



حل تمرین اول

مسئله‌ی ۱.

برای تمامی مقادیر k مشخص کنید که چه زمانی دستگاه معادلات زیر جواب ندارد، جواب یکتا دارد و یا بی نهایت جواب دارد.

$$x + 5y - 3z = 2$$

$$-2x - 7y + 3z = -5$$

$$-x - 5y + (k^2 - 6)z = k + 1$$

مسئله ۲.

ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

می‌خواهیم ماتریسی مانند B پیدا کنیم، به صورتی که $AB = I$ باشد. این کار را پس از تشکیل *Augmented matrix* و سپس تبدیل آن به *RREF* انجام بدهید.

مسئله‌ی ۳.

برای هر کدام از (V, \odot, \oplus) تعریف شده مشخص کنید که آیا یک فضای برداری داریم یا خیر. $(c \in \mathbb{R})$

الف) $V = P_2$ ، تمام چندجمله‌ای‌ها از درجه حداکثر ۲ می‌باشد، همینطور $p(t) \oplus q(t) = p'(t)q'(t)$ ، $c \odot p(t) = cp(t)$

ب) $V = \mathbb{R}^2$ و $c \odot (x, y) = (cx, |c|y)$ و $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

مسئله ۴.

الف) با فرض $U = \{(x, x, y, y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ، زیر فضای W از \mathbb{R}^4 را طوری مشخص کنید که داشته باشیم: $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

ب) $U = \{(x, y, x + y, x - y, 2x) \in \mathbb{R}^5 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ، زیر فضای W از \mathbb{R}^5 را طوری مشخص کنید که داشته باشیم: $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

مسئله ۵.

الف) V یک فضای برداری و ϕ یک مجموعه از زیرفضا های V می باشد. مجموعه $\cap \phi$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\cap \phi = \{v | v \in V, \forall U \in \phi \ v \in U\}$$

نشان دهید که $\cap \phi$ خود یک زیرفضا است.

ب) فرض کنید W_1, \dots, W_n زیر فضاهایی از V باشند و ϕ مجموعه ای از تمام زیر فضاهایی باشد که شامل تمامی W_i ها هستند.

$$\phi = \{U | \forall W_i \ W_i \subseteq U\}$$

نشان دهید که داریم:

$$\cap \phi = W_1 + \dots + W_n$$

مسئله‌ی ۶.

فرض کنید $\mathcal{C} = \mathcal{C}[0, 1]$ خانواده تمامی توابع پیوسته حقیقی مقدار روی بازه $[0, 1]$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f_1(t) = t \quad \text{و} \quad f_2(t) = t^2$$

برای هر $0 \leq t \leq 1$. مجموعه تمامی توابع به شکل $\alpha f_1 + \beta f_2$ را با M نمایش می‌دهیم ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). همچنین N را مجموعه همه توابعی مانند h در \mathcal{C} تعریف می‌کنیم که در روابط زیر صدق کنند:

$$\int_0^1 t h(t) dt = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 t^2 h(t) dt = 0$$

آیا $\mathcal{C} = M \oplus N$ برقرار می‌باشد؟

مسئله ۷.

درستی یا نادرستی هر کدام از گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر U_1, U_2 و W زیرفضا هایی از V باشند به گونه ای که داشته باشیم:

$$U_1 + W = U_2 + W$$

آنگاه $U_1 = U_2$ خواهد بود.

ب) اگر U_1, U_2 و W زیرفضا هایی از V باشند به گونه ای که داشته باشیم:

$$U_1 \oplus W = U_2 \oplus W = V$$

آنگاه $U_1 = U_2$ خواهد بود.