的基本行为模式是指数变化趋势，时间常数对应了存量指数函数的时间系数

而初始值设置则是微分方程初值，即t=0时

$$L_0 = 100$$



$$L = 100e^{0.2t}$$

一阶正反馈重要参数

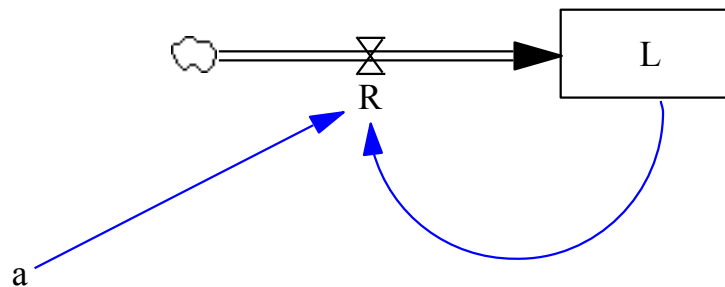
一阶正反馈数学描述式

$$L = L_0 e^{at}$$

时间常数

$$T = \frac{1}{a}$$

T	$\exp(1)*L(0)$
2T	$\exp(2)*L(0)$
3T	$\exp(3)*L(0)$
4T	$\exp(4)*L(0)$



令 $t=T$ ，代入系统状态式中

$$L(T) = L(0)e^{(1/T)*T} = L(0)e \approx 2.73L(0)$$

即每过一个 T 的时间长度，系统增长初始值的约2.73倍
时间常数越大，系统状态增长越缓
时间常数越小，系统状态增长越陡

一阶正反馈重要参数

› 倍增时间 T_d

倍增时间定义为变量由初始值增长到第一个翻倍所需时间

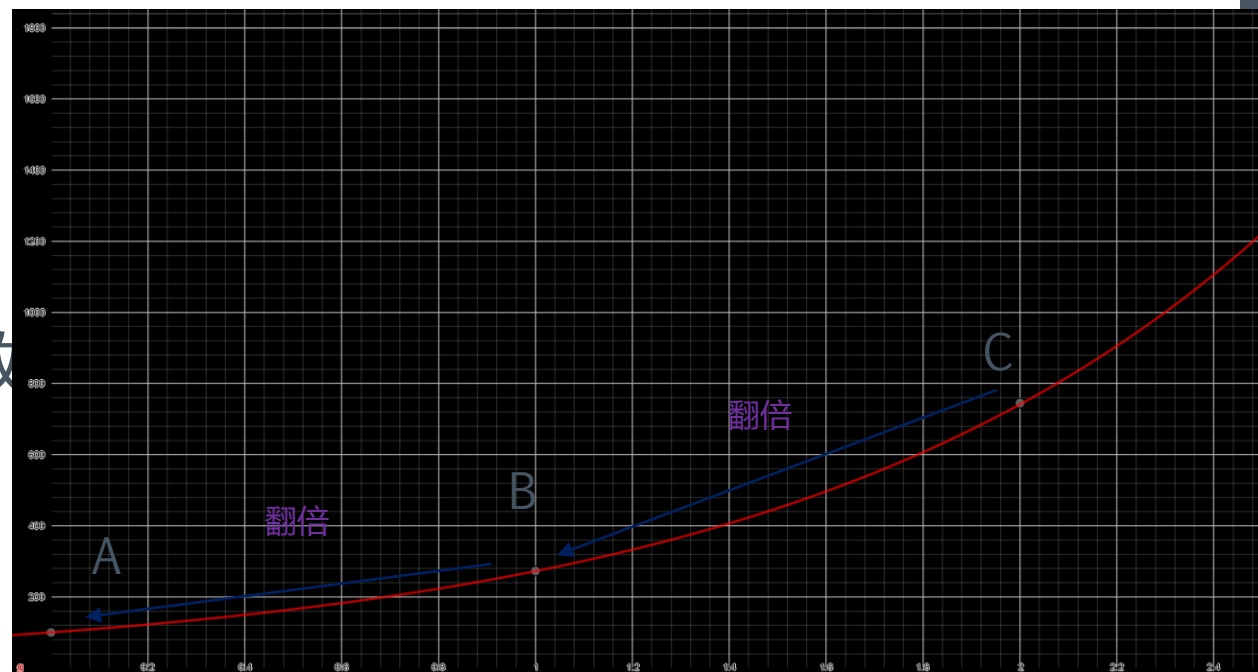
T_d 与时间常数 T 的关系

$$T_d = 0.69T$$

$$2L(0) = L(0)e^{aT_d}$$

$$T_d = \frac{\ln 2}{a} \approx 0.69T$$

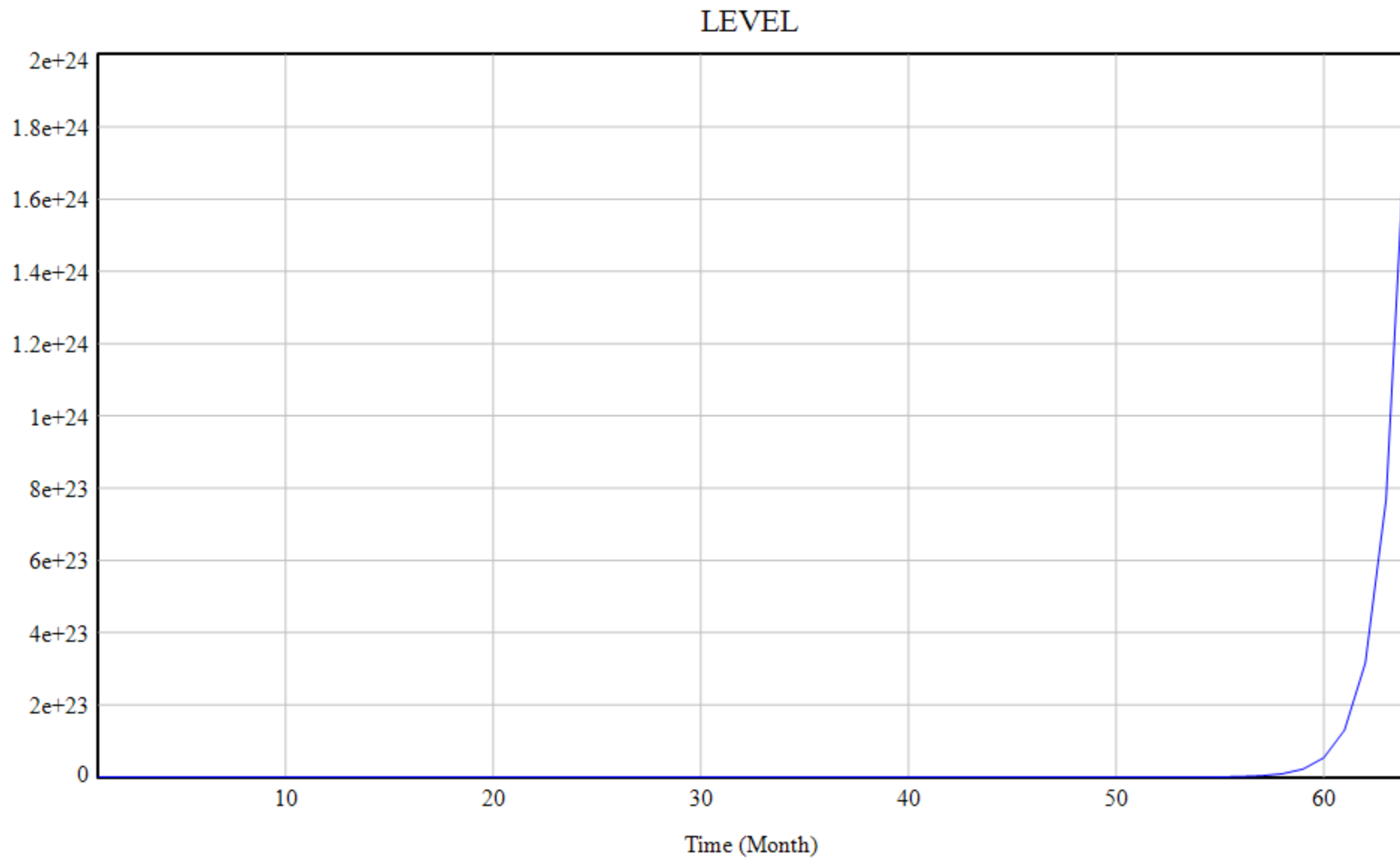
即倍增时间约等于70%时间常数



估算参数

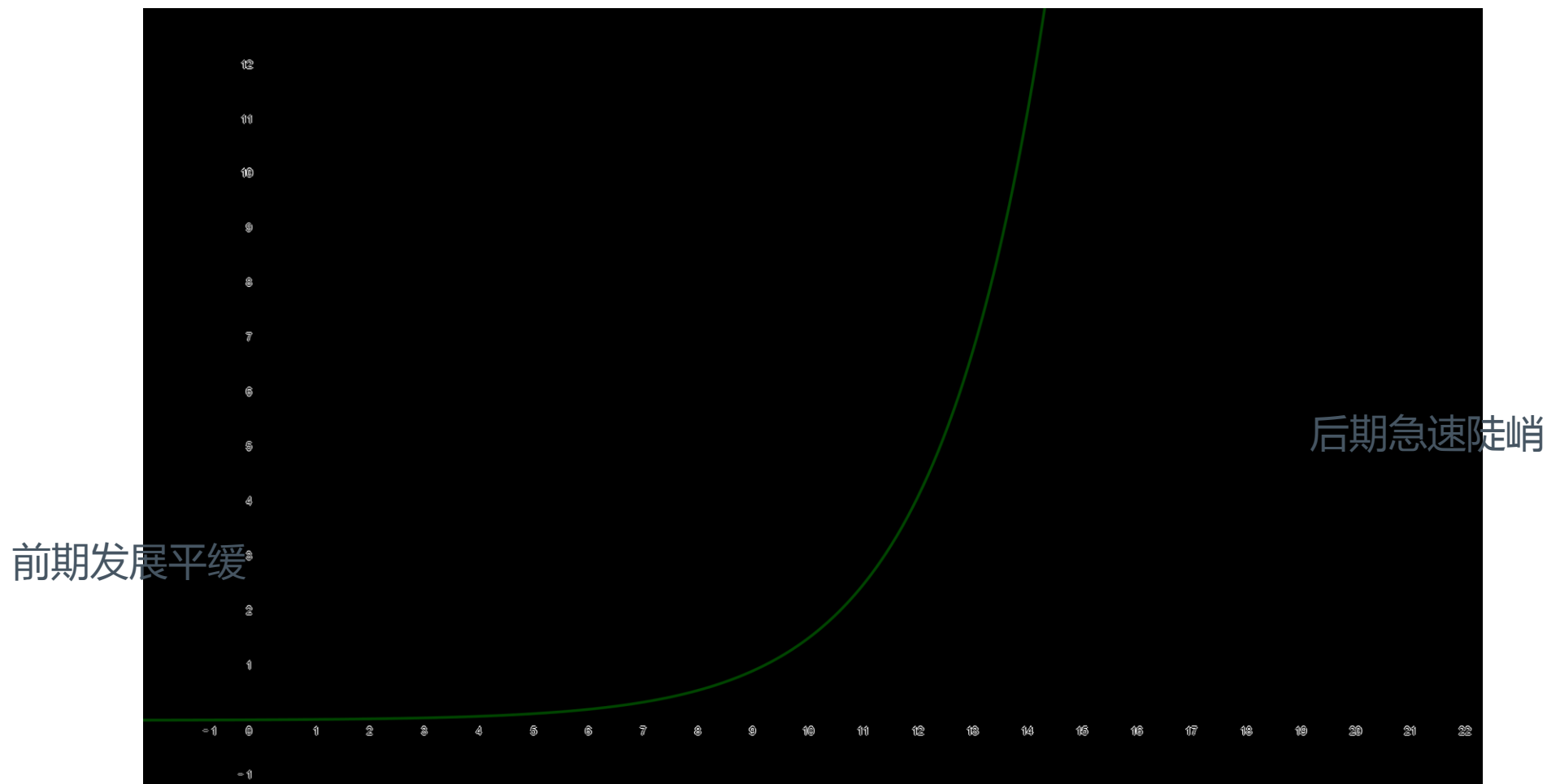
已知国际棋盘共64个格子，在棋盘第一个格子上放1粒粮食，第二个格子上放2粒，第三个上放6粒，如此类推下去，每一个格子上放的粮食数目是已经放下的数目两倍，请用仿真工具计算粮食数目累计多少，如何增长。

π



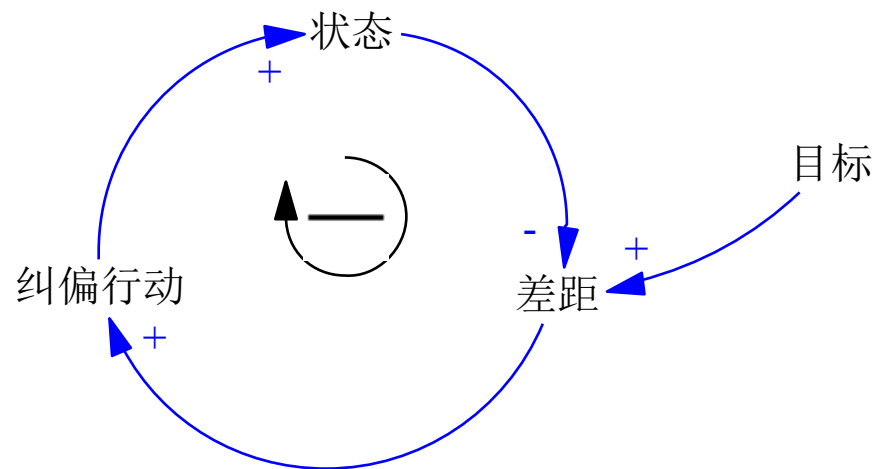
π

正反馈指数发展趋势特点



负反馈特点

- › 负反馈系统原理如右侧因果分析图所示
- › 负反馈具有“寻的”趋势
- › 对系统变化具有补偿特性，即
 - 偏离平衡位置越多，补偿越多
 - 偏离平衡位置越近，补偿越少



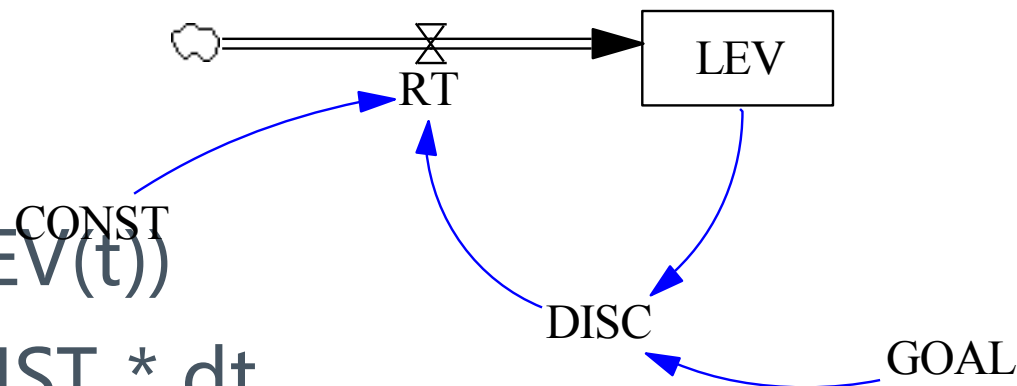
负反馈的数学原理

$$dLEV(t)/dt = CONST(GOAL-LEV(t))$$

$$Dlev(t)/(GOAL-LEV(T)) = CONST * dt$$

解得

$$LEV(t) = GOAL - [GOAL - LEV(0)] \exp(-CONST * t)$$



负反馈的时间常数

- › 从负反馈的数学表达式中可以得到
 - 负反馈的发展模式也是指数特征
 - 时间系数是固定常数
- › 推算时间常数： $T=1/\text{CONST}$

$$\begin{aligned}\text{LEV}(T) &= \text{GOAL} - [\text{GOAL} - \text{LEV}(0)] \exp(-(1/T)*T) \\ &= \text{GOAL} - [\text{GOAL} - \text{LEV}(0)] \exp(-1) \\ &\approx \text{LEV}(0) + 0.632[\text{GOAL} - \text{LEV}(0)]\end{aligned}$$

时间常数含义：每隔T时间，系统增长初值与目标值差距的0.632倍

减半时间常数 T_h

注意：减半时间在某些领域也被称为半衰期

› 简化问题，若目标值设置为0

› 系统状态的解析式变为

$$LEV(t) = LEV(0) \exp(-CONST * t)$$

由 T 导出，令状态为初始状态一半

$$\frac{1}{2} LEV(0) = LEV(0) \exp(-(1/T) * T_h)$$

得到

$$T_h = T * \ln 2 \approx 0.69T$$

即减半时间约等于0.69倍时间常数 T

正反馈特征

- › 基本特征：
 - 指数增长
 - 倍增时间固定
 - 初期接近线性，末期急速增长
- › 常见问题
 - 发展问题
 - 滚雪球效应
 - 良心循环问题
- › 非指数型
 - 倍增时间不固定
 - 时间越长越偏离指数趋势

负反馈特征

负反馈的三种模式

1. 模式1：当状态为正数，差距为正时
2. 模式2：当状态为正数，差距为负时
3. 模式3：当状态为正数，差距为零时

