

# 数学建模课程笔记

Iydon, 张志灵

2018 年 11 月 20 日

## 目录

<b>1</b>	<b>课程大纲</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>微分方程</b>	<b>4</b>
2.1	常微分方程 . . . . .	4
2.2	偏微分方程 . . . . .	4
2.3	微分方程的求解 . . . . .	4
2.4	SARS 传播 . . . . .	5
2.4.1	问题的重述 . . . . .	5
2.4.2	问题的分析 . . . . .	5
2.4.3	模型假设与符号说明 . . . . .	5
2.4.4	模型的建立 . . . . .	7
2.4.5	模型的求解 . . . . .	10
2.4.6	模型的分析 . . . . .	10
<b>3</b>	<b>差分方程模型</b>	<b>10</b>
3.1	微分方程应用背景 . . . . .	10
3.2	差分方程 . . . . .	11
3.2.1	数列的差分 . . . . .	11
3.2.2	差分方程 . . . . .	12
3.2.3	差分方程的求解 . . . . .	12
3.3	连续模型的离散化 . . . . .	12
3.3.1	微分的离散化 . . . . .	12
3.3.2	积分的离散 . . . . .	13

3.4	差分方程模型	14
3.4.1	市场经济中的“蛛网”模型	14
4	储油罐的变位识别与罐容表标定	16
4.1	题目	16
4.2	模型假设	18
4.3	符号说明	18
4.4	建立数学模型	18
4.5	模型的求解	19
5	数模国赛 2002B 题（彩票中的数学）解析	19
5.1	问题重述（简略）	19
5.2	模型假设	21
5.3	符号说明	22
5.4	模型预备（计算每种摇奖方式中奖概率）	22
5.5	模型建立	22
6	数学规划模型	24
6.1	引言	24
6.1.1	多元函数求条件极值	24
6.1.2	数学规划模型	24
6.1.3	应用	24
6.1.4	赛题	24
6.1.5	建立模型的三要素	25
6.1.6	模型的分类	25
6.1.7	可行解、最优解、次优解以及可行集	25
6.2	线性规划	26
6.3	求解方法	27
6.4	非线性规划	27
7	2011 年 B 题	28
7.1	题目及其附件	28
7.2	合理分配 A 区 20 个平台管辖范围	29
7.2.1	建立 A 地区交通网络的赋权图	29
7.2.2	设置决策变量	29

7.2.3	计算出警时间 . . . . .	29
7.2.4	每个警务平台的工作量 . . . . .	29
7.2.5	模型的建立 . . . . .	30
7.2.6	模型的求解 . . . . .	30
7.3	调动 20 个平台封锁 13 个街道 . . . . .	30
7.3.1	设置决策变量 . . . . .	30
7.3.2	建立数学模型 . . . . .	31
7.4	确定拟增设平台的个数和数目 . . . . .	31
7.4.1	符号说明 . . . . .	31
7.4.2	设置决策变量 . . . . .	31
7.4.3	计算设置平台的效益 . . . . .	31
7.4.4	模型的建立 . . . . .	32
7.5	全市 6 个区警务平台的设计合理性评价 . . . . .	32
7.6	最佳围追堵截方案 . . . . .	32
7.6.1	符号说明 . . . . .	32
7.6.2	设置决策变量 . . . . .	32
7.6.3	建立优化模型 . . . . .	33
7.6.4	模型的求解 . . . . .	33
<b>8</b>	<b>图论与网络优化</b>	<b>33</b>
8.1	图论的发展历史 . . . . .	33
8.1.1	七桥问题 . . . . .	33
8.1.2	中国邮递员问题 . . . . .	34
8.1.3	四色问题 . . . . .	34
8.2	图的基本概念 . . . . .	34
8.2.1	图的定义 . . . . .	34
8.2.2	有向图与无向图 . . . . .	34
8.2.3	阶与度 . . . . .	35
8.2.4	完全图 . . . . .	35
8.2.5	子图 . . . . .	35
8.2.6	道路与回路 . . . . .	35
8.2.7	图的矩阵表示 . . . . .	36
8.3	基本模型 . . . . .	36
8.3.1	最短路径模型 . . . . .	36

8.3.2	中国邮递员问题 . . . . .	36
8.3.3	旅行商 . . . . .	36
<b>9</b>	<b>灾情巡视路线</b>	<b>37</b>
9.1	题目 . . . . .	37
9.2	模型的建立与分析 . . . . .	39
9.3	问题 . . . . .	39

## 1 课程大纲

- 课程目的:

- (a) 了解常用建模方法
- (b) 掌握建模的过程
- (c) 论文写作的构成

1. 什么是数学建模

- (a) 用数学语言刻画实际的现象
- (b) 利用数学方法计算分析问题

2. 怎样建立数学模型

- (a) 模型的准备阶段
  - i. 了解问题背景
  - ii. 找出特征
  - iii. 初步确定方法
- (b) 模型假设
  - i. 确定问题主要因素
  - ii. 分析因素之间的关系
- (c) 模型的建立
  - i. 利用适当数学工具刻画实际问题
- (d) 模型求解与分析
  - i. 计算机数值模拟
  - ii. 借助数据分析的方法
- (e) 模型的检验
  - i. 与实际数据作比对, 检验模型的可靠性
  - ii. 对模型进行补充与修正甚至重建
- (f) 模型的引用
  - i. 将模型应用到实际问题

### 3. 建模方法

#### (a) 初等分析法

- i. 几何分析法 (北京-> 北极圈-> 洛杉矶)
- ii. 逻辑分析法

#### (b) 微分方程模型

- i. SARS 模型
- ii. 长江水质污染

#### (c) 差分方程模型

- i. 种群问题的分析
- ii. 储油罐的位置识别

#### (d) 图论模型

- i. 最短路模型
- ii. 流量问题

#### (e) 几何与代数模型

- i. 图像识别

#### (f) 统计分析

- i. 彩票中奖数量

#### (g) 优化模型

- i. NBA 赛程的安排

### 4. 一般要求

- (a) 模型正确合理, 创新
- (b) 结果正确简洁, 便于验证
- (c) 反映问题的本质
- (d) 具有推广性

### 5. 论文的主要构成

- (a) 结构完整
- (b) 格式准确

- i. 题目, 摘要, 关键词, 目录
- ii. 问题的重述与分析
- iii. 模型的假设与符号的说明
- iv. 建立数学模型
- v. 模型的求解
- vi. 模型分析与检验
- vii. 模型的改进方向

## 2 微分方程

定义: 含有函数及导数的关系式称为微分方程。

### 2.1 常微分方程

一元函数及其导数。

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$

### 2.2 偏微分方程

设  $u$  是  $x, y$  的二元函数, 且满足

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

称为二阶常系数偏微分方程, 记  $D^2 = B^2 - 4AC$ 。

$$\begin{cases} D < 0 & \text{椭圆方程, 拉普拉斯方程: } u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ D = 0 & \text{抛物方程, 热传导方程: } \frac{\partial u}{\partial t} = a \Delta u, \\ D > 0 & \text{双曲方程, 波动方程: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \end{cases}$$

### 2.3 微分方程的求解

- 理论上的分析
  - 解是否存在, 如果存在是否唯一, 以及解的状态。
- 数值求解

- 常微分：欧拉格式，线性多步法，龙格库塔法等。
- 偏微分呢：差分法，有限元方法，谱方法等。
- MATLAB 使用
  - 符号计算工具箱，dsolve，pde 工具箱
- 微分方程的例子
  - SARS 传播

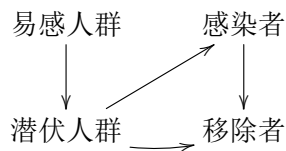
## 2.4 SARS 传播

### 2.4.1 问题的重述

对 SARS 传播建立数学模型，为预测控制传染病的传播提供可靠足够的信息。

### 2.4.2 问题的分析

采用 SIR 模型 (Susceptible Infected Recovered Model):



### 2.4.3 模型假设与符号说明

- 模型假设
  1. 不考虑人口的出生率死亡率
  2. 假设平均潜伏期为 6 天 (翻阅资料)
  3. 假设潜伏期的病人不传播
- 符号说明
  - 见表 1。



符号	说明
$t$	SARS 的传播时间
$N$	某个疫区人口总数
$S(t)$	$t$ 时刻健康人数占的比例
$E(t)$	$t$ 时刻潜伏人数比例
$I(t)$	感染人数比例
$Q(t)$	移除者人数比例
$\lambda(t)$	日接触率
$b(t)$	每日新增确诊人数
$v(t)$	每日新增疑似病例
$d(t)$	每日新增死亡人数
$f(t)$	疫病指数
$g(t)$	预防措施力度
$h(t)$	个体警惕性指标
$w(t)$	防范意识

表 1: 符号说明

#### 2.4.4 模型的建立

初步确定各类人群的关系： $S \longrightarrow E \longrightarrow I \longrightarrow Q$

$t$  时刻易感人群为  $N \cdot S(t)$ ,  $t + \Delta t$  时刻易感人群为  $N \cdot S(t + \Delta t)$ 。于是可以得到:

$$N(S(t) - S(t + \Delta t)) = N \cdot I(t) \cdot \lambda(t) \cdot S(t) \cdot \Delta t$$

令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 则有:

$$-\frac{dS}{dt} = \lambda(t) \cdot S(t) \cdot I(t)$$

同理可得  $t$  时刻潜伏人数关系式:

$$N(E(t) - E(t + \Delta t)) = N(I(t) \cdot \lambda(t) \cdot S(t) - \epsilon \cdot E(t)) \Delta t$$

令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 则有:

$$-\frac{dE}{dt} = I(t) \cdot \lambda(t) \cdot S(t) - \epsilon \cdot E(t)$$

同理可得  $t$  时刻死亡人数关系式:

$$N(Q(t + \Delta t) - Q(t)) = \omega \cdot N \cdot I(t) \Delta t$$

令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 则有:

$$\frac{dQ}{dt} = \omega \cdot I(t)$$

同理可得  $t$  时刻感染人数关系式:

$$N(I(t + \Delta t) - I(t)) = N(\epsilon \cdot E(t) - \omega \cdot I(t)) \Delta t$$

令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 则有:

$$\frac{dI}{dt} = \epsilon \cdot E(t) - \omega \cdot I(t)$$

通过查阅医学数据, 取  $\epsilon = 1/6$ ,  $\omega = 0.008$ 。

控前模型,  $\lambda(t) = \lambda_0$ , 同时存在超级传染事件发生, 故引入  $\delta$  函数:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{if } x = x_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

修正如上所得式子如下:

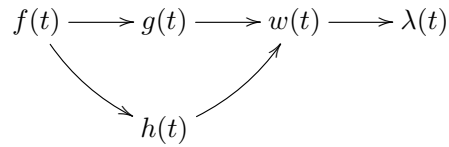
$$-\frac{dS}{dt} = \lambda(t) \cdot S(t) \cdot I(t) + N \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \Delta(t - t_i)$$

$$-\frac{dE}{dt} = I(t) \cdot \lambda(t) \cdot S(t) + \epsilon \cdot E(t) + N \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \Delta(t - t_i)$$

由此根据微分方程及初始条件 ( $S(t_0) = S_0$  等), 代入数据即可得出结果。

控后模型, 消灭超级传染事件, 并且  $\lambda(t)$  有所变化, 具体符号说明见表 2。

可得控后模型的符号分析:



符号	说明
$b(t)$	每日新增确诊人数
$v(t)$	每日新增疑似病例
$d(t)$	每日新增死亡人数
$f(t)$	疫病指数
$g(t)$	预防措施力度
$h(t)$	个体警惕性指标
$w(t)$	防范意识

表 2: 控后模型符号说明

$f(t)$  的刻画:

$f(t)$  与  $d(t)$ ,  $b(t)$  与  $v(t)$  有关, 所以构造线性组合 (其中  $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ ):

$$f(t) = q_1 \frac{d(t)}{\max\{d(t)\}} + q_2 \frac{b(t)}{\max\{b(t)\}} + q_3 \frac{v(t)}{\max\{v(t)\}}$$

根据数据可以画出离散图形, 根据图像观测为韦伯分布:

$$f(t) = \frac{m}{x_0} \cdot (t - v)^{m-1} \cdot \exp\left(-\frac{(t - v)^m}{x_0}\right)$$

通过参数估计 (矩估计, 点估计), 可得  $m = 2.3499$ ,  $v = -1.5578$ ,  $x_0 = 14.3530$ 。

$g(t)$  的刻画:

由  $g(t_0) = k_0$  变成与  $f(t)$  相关的函数, 通过图像猜测为高斯分布, 于是得到函数关系:

$$g(t) = k_0 + k_1 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\left(\overline{f(t)}\right)^2}{\sigma_1}\right)\right)$$

同样根据参数估计可得  $k_0 = 0.2$ ,  $\overline{f(t_0)} = 0.42$ ,  $g(t_0) = 0.7$ 。

$h(t)$  的刻画:

$$\begin{cases} f(t_0) = 0 & h(t_0) = k_2 \\ f(t_0) \rightarrow \infty & h(t_0) \rightarrow 1 \end{cases}$$

于是可得  $h(t) = k_2 - k_3 \cdot \exp(-f(t))$ , 通过如上关系式可得  $k_2 = 1, k_3 = 0.8$ 。

$\lambda(t)$  的刻画:

$$\begin{cases} w(t_0) = 0 & \lambda(t_0) = \lambda_0 \\ w(t) \text{ inc} & \lambda(t) \text{ dec} \end{cases}$$

于是有:

$$\lambda(t) = k_4 \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{(1-w(t))^2}{\sigma_2}\right) \right)$$

#### 2.4.5 模型的求解

控后的模型方程组即为在控前模型上增加  $\lambda(t)$  的约束条件, 求解即为常微分方程的求解, 可以使用欧拉格式。

#### 2.4.6 模型的分析

可继续从如下两个关系式, 每日新增确诊人数与疑似病例中对控前控后的模型进行分析。

$$\begin{cases} N(I(t) - I(t-1)) & = b(t) \\ N(E(t) - E(t-1)) & = v(t)2 \end{cases}$$

### 3 差分方程模型

#### 3.1 微分方程应用背景

1. 研究问题是离散的
2. 连续数学模型离散化

## 3.2 差分方程

### 3.2.1 数列的差分

定义:

数列  $\{a_n\}$  相当于定义在正整数集上的函数:  $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

例 1  $a_n = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, \dots$

例 2 Fibonacci 数列 (黄金分割数列、兔子数列)

数列定义:  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 \quad (\text{黄金分割比})$$

繁殖模型: 一对幼兔出生一月后成年, 再过一月产下一对幼兔。

起始: 一对幼兔

月数	0	1	2	3
幼兔	1	0	1	1
成兔	0	1	1	2
总数	1	1	2	3

数列的差分

$$\Delta a_n := a_{n+1} - a_n, n = 1, 2, \dots$$

差分的意义

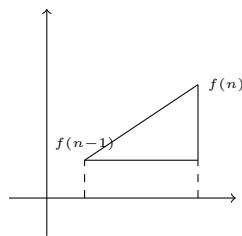
1. 平均速率

$S(n)$ :  $n$  时刻的旅程

$$S(n) - S(n-1) = \frac{S(n) - S(n-1)}{1}: n \text{ 时刻平均速率}$$

2. 斜率

$f(n)$ : 整数节点处的函数取值  $f(n) - f(n-1) = \frac{f(n) - f(n-1)}{1}$ :  $n-1$ 、 $n$  两点间连线的斜率, 如下图所示:



### 3.2.2 差分方程

#### 定义

数列中任意一项与前几项的关系式。

例：  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

#### 差分方程的阶

方程中最大下标与最小下标之差。

#### 差分方程类别

- 常系数差分方程：

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n) (n > k) c_i \text{ 为常值}$$

- 变系数差分方程：差分方程中  $c_i$  为函数

### 3.2.3 差分方程的求解

#### I. 理论分析：

分析差分方程解的存在性、稳定性等性质。可参考线性代数 I-A 中的内容和其他相关参考资料

#### II. 数值求解：

迭代求解，关键在于选取合适的初值条件。

## 3.3 连续模型的离散化

### 3.3.1 微分的离散化

例：已知  $f \in C^1[a, b]$ ，且仅知道  $f(x_k), k = 0, 1, 2, \cdots, n+1, a \leq x_0 < \cdots < x_k \leq b$ ，求  $f'(x_k)$ 。

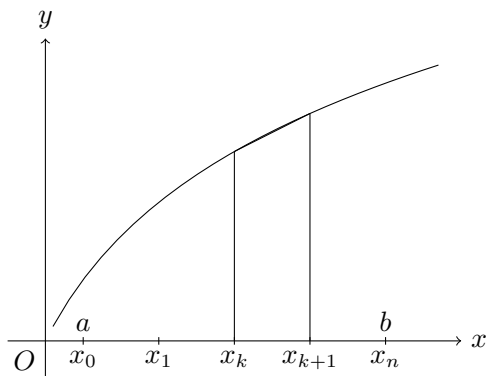
方法：数值微分

- I. 向前差分:  $f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$
- II. 向后差分:  $f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$
- III. 中心差分: 向前、向后差分求算术平均。近似效果更好。

### 3.3.2 积分的离散

计算  $I = \int_a^b f(x) dx$  —— 数值积分公式

- I. 复化梯形公式: 用梯形面积近似曲边梯形面积, 在区间上进行线性值拟合。



$$I \approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})], h = b - a$$

- II. 复化 Simpson 公式: 利用  $x_k, x_{k+1}, (x_k + x_{k+1})/2$  三点对应的二次曲线拟合闭区间  $[x_k, x_{k+1}]$  上的函数图像。

$$x_{k+\frac{1}{2}} := \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

$$I \approx \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1}) \right]$$

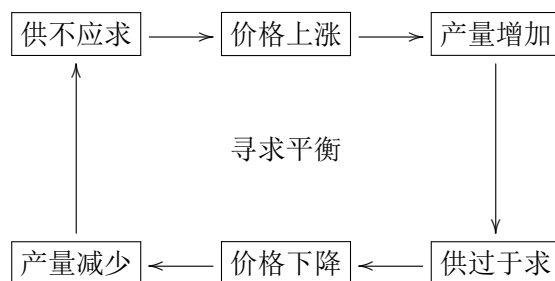
MATLAB 软件拥有微分、积分的数值计算和符号计算工具包。



### 3.4 差分方程模型

#### 3.4.1 市场经济中的“蛛网”模型

模型图示



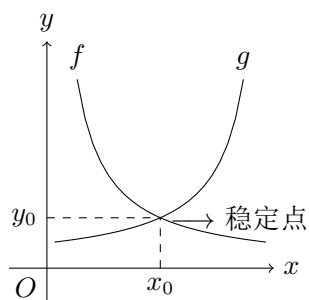
模型刻画

$x_k$ :  $k$  时刻商品数量

$y_k$ :  $k$  时刻商品价格

需求关系:  $y_k = f(x_k) \downarrow$

供应关系:  $x_{k+1} = h(y_k) \uparrow \implies y_k = g(x_k + 1)$



寻找稳定点:

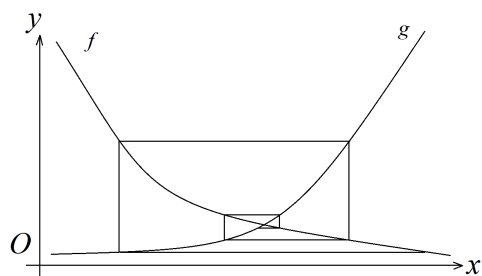


图 1: “蛛网”模型

分析：什么条件下可收敛至稳定点？

$\alpha$ : 商品数量减少一个单位对应价格上涨的幅度

$\beta$ : 价格上涨一个单位对应供应量的增量

$\alpha > 0, \beta > 0$

$$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0)$$

$$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0)$$

$$\implies x_{k+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_k - x_0) = (-\alpha\beta)^k(x_1 - x_0)$$

$$\text{稳定: } x_{k+1} - x_0 \rightarrow 0 \implies \alpha\beta < 1$$

当  $\alpha\beta \geq 1$  时，模型发散，此时需要政府宏观调控。

## 4 储油罐的变位识别与罐容表标定

### 4.1 题目

#### 2010 高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目

(请先阅读“全国大学生数学建模竞赛论文格式规范”)

#### A 题 储油罐的变位识别与罐容表标定

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（以下称为变位），从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。图1是一种典型的储油罐尺寸及形状示意图，其主体为圆柱体，两端为球冠体。图2是其罐体纵向倾斜变位的示意图，图3是罐体横向偏转变位的截面示意图。

请你们用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

(1) 为了掌握罐体变位后对罐容表的影响，利用如图4的小椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体），分别对罐体无变位和倾斜角为 $\alpha=4.1^\circ$ 的纵向变位两种情况做了实验，实验数据如附件1所示。请建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为1cm的罐容表标定值。

(2) 对于图1所示的实际储油罐，试建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 $\alpha$ 和横向偏转角度 $\beta$ ）之间的一般关系。请利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据（附件2），根据你们所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值。进一步利用附件2中的实际检测数据来分析检验你们模型的正确性与方法的可靠性。

**附件 1:** 小椭圆储油罐的实验数据

**附件 2:** 实际储油罐的检测数据

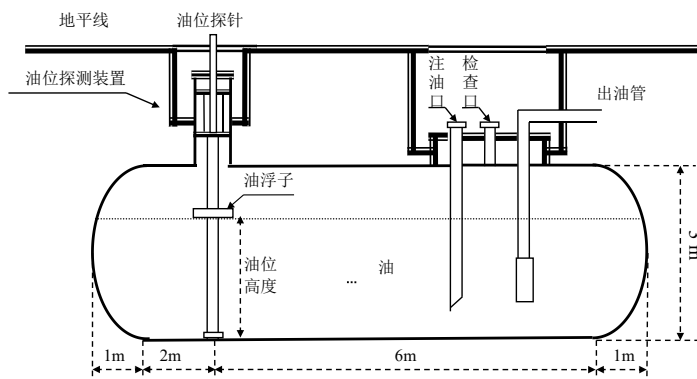


图 1 储油罐正面示意图

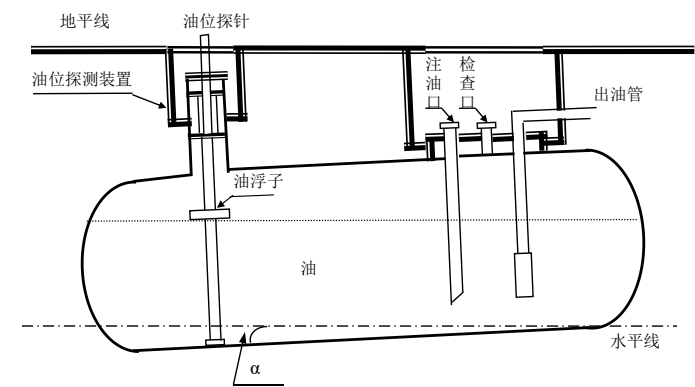


图2 储油罐纵向倾斜变位后示意图

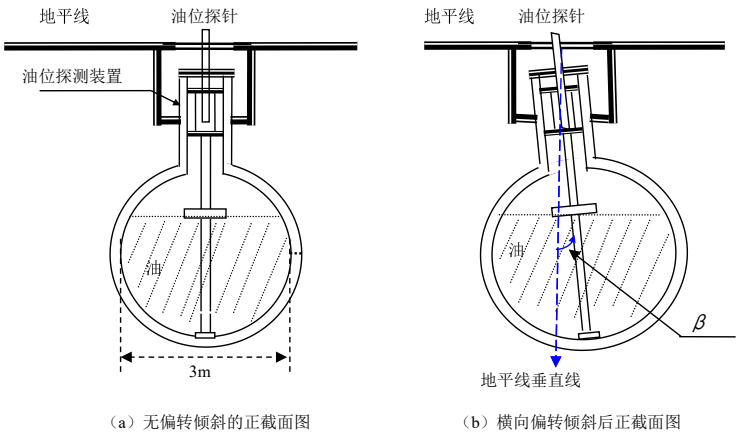


图3 储油罐截面示意图

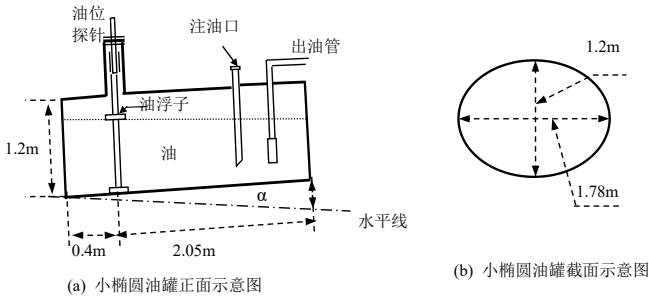


图4 小椭圆型油罐形状及尺寸示意图

## 4.2 模型假设

1. 不考虑油罐由于温度压强等外力变化而引起的体积变化。
2. 油位探针被固定且油浮子的测量是准确的。

## 4.3 符号说明

符号	说明
$L$	圆柱体长度
$R$	圆柱体底面半径
$h$	油位高度
$R_0$	球冠体的半径
$H_0$	球缺的高度
$\beta$	横向偏转角
$\alpha$	纵向偏转角

## 4.4 建立数学模型

储油罐的容积

$$V = V_{\text{柱}} + 2V_{\text{球缺}} = \pi R^2 L + 2\pi H^2 \left(R_0 - \frac{H}{3}\right)$$

不发生形变时,  $h$  与容量的关系

1.  $h \leq R$  时

- $V_{\text{柱}}(h) = \int_0^h 2L\sqrt{R^2 - (R - \tau)^2} d\tau$
- $\theta = \arccos\left(\frac{R_0 - H}{r_{\text{圆}}}\right)$
- $r_{\text{圆}} = \sqrt{R_0^2 - (R - \tau)^2}$
- $V(h) = V_{\text{柱}} + 2V_{\text{球缺}}$

2.  $h > R$  时

- $V(h) = V - V(2R - h)$

只考虑横向偏转

1.  $h_\beta \neq R$  时

$$\bullet h = R - (R - h_\beta) \cos \beta$$

2.  $h_\beta = R$  时

• 思路与上同。

只考虑纵向偏转

1.  $h_\alpha = 0$

2.  $h_\alpha \in (0, (L - l) \tan \alpha)$

3.  $h_\alpha \in ((L - l) \tan \alpha, 2R - l \tan \alpha)$

4.  $h_\alpha \in (2R - l \tan \alpha, 2R)$

同时发生横向偏转与纵向偏转

$$h_\alpha = R - (R - h_\beta) \cos \beta$$

#### 4.5 模型的求解

已知,  $h(\alpha, \beta)$ , 可以算出体积  $V(h, \alpha, \beta)$ 。

$$\Delta V_i = V(h_{i+1}, \alpha, \beta) - V(h_i, \alpha, \beta)$$

于是

$$\min_{\alpha, \beta} \left\{ \sum_i^{i'} (\Delta V_i - \Delta V'_i)^2 \right\}$$

## 5 数模国赛 2002B 题（彩票中的数学）解析

### 5.1 问题重述（简略）

近年来“彩票飓风”席卷中华大地，巨额诱惑使越来越多的人加入到“彩民”的行列，目前流行的彩票主要有“传统型”和“乐透型”两种类型。

“传统型”采用“10 选 6+1”方案：先从 6 组 0-9 号球中摇出 6 个基本号码，每组摇出一个，然后从 0-4 号球中摇出一个特别号码，构成中奖号码。投注者从 0-9 十个号码中任选 6 个基本号码（可重复），从 0-4 中选一个特别号码，构成一注，根据单注号码与中奖号码相符的个数多少及顺序确定中奖等级。以中奖号码“abcdef+g”为例说明中奖等级，如表 5.1：

表 3: “传统型”彩票，X 表示与摇出号码不符

中奖等级	10 选 6+1 (6+1/10)		
	基本号码	特别号码	说明
一等奖	abcdef	g	选 7 中 (6+1)
二等奖	abcdef		选 7 中 (6)
三等奖	abcdeX Xbcdef		选 7 中 (5)
四等奖	abcdXX XbcdeX XXcdef		选 7 中 (4)
五等奖	abcXXX XbcdXX XXcdeX XXXdef		选 7 中 (3)
六等奖	abXXXX XbcXXX XXcdXX XXXdeX XXXXef		选 7 中 (2)

“乐透型”有多种不同的形式，比如“33 选 7”的方案：先从 01-33 个号码球中一个一个地摇出 7 个基本号，再从剩余的 26 个号码球中摇出一个特别号码。投注者从 01-33 个号码中任选 7 个组成一注（不可重复），根据单注号码与中奖号码相符的个数多少确定相应的中奖等级，不考虑号码顺序。又如“36 选 6+1”的方案，先从 01-36 个号码球中一个一个地摇出 6 个基本号，再从剩下的 30 个号码球中摇出一个特别号码。从 01-36 个号码中任选 7 个组成一注（不可重复），根据单注号码与中奖号码相符的个数多少确定相应的中奖等级，不考虑号码顺序。这两种方案的中奖等级如表 5.1。

表 4: “乐透型”彩票

中奖等级	33 选 7 (7/33)			36 选 6+1 (6+1/36)		
	基本号码	特别号码	说明	基本号码	特别号码	说明
一等奖	•••••••		选 7 中 (7)	••••••	★	选 7 中 (6+1)
二等奖	••••••○	★	选 7 中 (6+1)	••••••		选 7 中 (6)
三等奖	••••••○		选 7 中 (6)	•••••○		选 7 中 (5+1)
四等奖	•••••○○	★	选 7 中 (5+1)	•••••○		选 7 中 (5)
五等奖	•••••○○		选 7 中 (5)	••••○○	★	选 7 中 (4+1)
六等奖	••••○○○	★	选 7 中 (4+1)	••••○○		选 7 中 (4)
七等奖	••••○○○		选 7 中 (4)	•••○○○	★	选 7 中 (3+1)

注: • 为选中的基本号码; ★ 为选中的特别号码; ○ 为未选中的号码。

以上两种类型的总奖金比例一般为销售总额的 50%, 投注者单注金额为 2 元, 单注若已得到高级别的奖就不再兼得低级别的奖。一、二、三等奖为高项奖, 后面的为低项奖。低项奖数额固定, 高项奖按比例分配, 但一等奖单注保底金额 60 万元, 封顶金额 500 万元, 各高项奖额的计算方法为:

$$[(\text{当期销售总额} \times \text{总奖金比例}) - \text{低项奖总额}] \times \text{单项奖比例}$$

问题:

- (1) 根据这些方案的具体情况, 综合分析各种奖项出现的可能性、奖项和奖金额的设置以及对彩民的吸引力等因素评价各方案的合理性。
- (2) 设计一种“更好”的方案及相应的算法, 并据此给彩票管理部门提出建议。
- (3) 给报纸写一篇短文, 供彩民参考。

## 5.2 模型假设

1. 摇奖公正 (各号码出现概率相等)
2. 彩民购买彩票是独立事件
3. 不重复考虑低项奖
4. 高级别奖金严格高于低级别奖金



5.3 符号说明

注：红色部分是在建模过程中额外加入的

符号	符号意义
$i$	中奖等级, $i = 1, 2, \cdots, 7$ ( $i$ 具体取值范围与彩票规则有关的)
$x_i$	第 $i$ 等奖奖金金额
$p_i$	中第 $i$ 等奖的概率
$r_i$	高项奖中第 $i$ 等奖奖金比例
$\mu(x_i)$	彩民对第 $i$ 等奖满意度
$\lambda$	实力因子（考虑彩民经济情况）
$F$	综合性指标函数
$s_0$	城市年平均收入
$T$	平均工作年限

5.4 模型预备（计算每种摇奖方式中奖概率）

以传统型彩票为例。

数字由来说明： $10 = C_1 0^1 \quad 9 = C_9^1$

$$p_1 = \frac{1}{5 \times 10^6}$$

考虑 X 的取法，不重复计数

$$p_3 = \frac{\overbrace{2 \times 9}}{10^6}$$

$$p_5 = \frac{\overbrace{9 \times 10 \times 10 \times 2}^{1, 4} + \overbrace{9 \times 9 \times 10 \times 2}^{2, 3}}{10^6}$$

$$p_2 = \frac{1}{10^6} - \frac{1}{5 \times 10^6} = \frac{4}{5 \times 10^6} \rightarrow \text{不重复考虑}$$

$$p_4 = \frac{\overbrace{9 \times 10}^{abcdXX} + \overbrace{9 \times 9}^{XbcdeX} + \overbrace{10 \times 9}^{XXcdef}}{10^6}$$

$$p_6 = \frac{\overbrace{9 \times (10^3 - 1) \times 2}^{1, 5} + \overbrace{9 \times 9 \times (10^2 - 1) \times 2}^{2, 4, \text{排除重复的六等奖}}}{10^6}$$

总中奖率 = 0.03772

计算时务必仔细

5.5 模型建立

1. 对各方案综合性分析

I. 构造判别函数——需要查阅相关资料

$$F = \sum_{i=1}^7 p_i \mu x_i \quad \text{可以在分析中加入查阅文献获知的彩民心理因素}$$

II.  $\mu(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, \lambda > 0$ , 彩民收入影响投入计算  $\lambda$ : 若城市年平均收入  $s_0$  已知, 则  $\mu(s_0 T) = 0.5$ 。

III.  $x_i (i = 4, 5, 6, 7)$  固定, 计算  $x_1, x_2, x_3$ : 设卖出  $N$  注彩票, 奖金总额为  $2N \times 50\% = N$ , 则

$$\begin{aligned} j \text{ 等奖奖金总额} &= N p_j x_j = \left( N - \sum_{i=4}^7 p_i x_i \right) r_j \\ \Rightarrow x_j &= \frac{(1 - \sum_{i=4}^7 p_i x_i) r_j}{p_j} \end{aligned}$$

2. 综上所述:

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^7 p_i \mu x_i \\ x_j &= \frac{(1 - \sum_{i=4}^7 p_i x_i) r_j}{p_j} \\ \mu(x_i) &= 1 - e^{-\frac{x_i}{\lambda}}, \lambda > 0, i = 1, 2, \dots, 7 \\ &\quad (\text{针对一个城市, } \lambda \text{ 一定}) \end{aligned}$$

【开放性较强, 只要建模有合理性并能自圆其说即可】

3. 设计更好的方案 ( $n$  选  $m$ ) ( $n > m$ )

$r_j$ :  $j = 1, 2, 3$  为高项奖

$x_j$ : 第  $j$  等奖奖金金额 ( $j = 1, 2, \dots, 7$ )

I. 计算  $p_i$ , (与  $n, m$  相关)

II. 计算  $x_j = \frac{(1 - \sum_{i=4}^7 p_i x_i) r_j}{p_j}, j = 1, 2, 3$   
待定参数:  $n, m, r_j, x_i (i = 4, 5, 6, 7)$

III. 求上述参数, 使得  $F = \sum_{i=1}^7 p_i \mu x_i$  最大  
约束条件:

$$\textcircled{1} x_j = \frac{(1 - \sum_{i=4}^7 p_i x_i) r_j}{p_j}, j = 1, 2, 4$$

$$\textcircled{2} \mu(x_i) = 1 - e^{-\frac{x_i}{\lambda}}, \lambda > 0, i = 1, 2, \dots, 7$$

$$\textcircled{3} r_1 + r_2 + r_3 = 1$$

$$\textcircled{4} 0.5 \leq r_j \leq 0.8$$

$$\textcircled{5} \quad 6 \times 10^5 \leq x_1 \leq 5 \times 10^6$$

$$\textcircled{6} \quad p_i < p_{i+1}$$

$$\textcircled{7} \quad a_i < \frac{x_i}{x_{i+1}} < b_i, i = 1, 2, \dots, 7 \longrightarrow a_i, b_i \text{ 具体数值由给定数据计算}$$

$$\textcircled{8} \quad 5 \leq m \leq 7, 29 \leq n \leq 60 \text{ (具体参数可自设)}$$

$$\textcircled{9} \quad r_j > 0, x_i \geq 0, n, m \in \mathbf{Z}^*$$

模型的求解为非线性规划问题。

## 6 数学规划模型

### 6.1 引言

#### 6.1.1 多元函数求条件极值

$$\begin{aligned} \max \quad & z = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

称  $x$  为决策变量,  $f(x)$  为目标函数,  $g_i \leq 0$  为约束条件。

#### 6.1.2 数学规划模型

如何分配有限资源, 从而达到人们所期望的最优化目标。

#### 6.1.3 应用

- 合理的组合投资
- 机械制造

#### 6.1.4 赛题

- 2002 年 A 题: 车灯线光源的设计。
- 2002 年 B 题: 彩票中的数学。
- 2005 年 B 题: DVD 的在线租赁。

### 6.1.5 建立模型的三要素

#### (1) 决策变量和参数

- 决策变量—从模型中寻找
- 参数—确定的或者随机的

#### (2) 约束条件

- 由客观的物质条件限制

#### (3) 目标函数（模型中的追求目标）

### 6.1.6 模型的分类

1. 线性规划问题（目标函数与约束条件全都是线性函数）
2. 整数线性规划问题与 0-1 线性规划问题
3. 非线性规划问题

### 6.1.7 可行解、最优解、次优解以及可行集

概念	说明
可行解	满足约束条件的解
最优解	取得目标函数最优时的可行解
次优解	比较满意的可行解
可行集	所有可行解的几何。

表 5: 概念说明

## 6.2 线性规划

### 例 6.1

某工厂，每日生产 8 小时，产量不低于 1800 件/天，但是质量参差不齐。为把控产品质量，需聘请多名质检员。

一级质检员：25 件/时，正确率为 98%，工资为 4 元/时。

二级质检员：15 件/时，正确率为 95%，工资为 3 元/时。

而质检员出错一件，工厂损失 2 元。

问题，当使质检费最少，应聘请多少一级质检员与二级质检员。

解：

设聘请  $x_1$  名一级质检员与  $x_2$  名二级质检员。

$$z = 8 * 4x_1 + 8 * 3x_2 + 2(8 * 25 * 2\%x_1 + 8 * 15 * 5\%x_2)$$

化简可以得出如下的形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 40x_1 + 36x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 8 * 25 * x_1 + 8 * 15 * x_2 \geq 1800 \\ 8 * 25 * x_1 \leq 1800 \\ 8 * 15 * x_2 \leq 1800 \end{cases} \end{aligned}$$

### 例 6.2

Chebyshev 近似：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots m)$$

其中  $m \gg n$ ，求状态方程组的近似解，使误差尽量地小。

解：

设  $\varepsilon_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots a_{in}x_n$ ，令  $\mu = \max \{|\varepsilon_i|, i = 1, 2, \cdots, n\}$   
问题转化为求  $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$  使得  $\mu$  尽可能地小。

为转换为线性规划问题, 设  $x_0 = \mu$ , 于是有

$$\begin{array}{ll} \min & x_0 \\ s.t. & \begin{cases} x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \geq b_i \\ x_0 - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots a_{in}x_n \geq -b_i \\ x_0 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

### 6.3 求解方法

1. 1939 年, 苏联康托洛维奇“乘数法”
2. 1947 年, 美国丹齐克提出单纯形法
3. 1958 年, GoMory 提出求解整数规划的割平面方法
4. 1962 年, 苏联学者提出的多项式算法

### 6.4 非线性规划

- 多项式算法
- NP-hard(MP)

## 7 2011 年 B 题

### 7.1 题目及其附件

#### 2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目

(请先阅读“全国大学生数学建模竞赛论文格式规范”)

#### B 题 交巡警服务平台的设置与调度

“有困难找警察”，是家喻户晓的一句流行语。警察肩负着刑事执法、治安管理、交通管理、服务群众四大职能。为了更有效地贯彻实施这些职能，需要在市区的一些交通要道和重要部位设置交巡警服务平台。每个交巡警服务平台的职能和警力配备基本相同。由于警务资源是有限的，如何根据城市的实际情况与需求合理地设置交巡警服务平台、分配各平台的管辖范围、调度警务资源是警务部门面临的一个实际课题。

试就某市设置交巡警服务平台的相关情况，建立数学模型分析研究下面的问题：

(1) 附件 1 中的附图 1 给出了该市中心城区 A 的交通网络和现有的 20 个交巡警服务平台的设置情况示意图，相关的数据信息见附件 2。请为各交巡警服务平台分配管辖范围，使其在所管辖的范围内出现突发事件时，尽量能在 3 分钟内到达事发地。

对于重大突发事件，需要调度全区 20 个交巡警服务平台的警力资源，对进出该区的 13 条交通要道实现快速全封锁。实际中一个平台的警力最多封锁一个路口，请给出该区交巡警服务平台警力合理的调度方案。

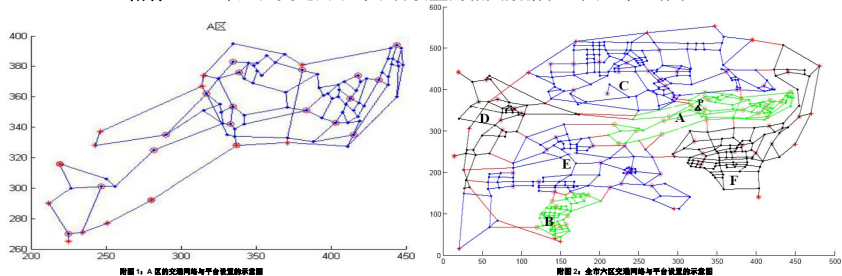
根据现有交巡警服务平台的工作量不均衡和有些地方出警时间过长的实际情况，拟在该区内再增加 2 至 5 个平台，请确定需要增加平台的具体个数和位置。

(2) 针对全市（主城六区 A, B, C, D, E, F）的具体情况，按照设置交巡警服务平台的原则和任务，分析研究该市现有交巡警服务平台设置方案（参见附件）的合理性。如果有明显不合理，请给出解决方案。

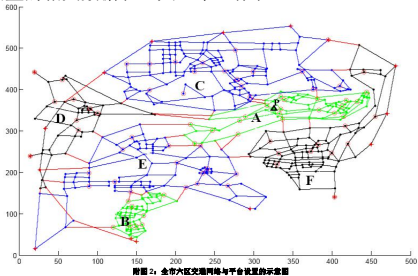
如果该市地点 P（第 32 个节点）处发生了重大刑事案件，在案发 3 分钟后接到报警，犯罪嫌疑人已驾车逃跑。为了快速搜捕嫌疑犯，请给出调度全市交巡警服务平台警力资源的最佳围堵方案。

**附件 1：** A 区和全市六区交通网络与平台设置的示意图。

**附件 2：** 全市六区交通网络与平台设置的相关数据表（共 5 个工作表）。



附图 1: A 区的交通网络与平台设置的示意图



附图 2: 全市六区交通网络与平台设置的示意图

## 7.2 合理分配 A 区 20 个平台管辖范围

### 7.2.1 建立 A 地区交通网络的赋权图

符号	说明
$x_i$	第 $i$ 个路口, $(i = 1, 2, \dots, m)$
$y_j$	第 $j$ 个服务平台, $(j = 1, 2, \dots, n)$
$L_{ij}$	路口 $i, j$ 的连接矩阵
$A_{ij}$	路口间的最短路径矩阵, 通过 <i>Floyd</i> 计算。
$B_{m \times n} = b_{ij}$	$x_i$ 到 $y_j$ 的最短路径

### 7.2.2 设置决策变量

$$X = (x_{ij})_{m \times n}, \quad \text{where } x_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ 地方出事, } j \text{ 出警} \\ 0, & i \text{ 地方出事, } j \text{ 不出警} \end{cases}$$

### 7.2.3 计算出警时间

$$T = (T_{ij})_{m \times n} \quad (1)$$

$$T_{ij} = b_{ij}x_{ij} \quad (2)$$

### 7.2.4 每个警务平台的工作量

记  $G = (g_1, \dots, g_n)$ , 其中  $g_j$  为  $y_j$  的工作量,  $w_i$  为  $x_i$  的案发量。

$$G_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}\omega_j$$

使用矩阵表示:

$$G = WX \quad \text{where } W = (w_1, \dots, w_m)$$

若记  $\bar{G}$  为平均工作量, 则有

$$\sigma(G) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (G_j - \bar{G})^2}$$



### 7.2.5 模型的建立

目标函数

$$\min \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} T_{ij}$$

$$\min_X \sigma(G)$$

约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (i = 1, 2, \dots, m), & \text{每个路口只有一个平台管理, 否则工作重复。} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq 1, (j = 1, 2, \dots, n), & \text{每个平台至少管理一个路口。} \\ x_{ij} = 0 \text{ or } 1, & \text{当 } i=j \text{ 时, } x_{ij} = 1 \end{cases}$$

### 7.2.6 模型的求解

查询 MATLAB 的优化工具箱, 或者使用启发式算法, 如蚁群算法, 模拟退火算法, 遗传算法等。

此题为双目标优化, 为简化复杂度, 可以采用就近原则, 削弱目标函数。

## 7.3 调动 20 个平台封锁 13 个街道

$D = (d_{ij})_{20 \times 13}$ , 表示 A 区  $y_i$  平台到达路口  $x_j$  的最短路径。

### 7.3.1 设置决策变量

$$X = (x_{ij})_{20 \times 13}, \quad \text{where } x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{平台 } y_i \text{ 对路口 } x_j \text{ 进行封锁} \\ 0, & \text{不进行封锁} \end{cases}$$

计算封锁时间

$$\begin{cases} T = (T_{ij})_{20 \times 13} \\ T_{ij} = d_{ij} x_{ij} \end{cases}$$

### 7.3.2 建立数学模型

目标函数

$$\min_X \max_{\substack{1 \leq i \leq 20 \\ 1 \leq j \leq 13}} T_{ij}$$

约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{13} x_{ij} \leq 1, & (j = 1, 2, \dots, 20) \\ \sum_{i=1}^{20} x_{ij} = 1, & (i = 1, 2, \dots, 13) \\ x_{ij} = 0 \text{ or } 1, & (i=j \text{ 时}, x_{ij} = 1) \end{cases}$$

### 7.4 确定拟增设平台的个数和数目

通过一个一个加来考虑问题。

#### 7.4.1 符号说明

符号	说明
$t_0$	增设平台前的最大出警时间
$t_1$	增设平台后的最大出警时间
$\sigma_0$	增设平台前的工作量的标准差
$\sigma_1$	增设平台后的工作量的标准差
$x_{n+1}, \dots, x_m$	未设置平台的路口

#### 7.4.2 设置决策变量

$$r_j, (j = 1, \dots, m - n), \quad \text{where } r_j = \begin{cases} 1, & \text{在路口 } x_{n+j} \text{ 设置平台。} \\ 0, & \text{不增设平台。} \end{cases}$$

#### 7.4.3 计算设置平台的效益

$$F = \rho \frac{t_0 - t_1}{t_0} + (1 - \rho) \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0}$$

#### 7.4.4 模型的建立

目标函数

$$\max_{r_j, (j=1, \dots, m-n)} F$$

约束条件

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m-n} r_i = 1 \\ r_i = 0 \text{ or } 1 \end{cases}$$

#### 7.5 全市 6 个区警务平台的设计合理性评价

如果跨区出警, 可将全市看做整体, 判断全市警务平台的合理性, 从而进行评价

如果不跨区出警, 分别判断各区警务平台的合理性, 从而进行评价。

#### 7.6 最佳围追堵截方案

##### 7.6.1 符号说明

符号	说明
$D_i, (i = 1, \dots, m)$	事发地点的平台到路口 $x_i$ 的最短用时。
$F(t)$	$\{x_i; D_i \leq t, i = 1, \dots, m\}$
$E(t)$	$\{F(t)\}$
$N(t)$	$\{y_j, x_j \notin F(t), j = 1, \dots, n\}$
$N(E(t)) = P$	$E(t)$ 的节点数目

##### 7.6.2 设置决策变量

$$X = (x_{ij})_{P \times n} x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{平台 } y_j \text{ 对路口 } x_i \text{ 进行封锁} \\ 0, & \text{反之} \end{cases}$$

### 7.6.3 建立优化模型

目标函数

$$\min_X N(F(t))$$

$$\min_X \max_{\substack{1 \leq i \leq P \\ 1 \leq j \leq n}} x_{ij} b_{ij}$$

约束条件

$$\begin{cases} F(t) \text{ and } E(T) \\ x_{ij} b_{ij} \leq D_i - 3 \quad \text{接到报警有延迟} \\ P = N(E(t)) \\ \sum_{i=1}^P x_{ij} \leq 1, \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \end{cases}$$

### 7.6.4 模型的求解

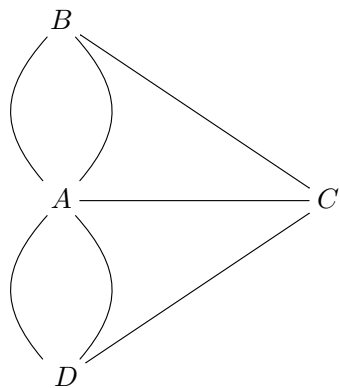
采用启发式算法，如神经网络式算法。

## 8 图论与网络优化

### 8.1 图论的发展历史

#### 8.1.1 七桥问题

欧拉（图论之父）。



### 8.1.2 中国邮递员问题

邮递员每天从邮局出发，走遍该地区所有街道再返回邮局，问题是他应如何安排送信的路线可以使所走的总路程最短。

### 8.1.3 四色问题

NP-Hard.

## 8.2 图的基本概念

### 8.2.1 图的定义

图是一个三元组

$$G = \{V(G), E(G), \Psi(G)\}$$

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$\begin{cases} \Psi_G(e_1) = v_1v_2 \\ \Psi_G(e_2) = v_2v_3 \\ \dots \end{cases}$$

### 8.2.2 有向图与无向图

无向图：连接的边没有标注方向。

有向图：连接的边标注了方向。赋权图：图中两点不仅关联，而且还标上了数量关系

### 8.2.3 阶与度

阶：图中顶点的数目。

度：与顶点的关联的边数。

### 8.2.4 完全图

在无向图中，任意两个顶点都存在着一边。

在有向图中，任意两个顶点都至少存在方向相反的两条边。

### 8.2.5 子图

如果

$$V(H) \subseteq V(G)$$

$$E(H) \subseteq E(G)$$

称  $H$  是  $G$  的子图。

### 8.2.6 道路与回路

$$G = \{V(G), E(G)\}$$

$$e_i \in E(G), \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$\Psi_G(e_i) = v_{i-1}v_i, \quad v_i \in V(G)$$

$$W = v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_kv_k$$

称  $W$  为一条道路。如果起点与终点重合，则称为回路。各边相异的道路称为行迹。各顶点相异的道路称为轨道。起点与终点重合的轨道称为圈。

欧拉道路：经过图中的每条边一次（仅），行遍所有的顶点的道路。相应地有欧拉回路：

哈密顿道路：经过图中的所有顶点一次（仅），行遍所有的边的道路。相应地有哈密顿回路。

### 8.2.7 图的矩阵表示

关联矩阵

$$M(G) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots \\ m_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

其中  $m_{ij}$  表示  $v_i$  与  $e_j$  的关系。

邻接矩阵表示法

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots \\ m_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

其中  $m_{ij}$  表示  $v_i$  与  $v_j$  的关系，取值为 0 或 1。

## 8.3 基本模型

### 8.3.1 最短路径模型

I 求图中某一点到其他店的最短路径。Dijkstra 标记算法。

II 任意两点之间的最短路径。Floyd 算法。

### 8.3.2 中国邮递员问题

又被称为寻找欧拉回路的问题。

从邮局出发，走遍邮区的所有道路至少一次，再回到邮局，怎么走最短。  
Fleury 算法。

### 8.3.3 旅行商

TSP 问题 (Traveling Salesman Problem): 一个旅行商人要拜访  $n$  个城市，他必须选择所要走的路径，路径的限制是每个城市只能拜访一次，而且最后要回到原来出发的城市。

又被称为寻找哈密顿圈的问题。

首先构造初始解，再使用改进算法进行改进。

构造算法: Christofides 算法，对角线完全算法

改进算法: 二次逐次修正法，Feiring 矩阵逐次改进法。

## 9 灾情巡视路线

### 9.1 题目

#### 全国大学生数学建模竞赛

##### 1998 年赛题

##### A 题 投资的收益和风险

市场上有  $n$  种资产（如股票、债券、…） $S_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 供投资者选择，某公司有数额为  $M$  的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资。公司财务分析人员对这  $n$  种资产进行了评估，估算出在这一时期内购买  $S_i$  的平均收益率为  $r_i$ ，并预测出购买  $S_i$  的风险损失率为  $q_i$ 。考虑到投资越分散，总的风险越小，公司确定，当用这笔资金购买若干种资产时，总体风险可用所投资的  $S_i$  中最大的一个风险来度量。

购买  $S_i$  要付交易费，费率为  $p_i$ ，并且当购买额不超过给定值  $u_i$  时，交易费按购买  $u_i$  计算（不买当然无须付费）。另外，假定同期银行存款利率是  $r_0$ ，且既无交易费又无风险。（ $r_0=5\%$ ）

1) 已知  $n=4$  时的相关数据如下：

$S_i$	$r_i$ (%)	$q_i$ (%)	$p_i$ (%)	$u_i$ (元)
$S_1$	28	2.5	1	103
$S_2$	21	1.5	2	198
$S_3$	23	5.5	4.5	52
$S_4$	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定的资金  $M$ ，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，而总体风险尽可能小。

2) 试就一般情况对以上问题进行讨论，并利用以下数据进行计算。

$S_i$	$r_i$ (%)	$q_i$ (%)	$p_i$ (%)	$u_i$ (元)
$S_1$	9.6	42	2.1	181
$S_2$	18.5	54	3.2	407
$S_3$	49.4	60	6.0	428
$S_4$	23.9	42	1.5	549
$S_5$	8.1	1.2	7.6	270
$S_6$	14	39	3.4	397
$S_7$	40.7	68	5.6	178
$S_8$	31.2	33.4	3.1	220
$S_9$	33.6	53.3	2.7	475
$S_{10}$	36.8	40	2.9	248
$S_{11}$	11.8	31	5.1	195
$S_{12}$	9	5.5	5.7	320
$S_{13}$	35	46	2.7	267
$S_{14}$	9.4	5.3	4.5	328
$S_{15}$	15	23	7.6	131

（浙江大学陈叔平提供）

##### B 题 灾情巡视路线

下图为某县的乡（镇）、村公路网示意图，公路边的数字为该路段的公里数。

今年夏天该县遭受水灾。为考察灾情、组织自救，县领导决定，带领有关部门负责人到全县各乡（镇）、村巡视。巡视路线指从县政府所在地出发，走遍各乡（镇）、村，又回到县政府所在地的路线。

1. 若分三组（路）巡视，试设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线。
2. 假定巡视人员在各乡（镇）停留时间  $T=2$  小时，在各村停留时间  $t=1$  小时，汽车行驶速度  $V=35$  公里/小时。要在 24 小时内完成巡视，至少应分几组；给出这种分组下你认为最佳的巡视路线。

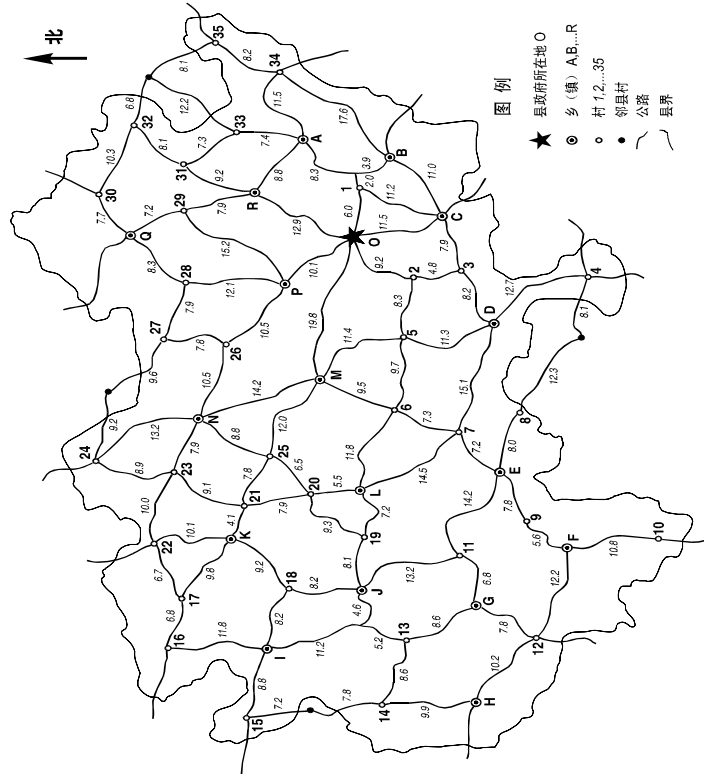


## 9 灾情巡视路线

- 在上述关于  $T$ ,  $t$  和  $V$  的假定下, 如果巡视人员足够多, 完成巡视的最短时间是多少; 给出在这种最短时间完成巡视的要求下, 你认为最佳的巡视路线。
- 若巡视组数已定 (比如三组), 要求尽快完成巡视, 讨论  $T$ ,  $t$  和  $V$  改变对最佳巡视路线的影响。

(上海海运学院丁颂康提供)

注 优秀论文及评阅人文章刊登在《数学的实践与认识》1999 年第 1 期上。



## 9.2 模型的建立与分析

把县、乡、村看作点，乡与村之间的公路看作边，距离看作对应边上的权。问题就转化为在加权有向图从给定点  $O$  出发，历经所有的顶点，使权值最短的问题。算法（求图  $G$  的最佳经销商回路）

1. 用 Dijkstra 算法求出图  $G$  中任意两顶点之间的最短路，构造完备图  $G' = (V, E')$ 。
2. 用对角线完全算法产生一个初始  $H$  圈。
3. 随机输入  $G'$  一个  $H$  圈。
4. 对第 2、3、4 步所得到的每个  $H$  圈，用改良圈法求一个近似最佳  $H$  圈。
5. 取第五步求出所有  $H$  圈中，权和最小者。

## 9.3 问题

(1) 若分三组（路）巡视，试设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线。

$$\text{顶点 } O \in G(V_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\bigcup_{i=1}^n V_i = V(G),$$

$$\frac{\max_{i,j} \omega(C_i) - \omega(C_j)}{\max_i \omega(C_i)} \leq a,$$

$$\sum_{i=1}^n \omega(C_i) = \min$$

(2) 假定巡视人员在各乡（镇）停留时间  $T=2$  小时，在各村停留时间  $t=1$  小时，汽车行驶速度  $V=35$  公里/小时。要在 24 小时内完成巡视，至少应分几组；给出这种分组下你认为最佳的巡视路线。

设分组数为  $n$ ,  $n > \frac{17*2+35}{24}$ 。通过计算发现当  $n=3$  时，时间啊方便不满足，所以采用  $n=4$ ，具体路线需要通过计算得到。

(3) 在上述关于  $T$ ,  $t$  和  $V$  的假定下，如果巡视人员足够多，完成巡视的最短时间是多少；给出在这种最短时间完成巡视的要求下，你认为最佳的巡视路线。

## 9 灾情巡视路线

- (1) 每个巡视组总时间不超过 6.43 小时。
- (2) 所有点必须访问到，不得遗漏。
- (3) 巡视组要尽量少。