

1998 年赛题

A 题 投资的收益和风险

市场上有 n 种资产（如股票、债券、 \cdots ） S_i ($i=1,\dots,n$) 供投资者选择，某公司有数额为 M 的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资。公司财务分析人员对这 n 种资产进行了评估，估算出在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i ，并预测出购买 S_i 的风险损失率为 q_i 。考虑到投资越分散，总的风险越小，公司确定，当用这笔资金购买若干种资产时，总体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量。

购买 S_i 要付交易费，费率为 p_i ，并且当购买额不超过给定值 u_i 时，交易费按购买 u_i 计算（不买当然无须付费）。另外，假定同期银行存款利率是 r_0 ，且既无交易费又无风险。（ $r_0=5\%$ ）

1) 已知 $n=4$ 时的相关数据如下：

S_i	r_i (%)	q_i (%)	p_i (%)	u_i (元)
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定的资金 M ，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，而总体风险尽可能小。

2) 试就一般情况对以上问题进行讨论，并利用以下数据进行计算。

S_i	r_i (%)	q_i (%)	p_i (%)	u_i (元)
S_1	9.6	42	2.1	181
S_2	18.5	54	3.2	407
S_3	49.4	60	6.0	428
S_4	23.9	42	1.5	549
S_5	8.1	1.2	7.6	270
S_6	14	39	3.4	397
S_7	40.7	68	5.6	178
S_8	31.2	33.4	3.1	220
S_9	33.6	53.3	2.7	475
S_{10}	36.8	40	2.9	248
S_{11}	11.8	31	5.1	195
S_{12}	9	5.5	5.7	320
S_{13}	35	46	2.7	267
S_{14}	9.4	5.3	4.5	328
S_{15}	15	23	7.6	131

（浙江大学陈叔平提供）

B 题 灾情巡视路线

下图为某县的乡（镇）、村公路网示意图，公路边的数字为该路段的公里数。

今年夏天该县遭受水灾。为考察灾情、组织自救，县领导决定，带领有关部门负责人到全县各乡（镇）、村巡视。巡视路线指从县政府所在地出发，走遍各乡（镇）、村，又回到县政府所在地的路线。

1. 若分三组（路）巡视，试设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线。
2. 假定巡视人员在各乡（镇）停留时间 $T=2$ 小时，在各村停留时间 $t=1$ 小时，汽车行驶速度 $V=35$ 公里/小时。要在 24 小时内完成巡视，至少应分几组；给出这种分组下你认为最佳的巡视路线。

- 在上述关于 T , t 和 V 的假定下, 如果巡视人员足够多, 完成巡视的最短时间是多少; 给出在这种最短时间完成巡视的要求下, 你认为最佳的巡视路线。
- 若巡视组数已定 (比如三组), 要求尽快完成巡视, 讨论 T , t 和 V 改变对最佳巡视路线的影响。

(上海海运学院丁颂康提供)

注 优秀论文及评阅人文章刊登在《数学的实践与认识》1999 年第 1 期上。

