

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان
پاییز ۱۴۰۳



تبدیل خطی، تغییر پایه، وارون و دترمینان

تمرین تئوری چهارم

تاریخ انتشار: ۱۵ آبان ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۴ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین: دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۱۵ نمره) فرض کنید $T : V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد. همچنین فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی است و $\dim(V) = n$. اگر $w_1, \dots, w_m \in W$ یک پایه برای $\text{im}(T)$ باشد و $v_1, \dots, v_m \in V$ به طوری که $T(v_i) = w_i$ ، نشان دهید برای $i = 1, \dots, m$ داریم:

$$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} \oplus \ker(T)$$

پاسخ

قرار دهید $v \in V$ ، آنگاه $T(v) \in \text{im}(T)$. از آنجایی که w_1, w_2, \dots, w_m تشکیل یک پایه برای $\text{im}(T)$ می‌دهند، $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ وجود دارند به طوری که:

$$T(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$$

از آنجایی که $T(v_i) = w_i$

$$\begin{aligned} T(v) &= \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_m T(v_m) \\ T(v) - \alpha_1 T(v_1) - \dots - \alpha_m T(v_m) &= \mathbf{0}_W \\ T(v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_m v_m) &= \mathbf{0}_W \\ \implies v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_m v_m &\in \ker(T) \end{aligned}$$

این مطلب بیان می‌کند که $v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_m v_m \in \ker(T)$ است. بنابراین، برای هر $v \in V$ ، می‌توان نوشت

$$v = (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) + (v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_m v_m) \in \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} + \ker(T),$$

که به این معنی است که

$$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} + \ker(T).$$

اکنون نشان خواهیم داد که این جمع در واقع یک جمع مستقیم است. فرض کنید u_1, \dots, u_k یک پایه برای $\ker(T)$ باشند که در آن $k = \text{nullity}(T)$ است. ادعا می‌کنیم که $\{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k\}$ مستقل خطی است و

$$\begin{aligned} V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} + \ker(T) &= \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} + \text{span}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k\} = \\ &= \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} \oplus \text{span}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} \oplus \ker(T). \end{aligned}$$

فرض کنید مقادیر $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_k \in F$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k = \mathbf{0}_V. \quad (*)$$

در این صورت، اعمال T به هر دو طرف معادله می‌دهد

$$\lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_m T(v_m) + \mu_1 T(u_1) + \dots + \mu_k T(u_k) = \mathbf{0}_W.$$

حال، از آنجا که $T(u_i) = \mathbf{0}_W$ برای همه $i = 1, \dots, k$ و $T(v_j) = w_j$ برای همه $j = 1, \dots, m$ داریم

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = \mathbf{0}_W.$$

از آنجا که w_1, \dots, w_m مستقل خطی هستند، نتیجه می‌گیریم که

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

بنابراین داریم

$$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k = \mathbf{0}_V$$

اما چون u_1, \dots, u_k نیز مستقل خطی هستند، نتیجه می‌گیریم که

$$\mu_1 = \dots = \mu_k = 0.$$

پرسش ۲ (۱۷ نمره) فرض کنید U, W, V فضاهای برداری با ابعاد متناهی روی F باشند. همچنین فرض کنید که $\alpha, \beta \in F$ باشند.

(الف) فرض کنید $T : V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد. نشان دهید:

$$\text{rank}(T) \leq \dim(V)$$

(ب) فرض کنید $S: U \rightarrow V$ و $T: V \rightarrow W$ تبدیل‌های خطی باشند. نشان دهید:

$$\text{rank}(T \circ S) \leq \text{rank}(T)$$

و

$$\text{rank}(T \circ S) \leq \text{rank}(S)$$

پاسخ

(آ) فرض کنید $\dim(V) = n$ و $\dim(\text{Im}(T)) = \text{rank}(T) > n$. در این صورت، باید حداقل $n+1$ بردار $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1} \in \text{Im}(T)$ وجود داشته باشد که مستقل خطی باشند (برای مثال، اولین $n+1$ بردار در یک پایه از $\text{Im}(T)$ را انتخاب می‌کنیم). از آنجا که $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$ در $\text{Im}(T)$ قرار دارند، بردارهایی $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1} \in V$ وجود دارند به طوری که $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ برای $i = 1, \dots, n+1$. از آنجا که $\dim(V) = n$ ، بردارهای $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$ باید وابسته خطی باشند؛ بنابراین ضرایبی $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in F$ ، نه همه صفر، وجود دارند به طوری که

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0}_V.$$

بنابراین ضرایبی $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in F$ ، نه همه صفر، داریم به طوری که

$$T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}) = T(\mathbf{0}_V),$$

یعنی

$$\alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_{n+1} T(\mathbf{v}_{n+1}) = \mathbf{0}_W,$$

یعنی

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_{n+1} \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{0}_W,$$

که این به این معنی است که بردارهای $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$ وابسته خطی هستند — که تناقض است. بنابراین فرض اولیه ما باید نادرست باشد، یعنی باید داشته باشیم $\dim(\text{Im}(T)) \leq n$.

(ب) این نکته ابتدایی از نظریه مجموعه‌ها را به خاطر بیاورید: اگر $A \subseteq B$ باشد، برای هر تابع f داریم $f(A) \subseteq f(B)$. به طور خاص، از آنجا که $S(U) \subseteq V$ داریم $T(S(U)) \subseteq T(V)$ ، یعنی $T \circ S(U) \subseteq T(V)$ ، یعنی

$$\text{im}(T \circ S) \subseteq \text{im}(T)$$

(به یاد بیاورید که $\text{im}(\varphi)$ فقط یک روش دیگر برای نوشتن $\varphi(V)$ است — هر دو نشان‌دهنده برد φ هستند). اکنون، هر دوی اینها زیرفضاهای W هستند، پس داریم

$$\dim(\text{im}(T \circ S)) \leq \dim(\text{im}(T)),$$

یعنی

$$\text{rank}(T \circ S) \leq \text{rank}(T).$$

برای بخش دوم، تابعی $\varphi: \text{im}(S) \rightarrow W$ را به صورت $\varphi(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$ برای همه $\mathbf{v} \in \text{im}(S)$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که φ یک تبدیل خطی است، زیرا برای همه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \text{im}(S)$ و $\alpha, \beta \in F$ داریم $\varphi(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) = T(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) = \alpha T(\mathbf{v}_1) + \beta T(\mathbf{v}_2) = \alpha \varphi(\mathbf{v}_1) + \beta \varphi(\mathbf{v}_2)$. بنابراین با اعمال بخش (الف) به φ ، داریم

$$\text{rank}(\varphi) \leq \dim(\text{im}(S)) = \text{rank}(S). \quad (1)$$

اما توجه کنید که $\text{im}(T \circ S) \subseteq \text{im}(\varphi)$ — زیرا اگر $\mathbf{w} \in \text{im}(T \circ S)$ ، در این صورت $\mathbf{w} = T(S(\mathbf{u}))$ برای برخی $\mathbf{u} \in U$ و بنابراین $\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{v})$ که در آن $\mathbf{v} = S(\mathbf{u}) \in \text{im}(S)$ ؛ پس $\mathbf{w} \in \text{im}(\varphi)$. بنابراین

$$\dim(\text{im}(T \circ S)) \leq \dim(\text{im}(\varphi)),$$

یعنی

$$\text{rank}(T \circ S) \leq \text{rank}(\varphi). \quad (2)$$

ترکیب (1) و (2) نتیجه می‌دهد

$$\text{rank}(T \circ S) \leq \text{rank}(S)$$

پرسش ۳ (۱۶ نمره) فرض کنید V یک فضای برداری میدان F بوده و $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد، به طوری که در هر پایه B از V ماتریس $[T]_B$ قطری است. ثابت کنید T مضرب همانی است؛ یعنی برای هر $\alpha \in V$ داریم $T(\alpha) = c\alpha$.

پاسخ از آنجا که ابعاد ماتریس متناهی است پس $\dim(V)$ نیز متناهی است. فرض کنید $\dim(V) = n$ باشد. ابتدا یک پایه دلخواه مانند $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ از V در نظر بگیرید. ستون j ام $[T]_B$ برابر است با $[T(\alpha_j)]_B$. چون $[T]_B = C$ ماتریس قطری است فرض کنید به نحو زیر باشد.

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

در نتیجه ستون j ام $[T]_B$ برابر است با $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ پس $[T(\alpha_j)]_B = \lambda_j \alpha_j$ است و چون $1 \leq j \leq n$ دلخواه بود در نتیجه

$T(\alpha_1) = \lambda_1 \alpha_1, T(\alpha_2) = \lambda_2 \alpha_2, \dots, T(\alpha_n) = \lambda_n \alpha_n$ می باشد.

اکنون به ازای هر $1 \leq i < j \leq n$ ثابت می کنیم $\lambda_i = \lambda_j$ است. مجموعه $B_i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha_j, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n\}$ را در نظر بگیرید. همه $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n$ ثابت مانده اند و فقط به جای $\alpha_i + \alpha_j$ را قرار دادیم.

ادعا می کنیم B' یک پایه برای V است. چون $\dim V = n$ پس کافی است نشان دهیم اعضای B' مستقل خطی اند. فرض کنید $d_1, \dots, d_n \in F$ وجود داشته باشند که:

$$d_1 \alpha_1 + \dots + d_{i-1} \alpha_{i-1} + d_i (\alpha_i + \alpha_j) + d_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + d_n \alpha_n = 0 \Rightarrow$$

$$d_1 \alpha_1 + \dots + d_{i-1} \alpha_{i-1} + d_i \alpha_i + \dots + (d_i + d_j) \alpha_j + \dots + d_n \alpha_n = 0$$

چون اعضای B مستقل خطی هستند پس: $d_1 = \dots = d_{j-1} = d_i + d_j = d_{j+1} = \dots = d_n = 0$

در نتیجه باید داشته باشیم: $d_1 = \dots = d_n = 0$ پس اعضای B' نیز مستقل خطی هستند.

چون $|B'| = |B| = \dim V$ پس B' پایه ای برای V است. اثر T روی عناصر B' را بررسی می کنیم.

$$T(\alpha_1) = \lambda_1 \alpha_1, \dots, T(\alpha_{i-1}) = \lambda_{i-1} \alpha_{i-1}, T(\alpha_i + \alpha_j) = T(\alpha_i) + T(\alpha_j) = \lambda_i \alpha_i + \lambda_j \alpha_j, T(\alpha_{i+1}) = \lambda_{i+1} \alpha_{i+1}, \dots,$$

$$T(\alpha_n) = \lambda_n \alpha_n$$

پس ماتریس نمایش T در پایه B' برابر است با:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j - \lambda_i & \dots & \lambda_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

که در اینجا $D = [T]_{B'}$ است. به عبارت دیگر ستون k ام $[T]_{B'}$ به ازای $k \neq i$ برابر است با: $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ و ستون j ام $[T]_{B'}$ برابر $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_j - \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ است. از

طرفی طبق فرض سوال $[T]_{B'}$ ماتریس قطری است. پس $\lambda_j - \lambda_i = 0 \rightarrow \lambda_j = \lambda_i$ است.

از آنجا که این حکم را به ازای هر دو $1 \leq i < j \leq n$ دلخواه اثبات کردیم پس $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = c$ است. اکنون به ازای هر $\alpha \in V$ ثابت می کنیم $T(\alpha) = c\alpha$ است.

برای عناصر پایه B داریم:

$\alpha \in V$ دلخواه در نظر بگیرید. B پایه است پس c_1, c_2, \dots, c_n وجود دارد که: $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$ باشد. در نتیجه:

$$T(\alpha) = T(\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^n c_i T(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n c_i * c \alpha_i = c(\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i) = c\alpha \Rightarrow T(\alpha) = c\alpha$$

پرسش ۴ (۱۶ نمره) فرض کنید $A, B \in M_n(R)$ باشد به طوری که $AA^T = I = BB^T$ و همچنین $\det(A) + \det(B) = 0$ است. نشان دهید ماتریس $A + B$ وارون پذیر نیست.

پاسخ

لم ۱: هر گاه $X, Y \in M_n(R)$ باشد آن گاه داریم: $\det(XY) = \det(X)\det(Y)$

لم ۲: هر گاه $X \in M_n(R)$ باشد آن گاه داریم: $\det(X^T) = \det(X)$

روابط زیر با کمک لم ۱ و لم ۲ حاصل می شود.

$$\det(B^T(A+B)A^T) = \det(B^TAA^T + B^TBA^T) = \det(B^T + A^T) = \det(A+B) \Rightarrow$$

$$\det(B^T)\det(A+B)\det(A^T) = \det(A+B)$$

فرض خلف کنید $A+B$ وارون پذیر باشد پس $\det(A+B) \neq 0$ است.

در نتیجه $\det(A^T)\det(B^T) = 1$ است پس $\det(A)\det(B) = 1$ می باشد. (*)

از طرفی داریم:

$$\det(AA^T) = \det(I) \rightarrow \det(A)^2 = 1 \rightarrow \det(A) = 1 \text{ or } -1$$

$$\det(BB^T) = \det(I) \rightarrow \det(B)^2 = 1 \rightarrow \det(B) = 1 \text{ or } -1$$

همچنین $\det(A) + \det(B) = 0$ است پس دو حالت زیر رخ می دهد.

اول این که $\det(A) = 1, \det(B) = -1$ باشد.

دوم آن که $\det(A) = -1, \det(B) = 1$ باشد.

در نتیجه در هر صورت $\det(A)\det(B) = -1$ می شود که با (*) در تناقض است پس فرض خلف باطل و $A + B$ وارون پذیر نیست.

پرسش ۵ (۱۶ نمره) ماتریس $A \in M_n(R)$ است. درایه (i, j) ماتریس A را برابر $\frac{1}{\min(i, j)}$ تعریف کنید. مقدار $\det(A)$ را بیابید.

پاسخ بنا به تعریف داریم: $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$

۲- برابر سطر دوم را به سطر اول اضافه می کنیم. به ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ می رسیم.

۳- برابر سطر سوم را به سطر دوم اضافه می کنیم. به ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ می رسیم.

⋮

۴- برابر سطر $i + 1$ ام را به سطر i اضافه می کنیم. به ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{i} & -\frac{1}{2i} & -\frac{1}{3i} & \dots & -\frac{1}{i^2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{i} & \frac{1}{i+1} & \dots & \frac{1}{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{i} & \frac{1}{i+1} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ می رسیم.

نهایتا با جایگذاری $i = n - 1$ به ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{2(n-1)} & -\frac{1}{3(n-1)} & \dots & -\frac{1}{(n-1)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ می رسیم.

این ماتریس را B بنامید. چون اعمال سطری مقدماتی انجام دادیم پس دترمینان ثابت می ماند. یعنی: $\det(A) = \det(B)$ است. ماتریس B پایین مثلثی است در نتیجه: $\det(A) = \det(B) = (-1) * (-\frac{1}{2}) * (-\frac{1}{3}) * \dots * (-\frac{1}{(n-1)^2}) * \frac{1}{n} = (-1)^{n-1} * \frac{1}{n} * \frac{1}{((n-1)!)^2}$

پرسش ۶ (۲۰ نمره) V یک فضای برداری با بعد متناهی و $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی است.

(آ) اگر $V = R(T) + N(T)$ ، نشان دهید $V = R(T) \oplus N(T)$.

(ب) اگر $R(T) \cap N(T) = \{0\}$ ، نشان دهید $V = R(T) \oplus N(T)$.

پاسخ

لم (۱) اگر U, W زیرفضاهای یک فضای برداری با بعد متناهی باشند، آنگاه $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

(آ) با توجه به روابط داده شده می توان نشان داد:

$$\begin{aligned} \dim(R(T)) + \dim(N(T)) &= \text{rank}T + \text{nullity}T = \dim(V) = \dim(R(T) + N(T)) = \\ &= \dim(R(T)) + \dim(N(T)) - \dim(R(T) \cap N(T)) \\ \dim(R(T)) + \dim(N(T)) &= \dim(R(T)) + \dim(N(T)) - \dim(R(T) \cap N(T)) \\ &\implies \dim(R(T) \cap N(T)) = 0 \\ &\implies R(T) \cap N(T) = \{0\} \\ &\implies V = R(T) \oplus N(T) \end{aligned}$$

(ب) $\dim(R(T)) + \dim(N(T)) = \dim(R(T)) + \dim(N(T)) - \dim(R(T) \cap N(T)) = \text{rank}T + \text{nullity}T - \dim(\{0\}) = \dim(V)$
 $R(T) + N(T) \subseteq V \implies R(T) + N(T) = V \implies R(T) \oplus N(T) = V$