

Combinatorial Counting

SUSTech-CPC div1

Yee_172

2019.01.17

基础知识

阶乘

模意义下阶乘的逆

组合数

高精度

4个点 $A(0, 0)$, $B(p, 0)$, $C(m, q)$, $D(m, n)$, 保证 $p < m, q < n$, 求从 A 走到 D 和从 B 走到 C 两条路径不相交的走法的种数。

思路：用总的路径数 — 相交的路径数

错排

考虑一个有 n 个元素的排列，若一个排列中所有的元素都不在自己原来的位置上，那么这样的排列就称为原排列的一个错排。 n 个元素的错排数记为 $D(n)$ 。研究一个排列错排个数的问题，叫做错排问题或称为更列问题。

四人各写一张贺年卡互相赠送，自己写的贺年卡不能送给自己，有多少种赠送方法？

第一步，把第 n 个元素放在一个位置，比如位置 k ，一共有 $n - 1$ 种方法；

第二步，放编号为 k 的元素，这时有两种情况：

(1) 把它放到位置 n ，那么，对于剩下的 $n - 1$ 个元素，由于第 k 个元素放到了位置 n ，剩下 $n - 2$ 个元素就有 $D(n - 2)$ 种方法；

(2) 第 k 个元素不把它放到位置 n ，这时，对于这 $n - 1$ 个元素，有 $D(n - 1)$ 种方法；

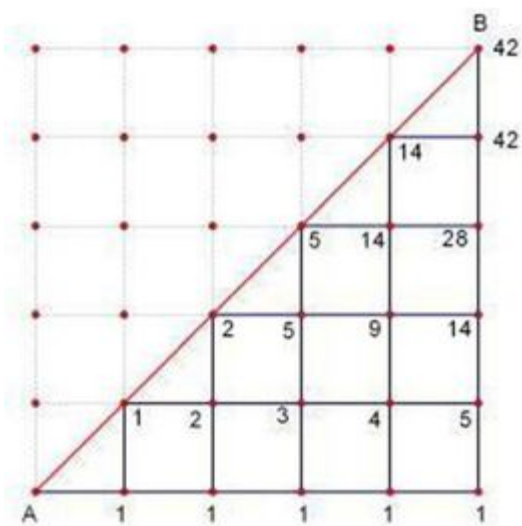
综上得到

$$D(n) = (n - 1)[D(n - 2) + D(n - 1)]$$

特殊地， $D(1) = 0, D(2) = 1$

卡特兰数

一个栈(无穷大)的进栈序列为 $1, 2, \dots, n$, 有多少种不同的出栈序列?



卡特兰数 C_n 满足以下递推关系:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

$$(n-3)C_n = \frac{n}{2} \sum_{i=3}^{n-1} C_i C_{n+2-i}$$

$$C_n = C_{n-1} * (4n-2)/(n+1)$$

$$C_n = \binom{2n}{n} / (n+1)$$

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

特别地, $C_0 = C_1 = 1$

第一类 Stirling 数

第一类 Stirling 数表示将 n 个不同元素构成 m 个圆排列的数目

第二类 Stirling 数

第二类 Stirling 数表示将 n 个不同的元素分成 m 个集合的方案数

贝尔数

集合划分的数目，即第二类 Stirling 数求和的结果

施罗德数

在组合数学中，施罗德数用来描述从 $(0, 0)$ 到 (n, n) 的格路中，只能使用 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ 三种移动方式，始终位于对角线下方且不越过对角线的路径数

[A006318](#) big Schroeder numbers

[A001003](#) little Schroeder numbers

整数拆分问题

五边形数公式

五边形数定理

THANKS