

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان
پاییز ۱۴۰۳



دستگاه مختصات، فضای برداری و زیرفضاها

تمرین تئوری اول

تاریخ انتشار: ۳ مهر ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۴ روز تاخیر برای تمارین تئوری استفاده کنید.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین: دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۱۵ نمره)

هر یک از معادلات را به شکل ماتریس افزایش یافته نوشته و سپس آن را به کمک تشکیل فرم کاهش یافته سطری پلکانی حل کنید:

(آ)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 10 \\ -6x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 6 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$$

(ج)

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -3x_1 + 12x_2 - 15x_3 = 10 \end{cases}$$

پرسش ۲ (۱۷ نمره) با ذکر دلیل مشخص کنید مجموعه‌های گفته شده فضای برداری هست یا نه؟

(آ) مجموعه بردارهای زیر که جمع و ضرب آن‌ها جمع و ضرب عادی اعداد حقیقی است:

$$U = \{(a, b, c) \mid b = a + 1, c = 0\}$$

(ب) مجموعه بردارهای $U = \{(a, b)\}$ که جمع آن به شکل $(a, b) + (c, d) = (ac, bd)$ تعریف می‌شود و ضرب آن ضرب عادی اعداد حقیقی است.

(ج) مجموعه بردارهای $U = \{(a, b)\}$ که ضرب اسکالر به شکل $\alpha(a, b) = (\alpha a, 2\alpha b)$ تعریف می‌شود.

پرسش ۳ (۱۶ نمره) نشان دهید اجتماع سه زیر فضا یک زیر فضا است اگر و تنها اگر یکی از آن‌ها شامل دو تای دیگر باشد.

پرسش ۴ (۱۶ نمره)

(آ) فرض کنید که V مجموعه اعداد حقیقی باشد و عملگرهای \oplus و \odot بر روی آن بصورت زیر تعریف شده باشند:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V : x \oplus y &= xy \\ \forall c \in \mathbb{R}, x \in V : c \odot x &= x^c \end{aligned}$$

آیا مجموعه V با عملگرهای بالا تشکیل یک فضای برداری می‌دهد؟

(ب) اگر V مجموعه اعداد حقیقی نامنفی با عملگر بالا باشد به سوال قبل پاسخ دهید.

(ج) اگر V مجموعه اعداد حقیقی مثبت با عملگر بالا باشد به سوال قبل پاسخ دهید.

پرسش ۵ (۱۶ نمره)

(آ) (۸ نمره) اگر V یک فضای برداری باشد و V_1, V_2, V_3 زیر فضاهای V باشند بطوری که V_2 زیرفضای V_1 باشد. در این صورت نشان دهید:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_2 + (V_1 \cap V_3)$$

(ب) (۸ نمره) اگر D, C, B, A چهار فضای برداری باشند که در رابطه $A \cap B = C \cap D$ صدق کنند، در این صورت ثابت کنید:

$$(A + B \cap C) \cap (A + B \cap D) = A$$

پرسش ۶ (۲۰ نمره) فضای برداری V و دو زیر فضای آن به نام U, W را در نظر بگیرید. زیر فضای U' را اینگونه تعریف می‌کنیم که $U' \oplus (U \cap W) = U$ و زیر فضای W' نیز به این صورت $W' \oplus (U \cap W) = W$ تعریف می‌شود. نشان دهید که:

$$U + W = (U \cap W) \oplus U' \oplus W'$$