物流系统建模与仿真

第十二节 一阶系统的理论

一阶系统的数学原理

作为仿真系统的基础结构，探究一阶系统数学原理是深刻理解系统运行机制的必要环节。

一阶系统特征：一个状态变量

[illegible] $t)$

x是系统状态变量

u是控制变量，基础结构中设置为常数

t是时间

一阶系统数学描述的含义：在时域中，系统状态的变化由其自身状态的函数决定

一阶系统的数学原理

› 利用泰勒级数展开

$$ {}_2x^2 + a_3x^3 \cdots \qquad \cdots $$

› 任意函数可以分解成状态变量的多项式形式，

› 保留项数越多，系统结构越复杂，同时误差越小

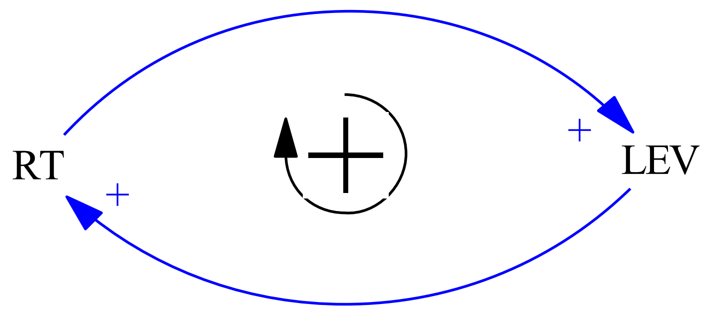
$$ {}_2x^2 + a_3x^3 \cdots $$

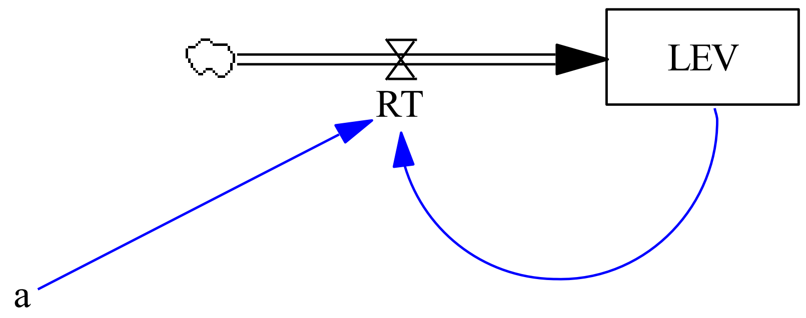
› 当n=1时，变为一阶常微分方程

正反馈基本结构

右侧给出了正反馈基本结构的因果分析图和系统流图。如图所示：

- 两个相互加强的变量组成
- 分别对应了流图中的存量和流量
- 回持续强化系统中的变化

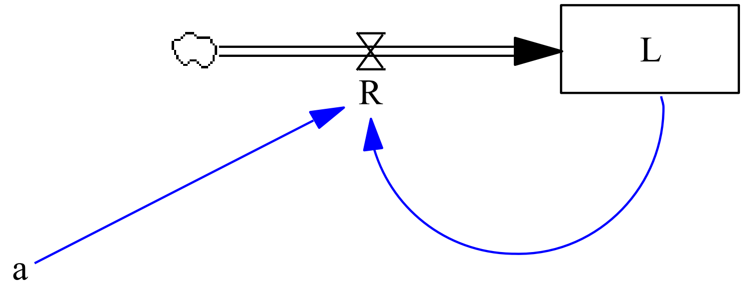




正反馈原理

方便起见，令存量用符号L代替，流量用R代替

存量变化率为 $R=\frac{dL}{dt}$



系统运行的方程为 $\frac{dL}{dt}=0.2*L$

系统方程设置

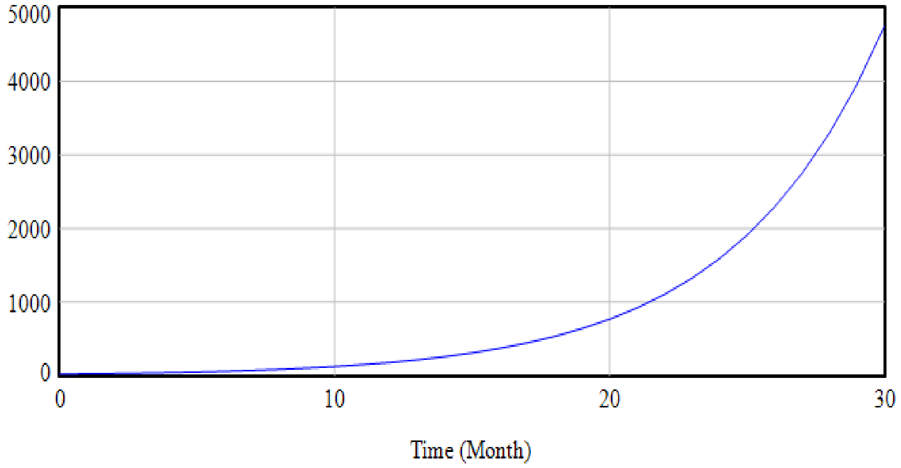
LEV=INTEG(RT，20)

*RT=0.2*S*

时间变量TIME简化为变量t

一般化的方程也常写为

即一阶常微分方程



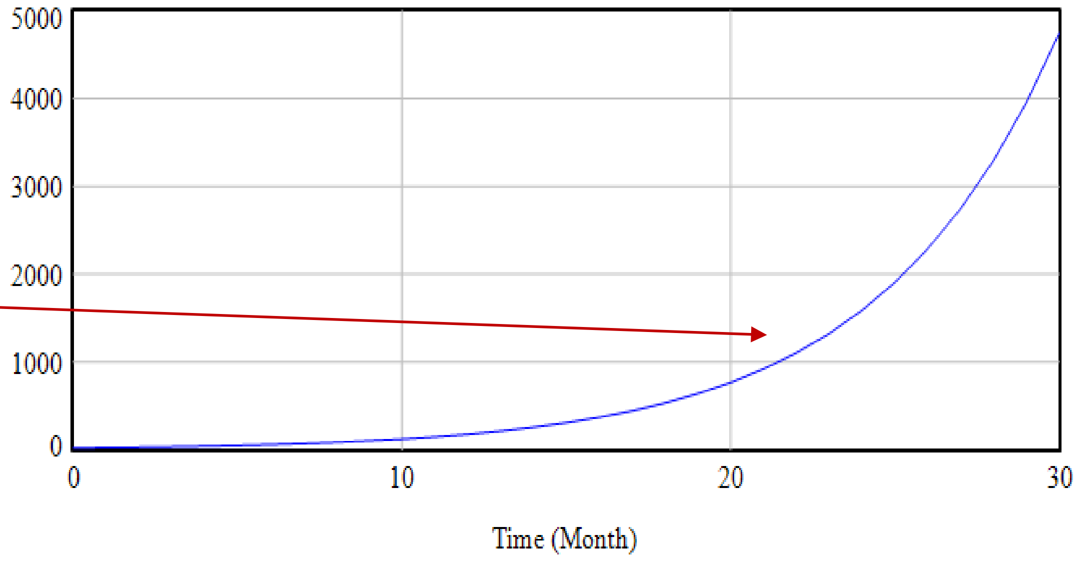
正反馈的行为模式

求解方程

$$\frac{dL}{dt} = 0.2 * L$$

得到L的解析式

$$L = 100e^{0.2t}$$



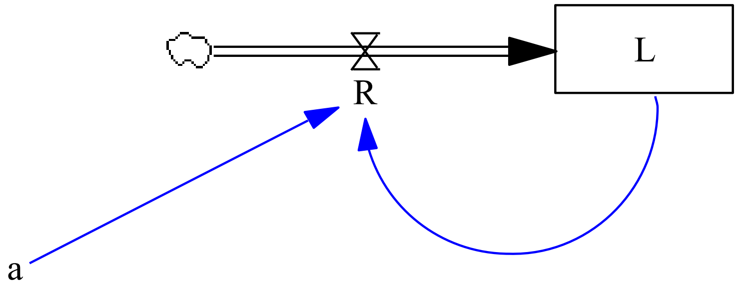
即 正反馈的基本行为模式是指数变化趋势，时间常数对应了存量指数函数的时间系数

$$L(t) = 100e^{0.2t}$$

而初始值设置则是微分方程初值，即t=0时

$$L(0) = 100$$

一阶正反馈重要参数



› 一阶正反馈数学描述式

$$L(t)=L(0)e^{at}$$

› 时间常数

$$T=\frac{1}{a}$$

令t=T，代入系统状态式中

$$L(T)=L(0)e^{(1/T)*T}=L(0)e\approx 2.73L(0)$$

即每过一个T的时间长度，系统增长初始值的约2.73倍
时间常数越大，系统状态增长越缓
时间常数越小，系统状态增长越陡

T	$e\cdot L(0)$
2T	$e^2\cdot L(0)$
3T	$e^3\cdot L(0)$
4T	$e^4\cdot L(0)$

每增长一个时间T，就在初始值基础上扩大2.73倍

一阶正反馈重要参数

- 倍增时间 T_d

倍增时间定义为变量由初始值增长到第一个翻倍所需时间

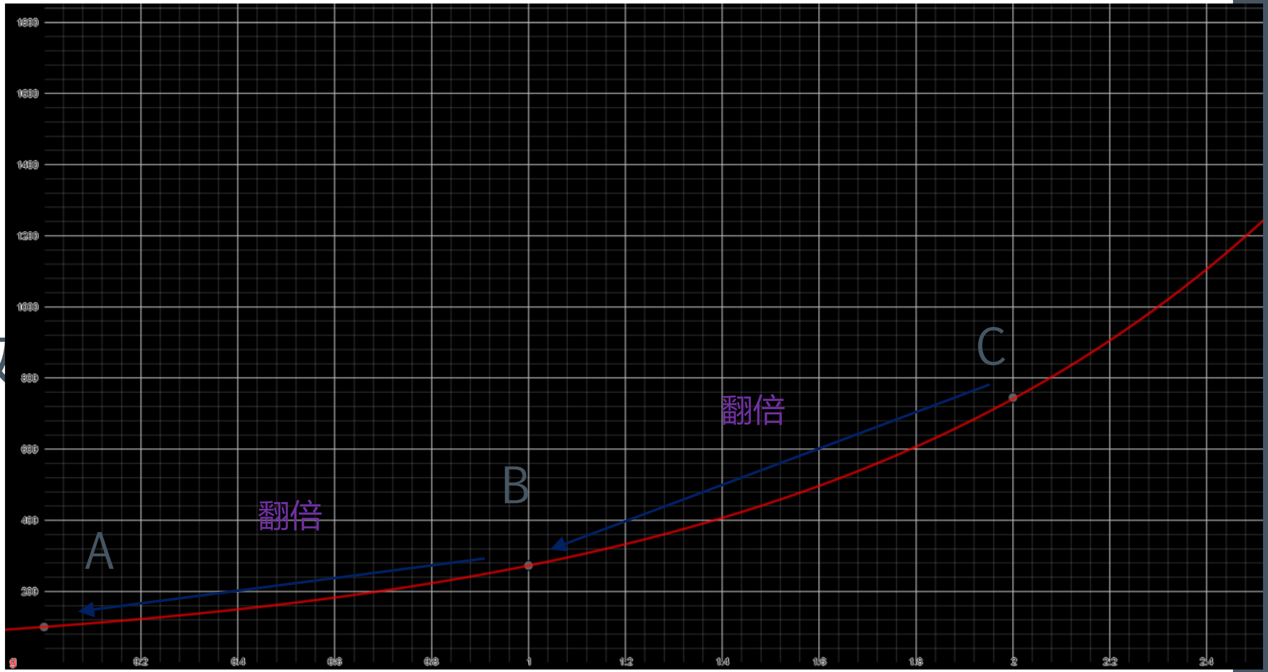
T_d与时间常数T的关系

$$T_d = 0.69T$$

$$2L(0) = L(0)e^{aT_d}$$

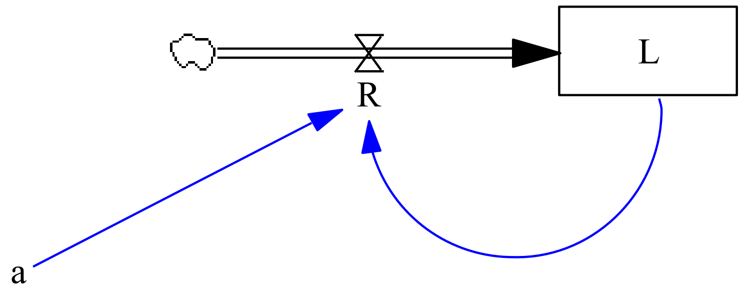
$$T_d = \frac{\ln 2}{a} \approx 0.69T$$

即倍增时间约等于70%时间常数

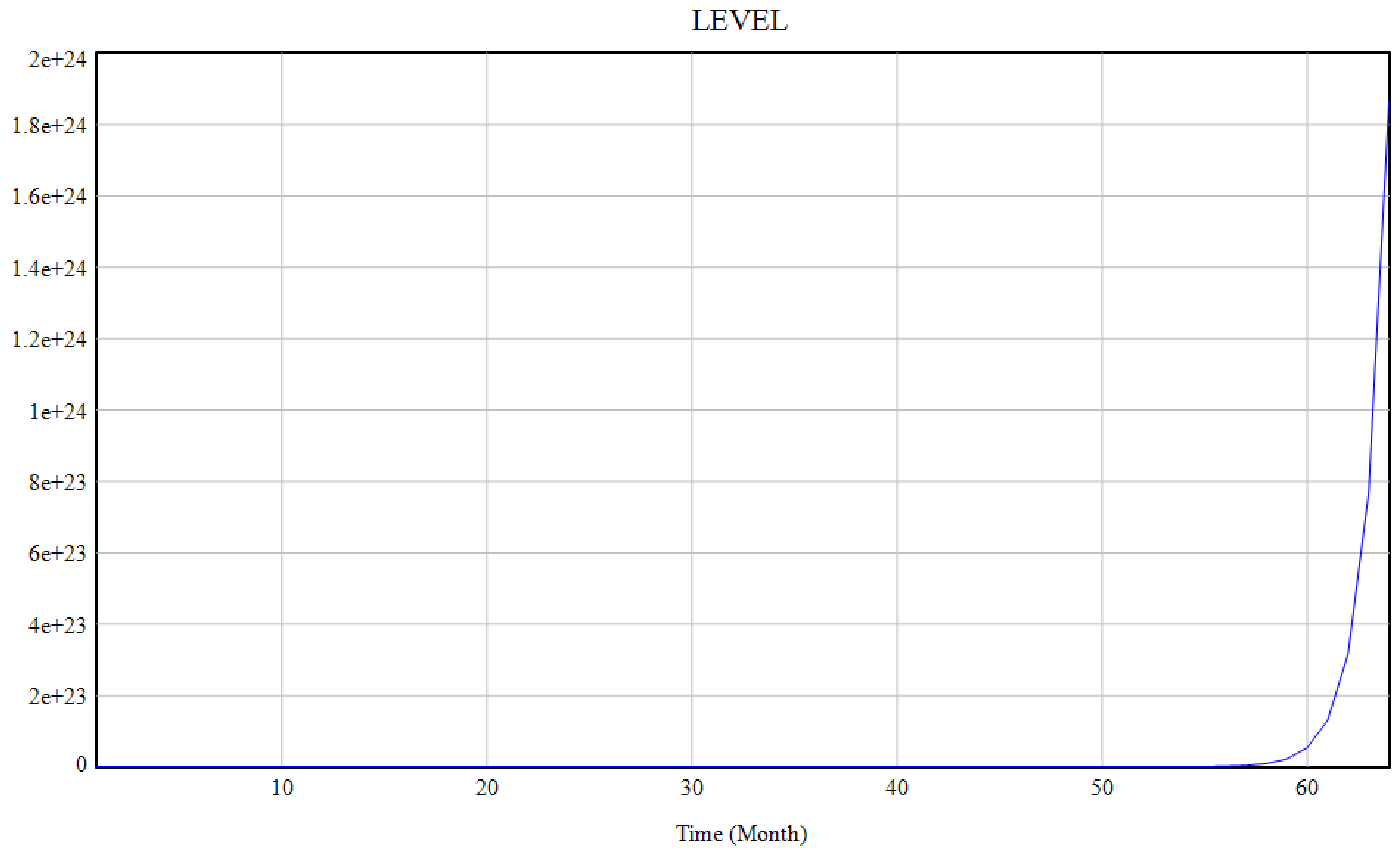


估算参数

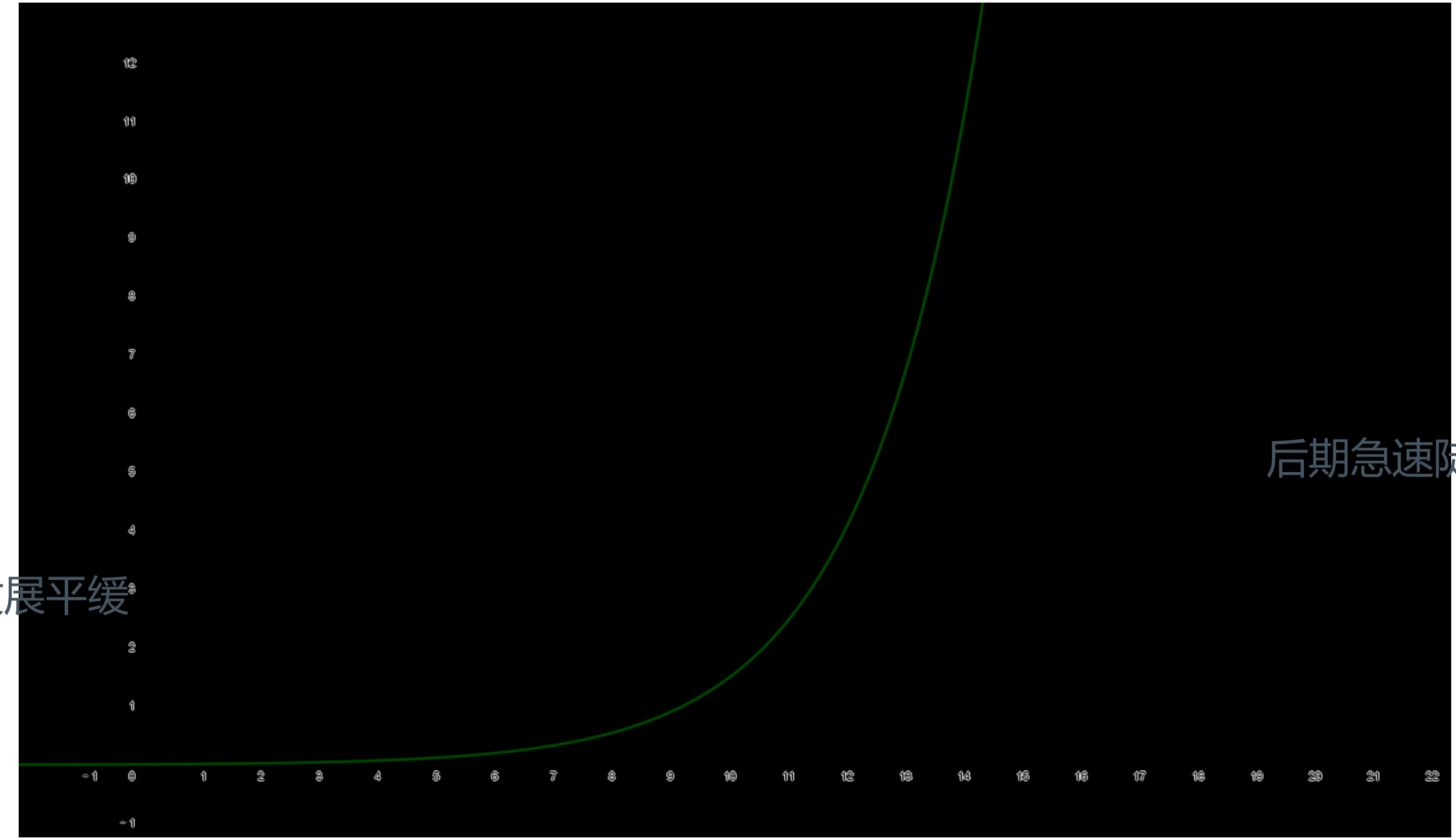
已知国际棋盘共64个格子，在棋盘第一个格子上放1粒粮食，第二个格子上放2粒，第三个上放6粒，如此类推下去，每一个格子上放的粮食数目是已经放下的数目两倍，请用仿真工具计算粮食数目累计多少，如何增长。



某企业处于市场拓展阶段，通过积累和拓展渠道持续增加销量，大约每15个月销售量会翻番，设原2010年1月销量为10（万元），请做出5年内的销量仿真系统。


LEVEL
2e+24
1.8e+24
1.6e+24
1.4e+24
1.2e+24
1e+24
8e+23
6e+23
4e+23
2e+23
0
10
20
30
40
50
60
Time (Month)

正反馈指数发展趋势特点

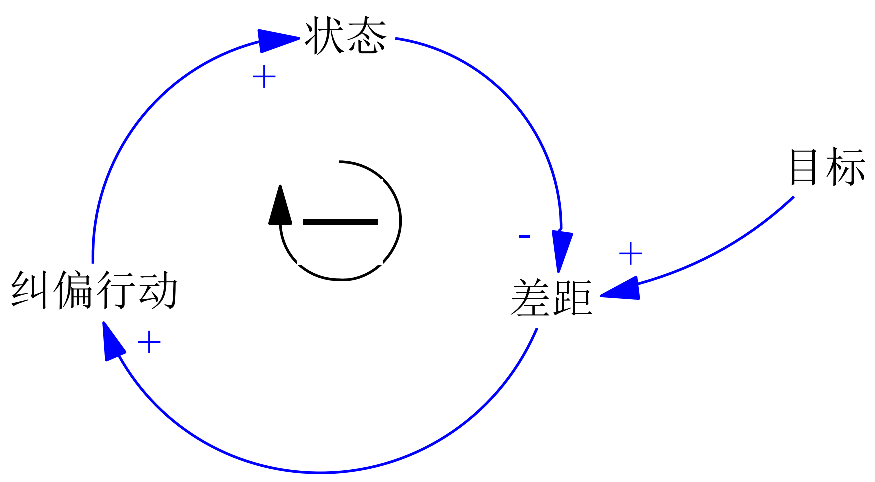


前期发展平缓

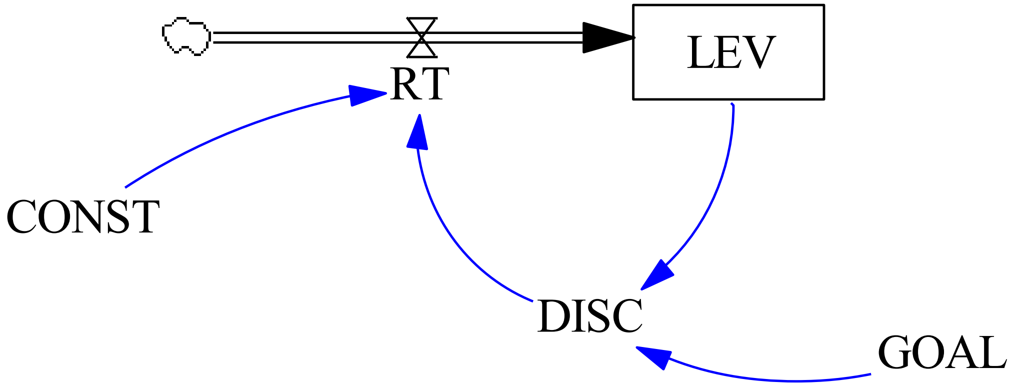
后期急速陡峭

负反馈特点

- 负反馈系统原理如右侧因果分析图所示
- 负反馈具有“寻的” 趋势
- 对系统变化具有补偿特性，即
  - 偏离平衡位置越多，补偿越多
  - 偏离平衡位置越近，补偿越少



负反馈的数学原理



$$\frac{dLEV(t)}{dt} = CONST \cdot [GOAL - LEV(t)]$$

$$\frac{dLEV(t)}{GOAL - LEA(t)} = CONST * dt$$

两侧做积分运算，解得

$$LEV(t) = GOAL - [GOAL - LEV(0)]e^{-CONST*t}$$

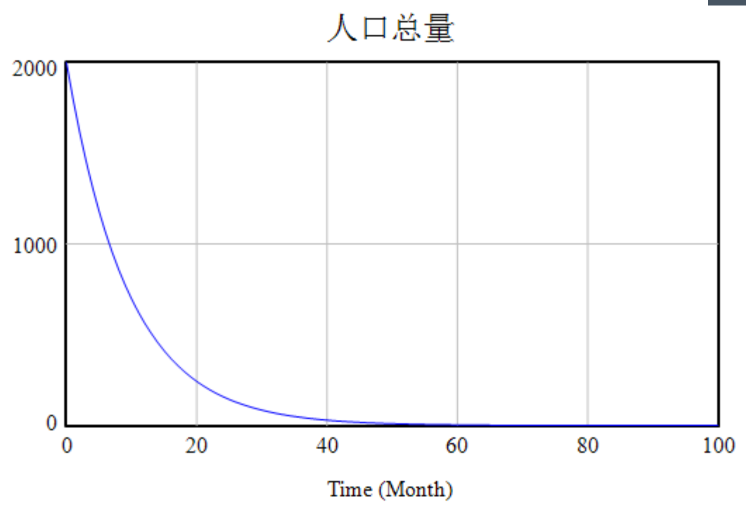
负反馈的时间常数

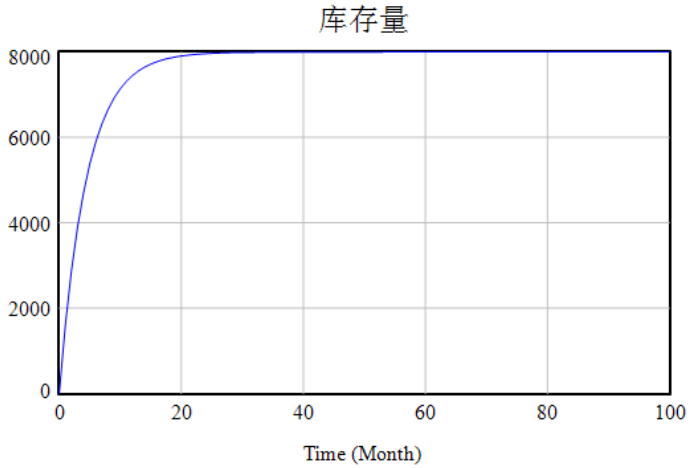
- 从负反馈的数学表达式中可以得到
  - 负反馈的发展模式也是指数特征
  - 时间系数是固定常数
- 推算时间常数：T=1/CONST

$$LEV(T) = GOAL - [GOAL - LEV(0)]e^{-\frac{1}{T}\cdot T}$$

$$= GOAL - [GOAL - LEV(0)]e^{-1}$$

$$\approx LEV(0) + 0.632\cdot[GOAL - LEV(0)]$$





时间常数含义：每隔T时间，系统增长初始值与目标值差距的0.632倍

减半时间常数T_h

注意：减半时间在某些领域也被称为半衰期

- 简化问题，若目标值设置为0
- 系统状态的解析式变为

$$LEV(t) = LEV(0)e^{-CONST \cdot t}$$

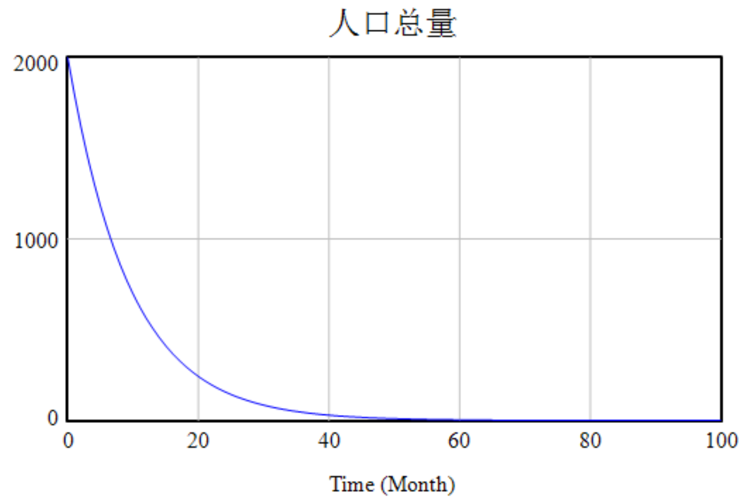
由T导出，令状态为初始状态一半

$$\frac{1}{2}LEV(0) = LEV(0)e^{-\frac{1}{T} \cdot T_h}$$

得到

$$T_h = T \cdot \ln 2 \approx 0.69T$$

即减半时间约等于0.69倍时间常数T



正反馈特征

- 基本特征：
  - 指数增长
  - 倍增时间固定
  - 初期接近线性，末期急速增长
- 常见问题
  - 发展问题
  - 滚雪球效应
  - 良心循环问题
- 非指数型
  - 倍增时间不固定
  - 时间越长越偏离指数趋势

负反馈特征

- 负反馈的三种模式
  1. 模式1：当状态为正数，差距为正时
  2. 模式2：当状态为正数，差距为负时
  3. 模式3：当状态为正数，差距为零时