

## جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضان  
پاییز ۱۴۰۳



استقلال خطی، پایه، بعد و مرتبه

### تمرین تئوری دوم

تاریخ انتشار: ۱۵ مهر ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۱۰ نمره) فرض کنید  $v, w$  دو عضو از فضای برداری  $V$  هستند. نشان دهید  $\{v, w\}$  مستقل خطی است اگر و تنها اگر  $\{v + w, v - w\}$  مستقل خطی باشد.

پرسش ۲ (۲۵ نمره) ماتریس  $A_{m \times n}$  را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم  $n \geq m$ . هم‌چنین داریم:

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\} : 2|a_{ii}| > \sum_{j=1}^m |a_{ji}|$$

آیا سطرهای  $A$  لزوماً مستقل خطی‌اند؟ اگر فکر می‌کنید پاسخ مثبت است، اثبات کنید و در غیر این صورت، مثال نقض بیاورید.

پرسش ۳ (۲۰ نمره) برای هر یک از فضاهای برداری زیر، ابتدا پایه<sup>۱</sup> ای برای آن بیابید و سپس بعد<sup>۲</sup> آن فضا را محاسبه نمایید.

الف) چند جمله‌ای‌های  $n$  درجه به فرم  $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  که در آن به ازای عدد  $k$  ( $k < n$ ) داریم:  $p(1) = p(2) = \cdots = p(k) = 0$ .  
 ب) تمام ماتریس‌های مربعی بالامثلثی متعلق به  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

پرسش ۴ (۲۰ نمره) زیرفضای  $V$  را در فضای برداری  $\mathbb{R}^4$  در نظر بگیرید که توسط دستگاه زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y + 3t = 0 \end{cases}$$

زیرفضای  $W$  نیز با بردارهای زیر ساخته می‌شود:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\dim(V + W)$  و  $\dim(V \cap W)$  را محاسبه کنید.

پرسش ۵ (۲۵ نمره) فرض کنید ماتریس‌های  $A_{m \times n}$  و  $B_{m \times k}$  موجود باشند. گزاره زیر را اثبات یا رد کنید:

ماتریسی مانند  $X$  وجود دارد به طوری که  $AX = B$ ، اگر و تنها اگر  $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A:B)$  (منظور از  $A:B$  ماتریس افزوده<sup>۳</sup>  $A$  و  $B$  است).