به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۳

دستگاه مختصات، فضای برداری و زیرفضاها | **تمرین تئوری چهارم** | تاریخ انتشار: ۱ مهر ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۴ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

پرسش ۱ (۱۵ نمره) فرض کنید $T: V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد. همچنین فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی است و $dim(V) = n$. اگر $w_1, \dots w_m \in W$ یک پایه برای $im(T)$ باشد و $v_1, \dots v_m \in V$ به طوری که $T(v_i) = w_i$، نشان دهید برای $i = 1, \dots, m$ داریم:

$$V = span\{v_1, \dots, v_m\} \oplus ker(T)$$

پاسخ

قرار دهید $v \in V$، آنگاه $T(V) \in Im(v)$. از آنجایی که $w_1, w_2, \dots w_n$ تشکیل یک پایه برای $im(T)$ می‌دهند، $\alpha_1, \dots \alpha_m \in \mathbb{F}$ وجود دارند به طوری که:

$$T(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m$$

از آنجایی که $T(v_i) = w_i$

$$\begin{gathered} T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_m T(v_m) \\ T(v) - \alpha_1 T(v_1) - \cdots - \alpha_m T(v_m) = 0_W \\ T(v - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_m v_m) = 0_W \\ \Longrightarrow v - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_m v_m \in ker(T) \end{gathered}$$

این مطلب بیان می‌کند که $\mathbf{v} - \alpha_1\mathbf{v}_1 - \cdots - \alpha_m\mathbf{v}_m \in \ker(T)$ است. بنابراین، برای هر $\mathbf{v} \in V$، می‌توان نوشت

$$\mathbf{v} = (\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m) + (\mathbf{v} - \alpha_1\mathbf{v}_1 - \cdots - \alpha_m\mathbf{v}_m) \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} + \ker(T),$$

که به این معنی است که

$$V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} + \ker(T).$$

اکنون نشان خواهیم داد که این جمع در واقع یک جمع مستقیم است. فرض کنید $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ یک پایه برای $\ker(T)$ باشند که در آن $k = \operatorname{nullity}(T)$ است. ادعا می‌کنیم که $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ مستقل خطی است و

$$\begin{gathered} V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} + \ker(T) = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} + \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} = \\ \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \oplus \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \oplus \ker(T). \end{gathered}$$

فرض کنید مقادیر $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_k \in F$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m + \mu_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \mu_k\mathbf{u}_k = 0_V. \tag{*}$$

در این صورت، اعمال T به هر دو طرف معادله می‌دهد

$$\lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + \lambda_m T(\mathbf{v}_m) + \mu_1 T(\mathbf{u}_1) + \cdots + \mu_k T(\mathbf{u}_k) = 0_W.$$

حال، از آنجا که $T(\mathbf{u}_i) = 0_W$ برای همه‌ی $i = 1, \dots, k$ و $T(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$ برای همه‌ی $j = 1, \dots, m$ داریم

$$\lambda_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{w}_m = 0_W.$$

از آنجا که $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ مستقل خطی هستند، نتیجه می‌گیریم که

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

بنابراین داریم

$$\mu_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \mu_k\mathbf{u}_k = 0_V$$

اما چون $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ نیز مستقل خطی هستند، نتیجه می‌گیریم که

$$\mu_1 = \cdots = \mu_k = 0.$$

پرسش ۲ (۱۷ نمره) فرض کنید U, W, V فضاهای برداری با ابعاد متناهی روی F باشند. همچنین فرض کنید که $\alpha, \beta \in F$ باشند.

(الف) فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد. نشان دهید:

$$\operatorname{rank}(T) \leq \dim(V)$$

(ب) فرض کنید $S : U \to V$ و $T : V \to W$ تبدیل‌های خطی باشند. نشان دهید:

$$\mathrm{rank}(T \circ S) \leq \mathrm{rank}(T)$$

و

$$\mathrm{rank}(T \circ S) \leq \mathrm{rank}(S)$$

پاسخ

(آ) فرض کنید $\dim(V) = n$ و $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rank}(T) > n$. در این صورت، باید حداقل $n + ۱$ بردار $\mathbf{w}_۱, \ldots, \mathbf{w}_{n+۱} \in \mathrm{Im}(T)$ وجود داشته باشد که مستقل خطی باشند (برای مثال، اولین $n + ۱$ بردار در یک پایه از $\mathrm{Im}(T)$ را انتخاب می‌کنیم). از آنجا که $\mathbf{w}_۱, \ldots, \mathbf{w}_{n+۱}$ در $\mathrm{Im}(T)$ قرار دارند، بردارهایی $\mathbf{v}_۱, \ldots, \mathbf{v}_{n+۱} \in V$ وجود دارند به‌طوری که $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ برای $i = ۱, \ldots, n + ۱$. از آنجا که $\dim(V) = n$، بردارهای $\mathbf{v}_۱, \ldots, \mathbf{v}_{n+۱}$ باید وابسته خطی باشند؛ بنابراین ضرایبی $\alpha_۱, \ldots, \alpha_{n+۱} \in F$، نه همه صفر، وجود دارند به‌طوری که

$$\alpha_۱\mathbf{v}_۱ + \cdots + \alpha_{n+۱}\mathbf{v}_{n+۱} = \mathbf{۰}_V.$$

بنابراین ضرایبی $\alpha_۱, \ldots, \alpha_{n+۱} \in F$، نه همه صفر، داریم به‌طوری که

$$T(\alpha_۱\mathbf{v}_۱ + \cdots + \alpha_{n+۱}\mathbf{v}_{n+۱}) = T(\mathbf{۰}_V),$$

یعنی

$$\alpha_۱T(\mathbf{v}_۱) + \cdots + \alpha_{n+۱}T(\mathbf{v}_{n+۱}) = \mathbf{۰}_W,$$

یعنی

$$\alpha_۱\mathbf{w}_۱ + \cdots + \alpha_{n+۱}\mathbf{w}_{n+۱} = \mathbf{۰}_W,$$

که این به این معنی است که بردارهای $\mathbf{w}_۱, \ldots, \mathbf{w}_{n+۱}$ وابسته خطی هستند — که تناقض است. بنابراین فرض اولیه ما باید نادرست باشد، یعنی باید داشته باشیم $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq n$.

(ب) این نکته ابتدایی از نظریه مجموعه‌ها را به خاطر بیاورید: اگر $A \subseteq B$ باشد، برای هر تابع f داریم $f(A) \subseteq f(B)$. به‌طور خاص، از آنجا که $S(U) \subseteq V$، داریم $T(S(U)) \subseteq T(V)$، یعنی $T \circ S(U) \subseteq T(V)$، یعنی

$$\mathrm{im}(T \circ S) \subseteq \mathrm{im}(T)$$

(به یاد بیاورید که $\mathrm{im}(\varphi)$ فقط یک روش دیگر برای نوشتن $\varphi(V)$ است — هر دو نشان‌دهنده برد φ هستند). اکنون، هر دوی اینها زیرفضاهای W هستند، پس داریم

$$\dim(\mathrm{im}(T \circ S)) \leq \dim(\mathrm{im}(T)),$$

یعنی

$$\mathrm{rank}(T \circ S) \leq \mathrm{rank}(T).$$

برای بخش دوم، تابعی $\varphi : \mathrm{im}(S) \to W$ را به صورت $\varphi(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$ برای همه $\mathbf{v} \in \mathrm{im}(S)$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که φ یک تبدیل خطی است، زیرا برای همه $\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲ \in \mathrm{im}(S)$ و $\alpha, \beta \in F$، داریم $\varphi(\alpha\mathbf{v}_۱ + \beta\mathbf{v}_۲) = T(\alpha\mathbf{v}_۱ + \beta\mathbf{v}_۲) = \alpha T(\mathbf{v}_۱) + \beta T(\mathbf{v}_۲) = \alpha\varphi(\mathbf{v}_۱) + \beta\varphi(\mathbf{v}_۲)$.
بنابراین با اعمال بخش (الف) به φ، داریم

$$\mathrm{rank}(\varphi) \leq \dim(\mathrm{im}(S)) = \mathrm{rank}(S). \tag{۱}$$

اما توجه کنید که $\mathrm{im}(T \circ S) \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$ — زیرا اگر $\mathbf{w} \in \mathrm{im}(T \circ S)$، در این صورت $\mathbf{w} = T(S(\mathbf{u}))$ برای برخی $\mathbf{u} \in U$ و بنابراین $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{v})$ که در آن $\mathbf{v} = S(\mathbf{u}) \in \mathrm{im}(S)$؛ پس $\mathbf{w} \in \mathrm{im}(\varphi)$. بنابراین

$$\dim(\mathrm{im}(T \circ S)) \leq \dim(\mathrm{im}(\varphi)),$$

یعنی

$$\mathrm{rank}(T \circ S) \leq \mathrm{rank}(\varphi). \tag{۲}$$

ترکیب (۱) و (۲) نتیجه می‌دهد

$$\mathrm{rank}(T \circ S) \leq rank(S)$$

پرسش ۳ (۱۶ نمره) فرض کنید V یک فضای برداری میدان F بوده و $T : V \to V$ یک تبدیل خطی باشد، به طوری که در هر پایه B از V ماتریس $[T]_B$ قطری است. ثابت کنید T مضرب همانی است؛ یعنی برای هر $\alpha \in V$ داریم $T(\alpha) = c\alpha$.

پاسخ از آن جا که ابعاد ماتریس متناهی است پس $dim(V)$ نیز متناهی است . فرض کنید $dim(V) = n$ باشد . ابتدا یک پایه دلخواه مانند $B = \{\alpha_۱, \cdots, \alpha_n\}$ از V در نظر بگیرید . ستون j ام $[T]_B$ برابر است با $[T(\alpha_j)]_B$.
چون $[T]_B = C$ ماتریس قطری است فرض کنید به نحو زیر باشد .

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda_۳ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

در نتیجه ستون j ام $[T]_B$ برابر است با $[T(\alpha_j)]_B = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \lambda_j\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ پس $T(\alpha_j) = \lambda_j\alpha_j$ است و چون $1 \leq j \leq n$ دلخواه بود در نتیجه
$T(\alpha_1) = \lambda_1\alpha_1, T(\alpha_2) = \lambda_2\alpha_2, \cdots, T(\alpha_n) = \lambda_n\alpha_n$ می باشد .
اکنون به ازای هر $1 \leq i < j \leq n$ ثابت می کنیم $\lambda_i = \lambda_j$ است . مجموعه ی $B_\prime = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_i + \alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n\}$ را در نظر بگیرید . همه ی $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n$ ثابت مانده اند و فقط به جای α_i $\alpha_i + \alpha_j,$ را قرار دادیم .
ادعا می کنیم B' یک پایه برای V است . چون $dimV = n$ پس کافی است نشان دهیم اعضای B' مستقل خطی اند .
فرض کنید $d_1, \cdots, d_n \in F$ وجود داشته باشند که :

$$d_1\alpha_1 + \cdots + d_{i-1}\alpha_{i-1} + d_i(\alpha_i + \alpha_j) + d_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + d_n\alpha_n = 0 \Rightarrow$$
$$d_1\alpha_1 + \cdots + d_{i-1}\alpha_{i-1} + d_i\alpha_i + \cdots + (d_i + d_j)\alpha_j + \cdots + d_n\alpha_n = 0$$

چون اعضای B مستقل خطی هستند پس : $d_1 = \cdots = d_{j-1} = d_i + d_j = d_{j+1} = \cdots = d_n = 0$
در نتیجه باید داشته باشیم : $d_1 = \cdots = d_n = 0$ پس اعضای B' نیز مستقل خطی هستند .
چون $|B'| = |B| = dimV$ پس B' پایه ای برای V است . اثر T روی عناصر B' را بررسی می کنیم .

$$T(\alpha_1) = \lambda_1\alpha_1, \cdots, T(\alpha_{i-1}) = \lambda_{i-1}\alpha_{i-1}, T(\alpha_i + \alpha_j) = T(\alpha_i) + T(\alpha_j) = \lambda_i\alpha_i + \lambda_j\alpha_j, T(\alpha_{i+1}) = \lambda_{i+1}\alpha_{i+1}, \cdots,$$
$$T(\alpha_n) = \lambda_n\alpha_n$$

پس ماتریس نمایش T در پایه ی B' برابر است با :

$$D = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \lambda_j - \lambda_i & \cdots & \lambda_j & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_n
\end{bmatrix}$$

که در اینجا $D = [T]_{B'}$ است . به عبارت دیگر ستون k ام $[T]_{B'}$ به ازای $k \neq i$ برابر است با : $\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \lambda_k\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ و ستون j ام $[T]_{B'}$ برابر $\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_j - \lambda_i\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ است . از

طرفی طبق فرض سوال $[T]_{B'}$ ماتریس قطری است . پس $\lambda_j - \lambda_i = 0 \rightarrow \lambda_j = \lambda_i$ است .
از آنجا که این حکم را به ازای هر دو $1 \leq i < j \leq n$ دلخواه اثبات کردیم پس $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = c$ است . اکنون به ازای هر $\alpha \in V$ ثابت می کنیم $T(\alpha) = c\alpha$ است .
برای عناصر پایه B داریم : $T(\alpha_1) = c\alpha_1, T(\alpha_2) = c\alpha_2, \cdots, T(\alpha_n) = c\alpha_n$
$\alpha \in V$ دلخواه در نظر بگیرید . B پایه است پس $c_1, c_2, \cdots, c_n$ وجود دارد که : $\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$ باشد . در نتیجه :
$T(\alpha) = T(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} c_iT(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i * c\alpha_i = c(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i) = c\alpha \Rightarrow T(\alpha) = c\alpha$ و نهایتا حکم اثبات می شود .

پرسش ۴ (۱۶ نمره) فرض کنید $A, B \in M_n(R)$ باشد به طوری که $AA^T = I = BB^T$ و همچنین $det(A) + det(B) = 0$ است. نشان دهید ماتریس $A + B$ وارون پذیر نیست.

پاسخ

لم ۱ : هر گاه $X, Y \in M_n(R)$ باشد آن گاه داریم : $det(XY) = det(X)det(Y)$

لم ۲ : هر گاه $X \in M_n(R)$ باشد آن گاه داریم : $det(X^T) = det(X)$

روابط زیر با کمک لم ۱ و لم ۲ حاصل می شود .

$$det(B^T(A + B)A^T) = det(B^TAA^T + B^TBA^T) = det(B^T + A^T) = det(A + B) \Rightarrow$$
$$det(B^T)det(A + B)det(A^T) = det(A + B)$$

فرض خلف کنید $A + B$ وارون پذیر باشد پس $det(A + B) \neq 0$ است .
درنتیجه $det(A^T)det(B^T) = 1$ است پس $det(A)det(B) = 1$ می باشد . (*)
از طرفی داریم :

$$det(AA^T) = det(I) \rightarrow det(A)^2 = 1 \rightarrow det(A) = 1 or - 1$$
$$det(BB^T) = det(I) \rightarrow det(B)^2 = 1 \rightarrow det(B) = 1 or - 1$$

همچنین $det(A) + det(B) = 0$ است پس دو حالت زیر رخ می دهد .
اول این که $det(A) = 1, det(B) = -1$ باشد .
دوم آن که $det(A) = -1, det(B) = 1$ رخ دهد .

در نتیجه در هر صورت $det(A)det(B) = -1$ می شود که با (*) در تناقض است پس فرض خلف باطل و $A + B$ وارون پذیر نیست .

پرسش ۵ (۱۶ نمره) ماتریس $A \in M_n(R)$ است. درایه (i, j) ماتریس A را برابر $\frac{1}{min(i,j)}$ تعریف کنید. مقدار $det(A)$ را بیابید.

پاسخ بنا به تعریف داریم : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ با اعمال سطری ستونی مقدماتی به نحو زیر عمل می کنیم .

-2 برابر سطر دوم را به سطر اول اضافه می کنیم . به ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ می رسیم .

$\frac{-3}{2}$ برابر سطر سوم را به سطر دوم اضافه می کنیم . به ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ می رسیم .

$\vdots$

$\frac{-(i+1)}{i}$ برابر سطر $i + 1$ ام را به سطر i اضافه می کنیم . به ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{i} & -\frac{1}{2i} & -\frac{1}{3i} & \cdots & -\frac{1}{i^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{i} & \frac{1}{i+1} & \cdots & \frac{1}{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{i} & \frac{1}{i+1} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ می رسیم .

نهایتا با جایگذاری $i = n - 1$ به ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{2(n-1)} & -\frac{1}{3(n-1)} & \cdots & -\frac{1}{(n-1)^2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ می رسیم .

این ماتریس را B بنامید . چون اعمال سطری مقدماتی انجام دادیم پس دترمینان ثابت می ماند . یعنی : $det(A) = det(B)$ است .

ماتریس B پایین مثلثی است در نتیجه : $det(A) = det(B) = (-1) * (-\frac{1}{4}) * (-\frac{1}{9}) * \cdots * *(-\frac{1}{(n-1)^2}) * \frac{1}{n} = (-1)^{n-1} * \frac{1}{n} * \frac{1}{((n-1)!)^2}$

پرسش ۶ (۲۰ نمره) V یک فضای برداری با بعد متناهی و $T : V \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی است.

(آ) اگر $V = R(T) + N(T)$، نشان دهید $V = R(T) \oplus N(T)$.

(ب) اگر $R(T) \cap N(T) = \{0\}$، نشان دهید $V = R(T) \oplus N(T)$.

پاسخ

لم۱) اگر U, W زیرفضاهای یک فضای برداری با بعد متناهی باشند، آنگاه $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$

(آ) با توجه به روابط داده شده می توان نشان داد :

$$dim(R(T)) + dim(N(T)) = rankT + nullityT = dim(V) = dim(R(T) + N(T)) =$$
$$dim(R(T)) + dim(N(T)) - dim(R(T) \cap N(T))$$
$$dim(R(T)) + dim(N(T)) = dim(R(T)) + dim(N(T)) - dim(R(T) \cap N(T))$$
$$\Longrightarrow dim(R(T) \cap N(T)) = 0$$
$$\Longrightarrow R(T) \cap N(T) = \{0\}$$
$$\Longrightarrow V = R(T) \oplus N(T)$$

(ب) $dim(R(T))+dim(N(T)) = dim(R(T))+dim(N(T))-dim(R(T)\cap N(T)) = rankT+nullityT-dim(\{0\} = dim(V)$

$$R(T) + N(T) \subseteq V \Longrightarrow R(T) + N(T) = V \Longrightarrow R(T) \oplus N(T) = V$$