

## جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان  
پاییز ۱۴۰۳



فضای ضرب داخلی، نامساوی ها، گرام اشمیت

### تمرین تئوری سوم

تاریخ انتشار: ۳ آبان ۱۴۰۳

۱. پرسش های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوثر مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم سال می توانید از ۴ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین: دانشجویان می توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه ی درس می باشد؛ چرا که هم فکری و کار گروهی می تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. حتما در انتهای پاسخ های ارسالی خود نام افرادی که با آن ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۲۰ نمره) فرض کنید  $V$  یک فضای برداری از چند جمله‌ای‌ها با حداکثر درجه  $n$  باشد. دو عضو  $A$  و  $B$  از این فضای برداری را در نظر بگیرید به طوری که

$$A = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{و} \quad B = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

ثابت کنید عملگر

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} \frac{a_i b_j}{i+j+1}$$

یک ضرب داخلی بر روی  $V$  است.

پرسش ۲ (۲۰ نمره) می‌دانیم به وسیله الگوریتم Gram-Schmidt می‌توان ماتریس  $A$  را به صورت تجزیه  $A = QR$  نوشت.

(آ) فرض کنید ماتریس  $A$  فول رنک و مربعی باشد. اثبات کنید در این حالت ماتریس  $R$  یک ماتریس بالامثلثی و وارون‌پذیر می‌شود.

(ب) برای مثال، ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. تجزیه  $A = QR$  را به دست آورده و به وسیله آن پاسخ دستگاه معادلات  $Ax = b$  که در آن  $b$  برابر با بردار

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

است را به دست آورید.

(ج) در حالت کلی، اثبات کنید رنک ماتریس  $A$  برابر با تعداد سطرهاى ناصفر در  $R$  است.

(د) Pivot های ماتریس  $A^T A$  را به دست آورده و ارتباط آن با درایه های قطر اصلی ماتریس  $R$  را توضیح دهید. ادعای خود را اثبات کنید.

پرسش ۳ (۱۵ نمره)

در نظر بگیرید که  $u, v \in V$  حالا ثابت کنید که  $\langle u, v \rangle = 0$  اگر و تنها اگر به ازای هر  $\alpha \in F$  داشته باشیم:  $\|u\| \leq \|u + \alpha v\|$

پرسش ۴ (۱۵ نمره)

اگر  $A = R^T R$  باشد، نشان دهید که

$$|X^T A y|^2 \leq (X^T A X)(y^T A y)$$

پرسش ۵ (۱۵ نمره) اگر  $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ، به ازای  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  تعریف می‌کنیم  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ . آیا این تعریف درستی از یک ضرب داخلی در  $V$  است؟

پرسش ۶ (۱۵ نمره) فرض کنید  $N, M$  زیرفضاهایی از فضای ضرب داخلی باشند. ثابت کنید که:

$$N^\perp \cap M^\perp = (M + N)^\perp$$