

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان
پاییز ۱۴۰۳



فضای ضرب داخلی، نامساوی ها، گرام اشمیت

تمرین تئوری سوم

تاریخ انتشار: ۳ آبان ۱۴۰۳

۱. پرسش های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم سال می توانید از ۴ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین: دانشجویان می توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه ی درس می باشد؛ چرا که هم فکری و کار گروهی می تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. حتما در انتهای پاسخ های ارسالی خود نام افرادی که با آن ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۲۰ نمره) فرض کنید V یک فضای برداری از چند جمله‌ای‌ها با حداکثر درجه n باشد. دو عضو A و B از این فضای برداری را در نظر بگیرید به طوری که

$$A = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{و} \quad B = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

ثابت کنید عملگر

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} \frac{a_i b_j}{i+j+1}$$

یک ضرب داخلی بر روی V است.

پرسش ۲ (۲۰ نمره) می‌دانیم به وسیله الگوریتم Gram-Schmidt می‌توان ماتریس A را به صورت تجزیه $A = QR$ نوشت.

(آ) فرض کنید ماتریس A فول رنک و مربعی باشد. اثبات کنید در این حالت ماتریس R یک ماتریس بالامثلثی و وارون‌پذیر می‌شود.

(ب) برای مثال، ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. تجزیه $A = QR$ را به دست آورده و به وسیله آن پاسخ دستگاه معادلات $Ax = b$ که در آن b برابر با بردار

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

است را به دست آورید.

(ج) در حالت کلی، اثبات کنید رنک ماتریس A برابر با تعداد سطرهاى ناصفر در R است.

(د) Pivot های ماتریس $A^T A$ را به دست آورده و ارتباط آن با درایه های قطر اصلی ماتریس R را توضیح دهید. ادعای خود را اثبات کنید.

پرسش ۳ (۱۵ نمره)

در نظر بگیرید که $u, v \in V$ حالا ثابت کنید که $\langle u, v \rangle = 0$ اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in F$ داشته باشیم: $\|u\| \leq \|u + \alpha v\|$

پرسش ۴ (۱۵ نمره) اگر ماتریس A را بتوان به صورت $R^T R$ نوشت آنگاه نشان دهید که به ازای هر بردار x, y داریم که:

$$|x^T A y|^2 \leq (x^T A x)(y^T A y)$$

پرسش ۵ (۱۵ نمره) اگر $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ، به ازای $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ تعریف می‌کنیم $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$. آیا این تعریف درستی از یک ضرب داخلی در V است؟

پرسش ۶ (۱۵ نمره) فرض کنید N, M زیرفضاهایی از فضای ضرب داخلی باشند. ثابت کنید که:

$$N^\perp \cap M^\perp = (M + N)^\perp$$