

به نام خدا



درس جبر خطی  
نیم سال اول ۰۴-۰۳  
استاد: دکتر ربیعی و رمضانی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

سری سوم حل تمرین

۱. فرض کنید  $u, v \in V$  و  $\|u\| \leq 1$  و  $\|v\| \leq 1$ . ثابت کنید که:

$$\sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} \leq 1 - |\langle u, v \rangle|$$

۲. فرض کنید  $e_1, \dots, e_n$  پایه‌های یک متعامد فضای  $V$  بوده و  $v_1, \dots, v_n$  بردارهایی در  $V$  هستند، به طوری که برای هر  $j$ :

$$\|e_j - v_j\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ثابت کنید  $v_1, \dots, v_n$  برای  $V$  پایه هستند.

۳. فرض کنید  $v_1, v_2, \dots, v_m \in R^n$  بردارهای یک باشند به طوری که برای هر  $j \neq i$  داشته باشیم  $v_i \cdot v_j < -\epsilon$  که  $\epsilon > 0$  و عددی ثابت است. نشان دهید:

$$m \leq 1 + \frac{1}{\epsilon}$$

۴. فرض کنید  $f, g$  دو تابع مشتق پذیر به صورت  $R \rightarrow R^n$  باشند.

(آ) نشان دهید:

$$\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$$

(ب) فرض کنید که  $c$  عددی مثبت باشد و  $\|f(t)\| = c$ . ثابت کنید:

$$\langle f', f \rangle = 0$$

۵. فرض کنید  $a, b, c, d$  اعداد حقیقی مثبت باشند. نشان دهید:

$$16 \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)(a + b + c + d)$$

۶. به ازای چه مقادیری از  $a, b$  حاصل عبارت مقابل کمینه می‌شود؟

$$\int_0^\pi (1 - a \sin(t) - b \sin(3t))^2 dt$$