



سری پنجم حل تمرین

۱. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند به طوری که:

$$AB - BA = 2^{2025} B$$

فرض کنید v یک بردار ویژه از A باشد به طوری که $Bv \neq 0$. ثابت کنید عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که $B^k v$ یک بردار ویژه برای B باشد.

۲. فرض کنید u یک بردار واحد در R^n باشد، به طوری که $u^T u = 1$. این مسئله مربوط به ماتریس متقارن $n \times n$ زیر است:

$$H = I - 2uu^T.$$

تمام مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس را پیدا کنید.

۳. ماتریس $A = (a_{ij})$ را در نظر بگیرید که تمام درایه‌های آن نامنفی و جمع درایه‌های هر ردیف برابر با ۱ باشد. یعنی:

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \in N : a_{ij} \geq 0 \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

گزارش‌های زیر را اثبات کنید:

(الف) ماتریس A مقدار ویژه‌ای برابر با ۱ دارد.

(ب) اندازه‌ی تمام مقادیر ویژه‌ی A کوچکتر یا مساوی ۱ است.

۴. ماتریس وارون پذیر مقابل را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه‌ها و مقادیر ویژه ماتریس‌های مقابل را بدست آورید.

$$A^2 \quad \text{و} \quad A^{-1} - I$$

۵. رابطه‌ی C^k بیابید و حاصل C^{100} را به ازای $a = b = -1$ بدست آورید وقتی که :

$$C = \begin{pmatrix} 2b - a & a - b \\ 2b - 2a & 2a - b \end{pmatrix}$$