

## جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان  
پاییز ۱۴۰۳



تبدیل خطی، تغییر پایه، وارون و دترمینان

### تمرین تئوری چهارم

تاریخ انتشار: ۱۵ آبان ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۴ روز تاخیر در ارسال تمرین‌های تئوری خود استفاده نمایید. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۱۷ نمره) فرض کنید  $T : V \rightarrow W$  یک تبدیل خطی باشد. همچنین فرض کنید  $V$  یک فضای برداری با بعد متناهی است و  $\dim(V) = n$ . اگر  $w_1, \dots, w_m \in W$  یک پایه برای  $\text{im}(T)$  باشد و  $v_1, \dots, v_m \in V$  به طوری که  $T(v_i) = w_i$ ، نشان دهید برای  $i = 1, \dots, m$  داریم:

$$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} \oplus \ker(T)$$

پرسش ۲ (۱۷ نمره) فرض کنید  $U, W, V$  فضاهای برداری با ابعاد متناهی روی  $F$  باشند. همچنین فرض کنید که  $\alpha, \beta \in F$  باشند. (الف) فرض کنید  $T : V \rightarrow W$  یک تبدیل خطی باشد. نشان دهید:

$$\text{rank}(T) \leq \dim(V)$$

(ب) فرض کنید  $S : U \rightarrow V$  و  $T : V \rightarrow W$  تبدیل‌های خطی باشند. نشان دهید:

$$\text{rank}(T \circ S) \leq \text{rank}(T)$$

و

$$\text{rank}(T \circ S) \leq \text{rank}(S)$$

پرسش ۳ (۱۶ نمره) فرض کنید  $V$  یک فضای برداری میدان  $F$  بوده و  $T : V \rightarrow V$  یک تبدیل خطی باشد، به طوری که در هر پایه  $B$  از  $V$  ماتریس  $[T]_B$  قطری است. ثابت کنید  $T$  مضرب همانی است؛ یعنی برای هر  $\alpha \in V$  داریم  $T(\alpha) = c\alpha$ .

پرسش ۴ (۱۵ نمره) فرض کنید  $A, B \in M_n(R)$  باشد به طوری که  $AA^T = I = BB^T$  و همچنین  $\det(A) + \det(B) = 0$  است. نشان دهید ماتریس  $A + B$  وارون پذیر نیست.

پرسش ۵ (۱۵ نمره) ماتریس  $A \in M_n(R)$  است. درایه  $(i, j)$  ماتریس  $A$  را برابر  $\frac{1}{\min(i, j)}$  تعریف کنید. مقدار  $\det(A)$  را بیابید.

پرسش ۶ (۲۰ نمره)  $V$  یک فضای برداری با بعد متناهی و  $T : V \rightarrow V$  یک تبدیل خطی است.

(آ) اگر  $V = R(T) + N(T)$ ، نشان دهید  $V = R(T) \oplus N(T)$ .

(ب) اگر  $R(T) \cap N(T) = \{0\}$ ، نشان دهید  $V = R(T) \oplus N(T)$ .