به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۳

دستگاه مختصات، فضای برداری و زیرفضاها | **تمرین تئوری اول** | تاریخ انتشار: ۱ مهر ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات (۱۰۰ نمره) تاریخ تحویل: ۲۲ مهر ۱۴۰۳

پرسش ۱ (۱۵ نمره)

هر یک از معادلات را به شکل ماتریس افزایش یافته نوشته و سپس آن را به کمک تشکیل فرم کاهش یافته سطری پلکانی حل کنید:

(آ)

$$\begin{cases} ۳x_۱ - x_۲ + ۴x_۳ = -۳ \\ x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ = ۱۰ \\ -۶x_۱ + ۲x_۲ - ۸x_۳ = ۶ \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۲ \\ ۲x_۱ - ۴x_۲ + x_۳ = ۴ \\ x_۱ - x_۲ - x_۳ = -۷ \end{cases}$$

(ج)

$$\begin{cases} x_۱ - ۴x_۲ + ۵x_۳ = ۴ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸ \\ -۳x_۱ + ۱۲x_۲ - ۱۵x_۳ = ۱۰ \end{cases}$$

پاسخ

(آ) فرم کاهش یافته ماتریس به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱۷}{۱۳} & -\frac{۲}{۱۳} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۱۳} & \frac{۳۳}{۱۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

از روی ماتریس بالا متوجه می‌شویم که معادله ناسازگار است و جواب یکتا ندارد.

$$x_۱ = -\frac{۲}{۱۳} - \frac{۱۷}{۱۳}x_۳$$

$$x_۲ = \frac{۳۳}{۱۳} + \frac{۱}{۱۳}x_۳$$

(ب) فرم کاهش یافته ماتریس به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$x_۱ = ۱$$

$$x_۲ = ۳$$

$$x_۳ = ۵$$

(ج) فرم کاهش یافته ماتریس به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۹}{۵} & \frac{۳۶}{۵} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۴}{۵} & \frac{۴}{۵} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲۲ \end{bmatrix}$$

از روی ماتریس بالا متوجه می‌شویم که معادله ناسازگار است و جواب ندارد.

پرسش ۲ (۱۷ نمره) با ذکر دلیل مشخص کنید مجموعه‌های گفته شده فضای برداری هست یا نه؟

(آ) مجموعه بردارهای زیر که جمع و ضرب آن‌ها جمع و ضرب عادی اعداد حقیقی است:

$$U = \{(a, b, c) \mid b = a + ۱, c = ۰\}$$

(ب) مجموعه بردارهای $U = \{(a, b)\}$ که جمع آن به شکل $(a, b) + (c, d) = (ac, bd)$ تعریف می‌شود و ضرب آن ضرب عادی اعداد حقیقی است.

(ج) مجموعه بردارهای $U = \{(a, b)\}$ که ضرب اسکالر به شکل $\alpha(a, b) = (\alpha a, ۲\alpha b)$ تعریف می‌شود.

پاسخ

(آ) شامل عضو ۰ نیست در نتیجه فضای برداری نیست.

(ب) خاصیت توزیع‌پذیری برای جمع را دارا نیست یعنی:

$$\alpha((a_۱, b_۱) + (a_۲, b_۲)) = \alpha(a_۱a_۲, b_۱b_۲) = (\alpha a_۱a_۲, \alpha b_۱b_۲)$$

$$\alpha(a_۱, b_۱) + \alpha(a_۲, b_۲) = (\alpha a_۱, \alpha b_۱) + (\alpha a_۲, \alpha b_۲) = (\alpha^۲ a_۱a_۲, \alpha^۲ b_۱b_۲)$$
$$\Rightarrow \alpha((a_۱, b_۱) + (a_۲, b_۲)) \neq \alpha(a_۱, b_۱) + \alpha(a_۲, b_۲)$$

(ج) خاصیت عضو خنثی ضرب را دارا نیست در واقع:

$$۱(a, b) = (a, ۲b) \neq (a, b)$$

در نتیجه فضای برداری نیست.

پرسش ۳ (۱۶ نمره) نشان دهید اجتماع سه زیر فضا یک زیر فضا است اگر و تنها اگر یکی از آن ها شامل دو تای دیگر باشد.

پاسخ

واضح است اگر یکی از زیر فضاها شامل دو زیر فضای دیگر باشد اجتماع آن‌ها برابر با زیر فضای اول است که خود زیر فضا است. حال طرف دیگر را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $U_۱ \cup U_۲ \cup U_۳$ یک زیر فضا از V باشد. می‌دانیم $a, b \neq ۰$ وجود دارند به طوری که $b = a - ۱$. فرض کنید $U_۱$ و $U_۲$ هیچ یک درون دیگری نیست (وگرنه طبق اسلایدها می‌توان مسئله را تبدیل به حالت دو زیر فضا کرد و آن را حل کرد). حال خواهیم داشت:

$$\forall u \in U_۱ - U_۲ : \exists w \in U_۲ - U_۱$$

می‌دانیم $au + w$ نه در $U_۱$ است نه در $U_۲$ (اگر در $U_۱$ باشد از آن جا که $-au$ در $U_۱$ است باید $w = (au + w) + (-au)$ در $U_۱$ باشد که خلاف فرض است. هم‌چنین اگر در $U_۲$ باشد به طور مشابه $u = \frac{۱}{a}((au + w) - w)$ باید در $U_۲$ باشد که این نیز خلاف فرض است). در نتیجه از آن جا که $U_۱ \cup U_۲ \cup U_۳$ زیر فضا است، باید $au + w \in U_۳$. هم‌چنین به طور کاملاً مشابه می‌توان نشان داد $bu + w \in U_۳$. پس خواهیم داشت:

$$(au + w) - (bu + w) \in U_۳ \Rightarrow (a - b)u = u \in U_۳$$

پس به ازای هر عضو $U_۱ - U_۲$ نشان دادیم عضو $U_۳$ نیز هست. هم‌چنین به طور مشابه هر عضو $U_۲ - U_۱$ عضو $U_۳$ نیز هست. حال داریم:

$$\forall v \in U_۱ \cap U_۲ : \exists w \in U_۲ - U_۱$$

$w + v \notin U_۱ \cap U_۲$ چرا که در این صورت باید w نیز عضو $U_۱ \cap U_۲$ باشد که با فرض در تناقض است. از طرفی $w + v \in U_۲$ چرا که $v, w \in U_۲$ در نتیجه $w + v \in U_۲ - U_۱$. پس طبق قسمت قبل $w \in U_۳$

$$w + v \in U_۳, w \in U_۳ \Rightarrow (w + v) - w = v \in U_۳$$

پس ثابت شد $v \in U_۳$ که نشان می‌دهد همه اعضای $U_۱$ و $U_۲$ در $U_۳$ وجود دارند که یعنی یکی از زیر فضاها شامل دو تای دیگر است.

پرسش ۴ (۱۶ نمره)

(آ) فرض کنید که V مجموعه اعداد حقیقی باشد و عملگرهای $\oplus$ و $\odot$ بر روی آن بصورت زیر تعریف شده باشند:

$$\forall x, y \in V : \quad x \oplus y = xy$$
$$\forall c \in \mathbb{R}, x \in V : \quad c \odot x = x^c$$

آیا مجموعه V با عملگرهای بالا تشکیل یک فضای برداری می‌دهد؟

(ب) اگر V مجموعه اعداد حقیقی نامنفی با عملگر بالا باشد به سوال قبل پاسخ دهید.

(ج) اگر V مجموعه اعداد حقیقی مثبت با عملگر بالا باشد به سوال قبل پاسخ دهید.

پاسخ

(آ) خیر.
اگر $x = -۱$ باشد و $c = \frac{۱}{۲}$ آنگاه $c \odot x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ که این شرط بسته بودن نسبت به ضرب scalar را نقض می‌کند.

(ب) خیر.
عددی که خاصیت additive identity داشته باشد ۱ است چون:

$$x \oplus a = x \Longrightarrow xa = x \Longrightarrow a = ۱$$

اما برای عدد صفر هیچ additive inverse ای وجود ندارد که با ضرب در آن حاصل ۱ شود.

(ج) بله.
شرایط فضای برداری را بررسی می‌کنیم: (بسته بودن نسبت به دو عملیات واضح است.)

Vector Addition:

- Commutative: $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x \in \mathbb{R}^+$
- Associative: $x \oplus (y \oplus z) = xyz = (x \oplus y) \oplus z$

- Identity Element: $x \oplus 1 = x$
- Inverse Element: $x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$

Scalar Product:

- Associative: $a \odot (b \odot x) = a \odot x^b = (x^b)^a = x^{(a \cdot b)} = (a \cdot b) \odot x$
- Distributive over scalar addition: $(a+b) \odot x = x^{(a+b)} = x^a \cdot x^b = a \odot x \cdot b \odot x = a \odot x \oplus b \odot x$
- Distributive over vector addition: $a \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a = a \odot x \oplus a \odot y$
- Scalar Identity: $1 \odot x = x^1 = x$

پرسش ۵ (۱۶ نمره)

(آ) (۸ نمره) اگر V یک فضای برداری باشد و V_1،V_2،V_3 زیر فضا های V باشند بطوری که V_2 زیرفضای V_1 باشد. در این صورت نشان دهید:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_2 + (V_1 \cap V_3)$$

(ب) (۸ نمره) اگر A،B،C،D چهار فضای برداری باشند که در رابطه $A \cap B = C \cap D$ صدق کنند، در این صورت ثابت کنید:

$$(A + B \cap C) \cap (A + B \cap D) = A$$

پاسخ

(آ) (۱۲ نمره) ثابت می‌کنیم دو طرف زیر مجموعه همدیگر هستند. فرض کنید $x \in V_1 \cap (V_2 + V_3)$ باشد در این صورت $x \in V_2 + V_3$ پس:

$$\exists u \in V_2, v \in V_3 : \quad x = u + v$$

چون $V_2 \subset V_1$ پس $u \in V_1$ در نتیجه $v = x - u \in V_1$.
حال چون $v \in V_1$ و $v \in V_3$ پس $v \in V_1 \cap V_3$ همچنین $u \in V_2$ پس $x \in V_2 + (V_1 \cap V_3)$.
برای اثبات سمت دیگر اگر $x \in V_2 + (V_1 \cap V_3)$ باشد در این صورت:

$$\exists u \in V_2, v \in V_1 \cap V_3 : \quad x = u + v$$

در این صورت $u \in V_1$ و $v \in V_1$ پس $x \in V_1$. حال چون $v \in V_3$ و $u \in V_2$ نتیجه می‌شود که $x \in V_2 + V_3$ پس بطور کلی $x \in V_1 \cap (V_2 + V_3)$.

(ب) (۱۳ نمره) اگر فرض کنیم $v \in A$ در این صورت چون $B \cap C$ و $B \cap D$ شامل صفر نیز هستند پس:

$$v \in A + B \cap C \ , \ v \in A + B \cap D$$

حال اگر v برداری در سمت چپ تساوی باشد در این صورت:

$$\exists u_1 \in A, u_2 \in B \cap C : \quad v = u_1 + u_2$$

$$\exists w_1 \in A, w_2 \in B \cap D : \quad v = w_1 + w_2$$

پس در نتیجه $w_1 + w_2 = u_1 + u_2$ که نتیجه می‌دهد $w_1 - u_1 = u_2 - w_2$.
پس داریم: $w_1 - u_1 \in A$
حال چون $u_2 \in B$ و $w_2 \in B$ پس $u_2 - w_2 \in B$ پس:

$$w_1 - u_1 = u_2 - w_2 \in A \cap B = C \cap D$$

حال چون $u_2 \in C$ پس $w_2 \in C$. پس $u_2 \in C \cap D = A \cap B$ که نتیجه می‌دهد $u_2 \in A$
پس $v = u_1 + u_2 \in A$ و حکم ثابت شد.

پرسش ۶ (۲۰ نمره) فضای برداری V و دو زیر فضای آن به نام U, W را در نظر بگیرید. زیرفضای U' را اینگونه تعریف می کنیم که $U' \oplus (U \cap W) = U$ و زیر فضای W' نیز به این صورت $W' \oplus (U \cap W) = W$ تعریف می شود.نشان دهید که:

$$U + W = (U \cap W) \oplus U' \oplus W'$$

پاسخ

لم ۱) اگر $U_1, \ldots, U_n$ زیرفضای V باشند. $U_1 + \cdots + U_n$ جمع مستقیم است اگر و تنها اگر تنها راهی که بتوان ۰ را به صورت مجموع $u_1 + \cdots + u_n$ نشان داد این باشد که همه ی u_i ها صفر باشند.
لم ۲) اگر $U \oplus U' = V$ باشد آنگاه $U \cap U' = 0$ است.

با توجه به روابط داده شده می توان نشان داد :

$$U+W=(U^{'}+(U\cap W))+(W^{'}+(U\cap W))=U^{'}+W^{'}+(U\cap W)$$

حالا مطابق لم ۱ باید نشان دهیم که اگر $x\in U\cap W, u^{'}\in U^{'}, w^{'}\in W^{'}$ باشد و مجموع آن ها برابر با صفر باشد داریم:

$$x+u^{'}+w^{'}=۰\Longrightarrow x=u^{'}=w^{'}=۰$$

دقت کنید که $\{۰\}\in A+B$ است و بنابراین باید چنین $x, u^{'}, w^{'}$ باید وجود داشته باشند.
$w^{'}\in W^{'}$ است و چون $W^{'}\oplus(U\cap W)=W$ بنابراین $W^{'}\subseteq W$ است و $w^{'}\in W$ است.
$u^{'}\in U^{'}$ است و چون $U^{'}\oplus(U\cap W)=U$ بنابراین $U^{'}\subseteq U$ است و $u^{'}\in U$ است.

$$x+u^{'}+w^{'}=۰\Longrightarrow w^{'}=-x-u^{'}, x\in U, u^{'}\in U\Longrightarrow w^{'}\in U$$

بنابراین $w^{'}\in U, w^{'}\in W$ است و این یعنی $w^{'}\in U\cap W$ است.بنابراین $w^{'}\in(U\cap W)\cap W^{'}$ است و طبق فرض سوال $W^{'}\oplus(U\cap W)=W$ که نتیجه می دهد $W^{'}\cap(U\cap W)=\{۰\}$ پس $w^{'}=۰$ است.

$$x+u^{'}=۰\longrightarrow x=-u^{'}, x\in U\cap W\longrightarrow u^{'}\in U\cap W$$

همچنین $u^{'}$ عضو $U^{'}$ است پس $u^{'}\in(U\cap W)\cap U^{'}$. طبق فرض سوال $U^{'}\oplus(U\cap W)=U$ و بنابراین $(U\cap W)\cap U^{'}=\{۰\}$ است که نتیجه میدهد $u^{'}=۰$ است.بنابراین x نیز برابر صفر است.
بنابراین نشان دادیم که صفر توسط زیر فضاهای $(U\cap W), W^{'}, u^{'}$ به صورت یکتا و قتی همه آنها صفر هستند قابل نمایش است. بنابراین طبق لم۱ جمع ها به جمع مستقیم تبدیل می شوند.