به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۴

بردار ویژه، مقدار ویژه، ماتریس‌های متقارن و فرم درجه‌دو **تمرین تئوری چهارم** تاریخ انتشار: ۱۵ آذر ۱۴۰۴

پرسش ۱ ماتریس A به صورت زیر داده شده است. مقادیر ویژه و فضای ویژه [۱] متناظر با هر مقدار ویژه را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

پاسخ

(آ) **معادله مشخصه:**

$$\det(A - \lambda I) = (۱ - \lambda)(۳ - \lambda) - ۸ = \lambda^۲ - ۴\lambda - ۵ = ۰$$
$$(\lambda - ۵)(\lambda + ۱) = ۰ \implies \lambda_۱ = ۵, \quad \lambda_۲ = -۱$$

(ب) **بردار ویژه** $\lambda_۱ = ۵$: حل دستگاه $(A - ۵I)v = ۰$ منجر به $-۴x + ۴y = ۰$ می‌شود، پس $x = y$. بردار $v_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$.

(ج) **بردار ویژه** $\lambda_۲ = -۱$: حل دستگاه $(A + I)v = ۰$ منجر به $۲x + ۴y = ۰$ می‌شود، پس $x = -۲y$. بردار $v_۲ = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$.

پرسش ۲ فرم درجه دو [۲] زیر را در نظر بگیرید:

$$Q(x, y, z) = ۳x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲ + ۴xy - ۴yz.$$

آ) Q را به صورت ماتریسی بیان کنید؛ یعنی ماتریس متقارن M را بیابید که $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T M \mathbf{x}$.

ب) مقدار ویژه‌های M را بیابید و تعیین کنید Q مثبت‌معین، منفی‌معین یا نامعین است.

ج) با فرض محدودیت $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$، حداقل مقدار $Q(x, y, z)$ را پیدا کنید و توضیح دهید این مقدار چگونه با کوچک‌ترین مقدار ویژه M مرتبط است.

د) یک پایه‌ی متعامد واحد از بردار ویژه‌های M پیدا کنید و با استفاده از آن Q را به فرم قطری (مجموعی از مربع‌های وزن‌دار) تبدیل کنید.

پاسخ

آ) برای نوشتن فرم مربعی $Q(x, y, z)$ به صورت ماتریسی، ابتدا باید ضرایب مربوط به تک‌جمله‌های $x^۲$، $y^۲$، $z^۲$ و محصولات متقابل مانند xy و yz را استخراج کنیم. با توجه به عبارت:

$$Q(x, y, z) = ۳x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲ + ۴xy - ۴yz,$$

ما ضرایب زیر را می‌گیریم:
- $a_{۱۱} = ۳$ (برای $x^۲$)، $a_{۲۲} = ۲$ (برای $y^۲$)، $a_{۳۳} = ۳$ (برای $z^۲$)، $a_{۱۲} = a_{۲۱} = ۴$ (برای xy)، $a_{۲۳} = a_{۳۲} = -۴$ (برای yz).

بنابراین، ماتریس M که معادل فرم مربعی Q است، به صورت زیر خواهد بود:

$$M = \begin{pmatrix} ۳ & ۴ & ۰ \\ ۴ & ۲ & -۴ \\ ۰ & -۴ & ۳ \end{pmatrix}.$$

ب) برای یافتن مقادیر ویژه ماتریس M، ابتدا معادله ویژه را حل می‌کنیم:

$$\det(M - \lambda I) = ۰,$$

که در آن I ماتریس واحد است و λ مقدار ویژه است.

[۱] Eigenspace
[۲] quadratic form

با محاسبه $\det(M-\lambda I)$، معادله ویژه به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} ۳-\lambda & ۴ & ۰ \\ ۴ & ۲-\lambda & -۴ \\ ۰ & -۴ & ۳-\lambda \end{vmatrix} = ۰.$$

حل این معادله درجه ۳ به ما مقادیر ویژه زیر را می‌دهد:

$$\lambda_۱ = ۶, \quad \lambda_۲ = ۱, \quad \lambda_۳ = ۲.$$

چون تمام مقادیر ویژه مثبت هستند ($\lambda_۱ = ۶$، $\lambda_۲ = ۱$، $\lambda_۳ = ۲$)، ماتریس M مثبت‌معین است.
بنابراین، $Q(x,y,z)$ هم مثبت‌معین است.

ج) برای یافتن حداقل مقدار $Q(x,y,z)$ تحت محدودیت $x^۲+y^۲+z^۲=۱$، باید مقدار Q را در بردارهایی که نُرم‌شان یک است، به حداقل برسانیم.
از آنجا که ماتریس M مثبت‌معین است، حداقل مقدار $Q(x,y,z)$ برابر با کوچک‌ترین مقدار ویژه M خواهد بود. این به این معنی است که:

$$\min Q(x,y,z) = \lambda_{\min} = ۱.$$

این مقدار، همان‌طور که از خواص ماتریس‌های مثبت‌معین انتظار می‌رود، با کوچک‌ترین مقدار ویژه M مرتبط است.

د) برای پیدا کردن پایه‌ی متعامد از بردارهای ویژه ماتریس M، ابتدا بردارهای ویژه را پیدا می‌کنیم. از آنجایی که مقادیر ویژه M عبارتند از ۶، ۱، و ۲، باید بردارهای ویژه مرتبط با این مقادیر ویژه را پیدا کنیم.
پس از یافتن این بردارهای ویژه متعامد و نرمال‌شده، می‌توانیم Q را به فرم قطری تبدیل کنیم.
فرم قطری از Q به صورت زیر خواهد بود:

$$Q(x,y,z) = \lambda_۱ v_۱^۲ + \lambda_۲ v_۲^۲ + \lambda_۳ v_۳^۲ = ۶v_۱^۲ + v_۲^۲ + ۲v_۳^۲,$$

که در آن $v_۱, v_۲, v_۳$ بردارهای ویژه نرمال‌شده هستند.

پرسش ۳ فرض کنید می‌خواهیم ماتریسی حقیقی ۳×۳ به نام A بسازیم که مقدار ویژه‌های آن $\lambda_۱ = -۱$ (با تکرر جبری ۲) و $\lambda_۲ = ۳$ (با تکرر جبری ۱) باشد. بردارهای $\mathbf{v}_۱ = (۱,۰,۱)^T, \quad \mathbf{v}_۲ = (۰,۱,-۱)^T$ را بردار ویژه‌های $\lambda_۱$ و $\mathbf{v}_۳ = (۱,۱,۱)^T$ را بردار ویژه $\lambda_۲$ فرض کنید.

آ) نشان دهید مجموعه‌ی $\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^۳$ است.

ب) ماتریس A را به دست آورید. برای این کار ماتریس S را بسازید که ستون‌های آن $\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳$ هستند و سپس $A = SDS^{-۱}$ را محاسبه کنید، جایی که $D = \mathrm{diag}(-۱,-۱,۳)$.

ج) بررسی کنید آیا A متقارن است یا خیر و توضیح دهید اگر نیست، چرا متقارن نیست؟

پاسخ

آ) برای نشان دادن اینکه مجموعه $\{\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳\}$ یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^۳$ است، کافی است نشان دهیم که این بردارها خطی مستقل هستند. برای این کار باید معادله زیر را بررسی کنیم:

$$c_۱\mathbf{v}_۱ + c_۲\mathbf{v}_۲ + c_۳\mathbf{v}_۳ = ۰.$$

که در آن $c_۱, c_۲, c_۳$ ضرایب اسکالر هستند و ۰ بردار صفر در فضای $\mathbb{R}^۳$ است.
معادله فوق به این صورت باز می‌شود:

$$c_۱\begin{pmatrix}۱\\۰\\۱\end{pmatrix} + c_۲\begin{pmatrix}۰\\۱\\-۱\end{pmatrix} + c_۳\begin{pmatrix}۱\\۱\\۱\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}۰\\۰\\۰\end{pmatrix}.$$

این معادله معادل سیستم معادلات زیر است:

$$\begin{aligned} c_۱ + c_۳ &= ۰, \\ c_۲ + c_۳ &= ۰, \\ c_۱ - c_۲ + c_۳ &= ۰. \end{aligned}$$

حل این سیستم نشان می‌دهد که $c_۱ = c_۲ = c_۳ = ۰$ تنها جواب ممکن است. بنابراین، بردارهای $\mathbf{v}_۱$، $\mathbf{v}_۲$ و $\mathbf{v}_۳$ خطی مستقل هستند و بنابراین یک پایه برای $\mathbb{R}^۳$ تشکیل می‌دهند.

ب) ماتریس S را با قرار دادن بردارهای ویژه به صورت ستون‌ها به دست می‌آوریم:

$$S = \begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۱\end{pmatrix}.$$

ماتریس D به صورت قطری با مقادیر ویژه $\lambda_1 = -1$ (با تکرر جبری ۲) و $\lambda_2 = 3$ است:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

برای پیدا کردن ماتریس A، باید S را معکوس کنیم و سپس $A = SDS^{-1}$ را محاسبه کنیم.
ابتدا معکوس ماتریس S را محاسبه می‌کنیم. معکوس ماتریس S را می‌توان با استفاده از روش‌های معمول محاسبه معکوس یافت:

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

حال می‌توانیم ماتریس A را محاسبه کنیم:

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

با انجام ضرب ماتریسی، ماتریس A به دست می‌آید:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ج) برای بررسی اینکه آیا A متقارن است یا خیر، باید چک کنیم که آیا $A = A^T$ است یا نه. ماتریس ترانهاده A را محاسبه می‌کنیم:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

چون $A \neq A^T$، بنابراین ماتریس A متقارن نیست.

پرسش ۴ بردار $u \in \mathbb{R}^n$ را ناصفر در نظر بگیرید و بگذارید

$$A = uu^T.$$

همچنین ماتریس

$$B = \lambda I + A$$

را برای یک عدد حقیقی λ تعریف کنید.

(آ) همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس B را برحسب λ و $\|u\|^2$ بیابید.
(ب) ثابت کنید که ماتریس B برای هر مقدار λ قطری‌پذیر است.

پاسخ الف) یافتن مقدارویژه‌های ماتریس $B = \lambda I + uu^T$

ابتدا توجه کنید که $A = uu^T$ یک ماتریس رتبهٔ یک است. معادلهٔ زیر برای هر بردار x برقرار است:

$$Ax = uu^T x = (u^T x)\, u.$$

پس:

$$Bx = \lambda x + (u^T x)\, u.$$

دو حالت برای x وجود دارد:

۱. اگر x بر u عمود باشد یعنی $u^T x = 0$، آنگاه:

$$Bx = \lambda x.$$

پس λ مقدارویژه است با فضای ویژهٔ

$$u^\perp = \{x : u^T x = 0\},$$

که ابعاد آن $n - 1$ است.

۲. اگر x موازی u باشد یعنی $x = cu$، آنگاه:

$$Bx = \lambda(cu) + (u^T(cu))u = c\lambda u + c\|u\|^2 u = c(\lambda + \|u\|^2)u.$$

پس مقدارویژهٔ دیگر:

$$\lambda + \|u\|^{۲}.$$

نتیجه: مقدارویژه‌ها: λ با تکرر $n-۱$، $\lambda + \|u\|^{۲}$ با تکرر ۱.

ب) قطری‌پذیر بودن ماتریس B

از قسمت (الف) می‌دانیم که:

- مقدارویژهٔ λ فضای ویژه‌ای به ابعاد $n-۱$ دارد. - مقدارویژهٔ $\lambda + \|u\|^{۲}$ فضای ویژه‌ای یک‌بعدی دارد.

جمع ابعاد فضاهای ویژه:

$$(n-۱)+۱ = n.$$

پس B به اندازهٔ کافی (یعنی n عدد) بردار ویژهٔ خطی‌مستقل دارد. در نتیجه:

B همیشه قطری‌پذیر است حتی اگر $\lambda = ۰$.

پرسش ۵ با استفاده از نتایج سوال های قبل، ابتدا ماتریس A را قطری‌سازی کنید (ماتریس‌های P و D را بیابید). سپس با استفاده از این تجزیه، حاصل $A^{۵}$ را محاسبه کرده و درایه سطر اول و ستون اول ماتریس حاصل را مشخص نمایید.

پاسخ به جای ضرب مستقیم ماتریس‌ها، از ویژگی $A^k = PD^kP^{-۱}$ استفاده می‌کنیم که برای توان‌های بالا بسیار کارآمد است.

(آ) **تشکیل ماتریس‌ها:** $D = \mathrm{diag}(۵, -۱)$ و $P = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$.

(ب) **محاسبه معکوس P:** دترمینان P برابر ۳ است. پس $P^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$.

(ج) **محاسبه توان پنجم:**

$$A^{۵} = P\begin{bmatrix} ۵^{۵} & ۰ \\ ۰ & (-۱)^{۵} \end{bmatrix}P^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳۱۲۵ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$= \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۳۱۲۵ & ۲ \\ ۳۱۲۵ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰۴۱ & ۲۰۸۴ \\ ۱۰۴۲ & ۲۰۸۳ \end{bmatrix}$$

درایه سطر اول و ستون اول برابر با **۱۰۴۱** است.

پرسش ۶ فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی $n \times n$ باشند. ثابت کنید که مقادیر ویژه ماتریس AB دقیقاً همان مقادیر ویژه ماتریس BA هستند. (راهنمایی: مسئله را در دو حالتِ صفر بودن و غیرصفر بودن مقدار ویژه بررسی کنید).

پاسخ روند اثبات با ضرب طرفین معادله ویژه در ماتریس دیگر تکمیل می‌شود.

فرض کنید v بردار ویژه غیرصفر AB با مقدار ویژه λ باشد ($ABv = \lambda v$). طرفین را از چپ در B ضرب می‌کنیم:

$$B(ABv) = B(\lambda v) \implies (BA)(Bv) = \lambda(Bv)$$

اگر $\lambda \neq ۰$ باشد، آنگاه $Bv \neq ۰$ است (زیرا اگر $Bv = ۰$ باشد، $ABv = ۰$ می‌شود که خلاف فرض است). بنابراین Bv بردار ویژه BA با همان مقدار ویژه λ است. اگر $\lambda = ۰$، از طریق دترمینان ثابت می‌شود ($\det(AB) = \det(BA) = ۰$).

پرسش ۷ نشان دهید که دترمینان یک ماتریس برابر با حاصل‌ضرب مقادیر ویژه آن ($\det(A) = \prod \lambda_i$) و اثر ماتریس برابر با مجموع مقادیر ویژه آن ($\mathrm{tr}(A) = \sum \lambda_i$) است. برای اثبات می‌توانید فرض کنید ماتریس مثلثی‌سازی‌پذیر است.

پاسخ ساده‌ترین راه اثبات، استفاده از فرم مثلثی (یا جردن) است که در آن مقادیر ویژه روی قطر اصلی قرار دارند.

فرض کنید A مشابه ماتریس مثلثی T باشد ($A = PTP^{-۱}$) که درایه‌های قطری T همان λ_iها هستند.

- **دترمینان:** $\det(A) = \det(T) = \prod t_{ii} = \prod \lambda_i$.
- **اثر:** $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(T) = \sum t_{ii} = \sum \lambda_i$.

پرسش ۸ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ است که در رابطه $A^{۲} = A$ صدق می‌کند (ماتریس پوچ‌توان یا Idempotent). ثابت کنید که هر مقدار ویژه A یا برابر با صفر است یا یک. سپس نشان دهید که اگر A متقارن نیز باشد، فرم مربعی $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ همواره نامنفی است.

پاسخ این سوال تحلیلی به بررسی ویژگی‌های جبری عملگرهای خاص می‌پردازد. با اعمال تعریف مقدار ویژه در معادله ماتریسی، مقادیر ممکن محدود می‌شوند.

اگر $Av = \lambda v$، آنگاه $A^{۲}v = \lambda^{۲}v$. طبق فرض $A^{۲} = A$، پس $\lambda^{۲}v = \lambda v$. چون $v \neq ۰$، داریم $\lambda^{۲} - \lambda = ۰ \implies \lambda \in \{۰, ۱\}$. در قسمت دوم، اگر A متقارن باشد، چون تمام مقادیر ویژه نامنفی هستند (صفر یا یک)، طبق تعریف، فرم مربعی نیمه‌مثبت معین است و همواره مقدارش بزرگتر یا مساوی صفر است.

پرسش ۹ تابع چندجمله‌ای با تعریف زیر را درنظر بگیرید:

تعریف چندجمله‌ای متقارن kام

$$\varphi_k(A) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k},$$

λ_i ها مقادیر ویژه A. هستند. برای مثال برای $k=1$ این تابع همان trace است و برای $k=n$ همان دترمینان.

اثبات کنید برای ماتریس دلخواه مربعی با ابعاد یکسان A, B

$$\varphi_k(AB) = \varphi_k(BA), \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

پاسخ ابتدا اثبات می‌کنیم مقادیر ویژه AB و BA برابرند:

فرض کنید $\lambda \neq 0$ و $v \neq 0$ برداری است طوری که

$$ABv = \lambda v.$$

اگر $w = Bv$ باشد، دو حالت پیش می‌آید:

- اگر $w = 0$ بود، آنگاه $ABv = A(0) = 0$ که با $\lambda v \neq 0$ (زیرا $\lambda \neq 0$ و $v \neq 0$) تناقض دارد. بنابراین $w \neq 0$.
- حال با $w \neq 0$ داریم:

$$BAw = BA(Bv) = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda(Bv) = \lambda w.$$

بنابراین w بردار ویژهٔ غیرصفرِ BA مربوط به همان مقدار ویژه λ است. پس هر $\lambda \neq 0$ که مقدار ویژهٔ AB باشد، مقدار ویژهٔ BA نیز هست.

با همین استدلال به طور مشابه می توان جهت مخالف را نشان داد. واضح است به دلیل ابعاد یکسان مقادیر ویژه صفر نیز مشترک است.

توجه کنید تابع داده شده صرفا جمع تمام جایگشت های kتایی از مقادیر ویژه است.

حال خواسته سوال با توجه به برابری مقادیر ویژه و تعریف تابع اثبات شد.

پرسش ۱۰ فرض کنید A یک ماتریس 3×3 حقیقی است و برای هر بردار $u \in \mathbb{R}^3$ بردارهای u و Au متعامد باشند. یعنی

$$u^T\,(Au) = 0 \qquad \text{برای تمام} u \in \mathbb{R}^3.$$

الف) ثابت کنید $A^T = -A$.

ب) ثابت کنید یک بردار $w \in \mathbb{R}^3$ وجود دارد طوری که برای تمام $u \in \mathbb{R}^3$

$$Au = w \times u,$$

یعنی عمل A همان ضرب خارجی با یک بردار ثابت w است.

پاسخ (الف) برای هر u داریم $u\cdot(Au) = u^TAu = 0$. ماتریس A را به مجموع بخش متقارن و ضدمتقارن تجزیه می‌کنیم:

$$A = S + K, \qquad S = \tfrac{1}{2}(A + A^T), \quad K = \tfrac{1}{2}(A - A^T).$$

از آنجا که $K^T = -K$ (یعنی K ضدمتقارن است)، برای هر u داریم $u^TKu = 0$ زیرا

$$u^TKu = (u^TKu)^T = u^TK^Tu = u^T(-K)u = -u^TKu \Rightarrow u^TKu = 0.$$

بنابراین شرط مسئله معادل است با

$$u^TSu = 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^3.$$

اما اگر S ماتریس متقارن باشد و $u^TSu = 0$ برای همهٔ u، برای هر u, v :خواهیم داشت

$$u^TSv = \tfrac{1}{4}\big((u+v)^TS(u+v) - (u-v)^TS(u-v)\big) = 0.$$

که از آنجا که به ازای هردو برداری این رابطه برقرار است تمام درایه‌های S صفرند و $S = 0$. از این نتیجه می‌شود $A = K$ و لذا $A^T = -A$. این همان خواسته بود.

(ب) طبق بخش اول:

$$A = -A^T$$

پس یعنی ماتریس A به این فرم است:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

بردار $w = (a_1, a_2, a_3)^T$ را در نظر بگیرید و ماتریس $[w]_\times$ را تعریف کنید:

$$[w]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

با توجه به تعریف ضرب خارجی که $[w]_\times u = w \times u$ برای هر $u \in \mathbb{R}^3$. مقایسهٔ درایه‌ها نشان می‌دهد $A = [w]_\times$. بنابراین برداری w که خواسته شده وجود دارد و برای همهٔ u داریم

$$Au = [w]_\times u = w \times u.$$

این یعنی ماتریس A همان عملی را انجام می‌دهد که «چرخاندن» هر بردار u حولِ بردارِ ثابتِ w با استفاده از ضرب‌برداری انجام می‌دهد؛ یعنی:

$$Au = w \times u.$$

پرسش ۱۱ **(الف)** دنبالهٔ گیبوناچی به شکل زیر از میانگین دو جملهٔ قبلی بدست می‌آید. اثبات کنید دنباله به عدد $\frac{2}{3}$ همگرا می‌شود.

$$G_{k+2} = \frac{1}{2} G_{k+1} + \frac{1}{2} G_k$$

$$G_0 = 0 \quad \text{و} \quad G_1 = 1$$

(ب) در مسئله دنباله فیبوناچی فرض کنید بردار ویژهٔ متناظر با λ_1 برابر $(\lambda_1, 1)$ و بردار متناظر با λ_2 برابر $(\lambda_2, 1)$ است. اثبات کنید جملهٔ امn دنباله برابر زیر است:

$$F_k = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

پاسخ **(الف)** ابتدا توجه کنید:

$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ دارد $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ با $x_1 = (1, 1),\ x_2 = (1, -2)$.

پس:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \to \quad A^\infty = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(ب)

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$S\Lambda^k S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$S\Lambda^k S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \\ \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{bmatrix}$$

$$F_k = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

پرسش ۱۲ فرض کنید A یک ماتریس متقارن مثبت‌معین باشد. کمینهٔ عبارت زیر را پیدا کنید:

$$\min_{x\neq ۰,\ b^Tx=۱} x^TAx$$

و نشان دهید که نقطهٔ بهینه برابر است با

$$x=\frac{A^{-۱}b}{b^TA^{-۱}b}.$$

پاسخ چون ماتریس A متقارن و مثبت‌معین است، ریشه‌ی دوم آن $A^{۱/۲}$ و همچنین $(A^{۱/۲})^{-۱}=A^{-۱/۲}$ وجود دارد. تغییر متغیر استاندارد در فرم‌های درجه‌دو را انجام می‌دهیم:

$$y=A^{۱/۲}x,\qquad x=A^{-۱/۲}y.$$

با این تغییر متغیر، مقدار فرم مربعی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$x^TAx=(A^{-۱/۲}y)^TA(A^{-۱/۲}y)=y^Ty=\|y\|^۲.$$

قید مسئله نیز تبدیل می‌شود:

$$b^Tx=۱\quad\Longrightarrow\quad b^TA^{-۱/۲}y=۱\quad\Longrightarrow\quad (A^{-۱/۲}b)^Ty=۱.$$

پس مسئلهٔ اصلی تبدیل شد به:

$$\min\|y\|^۲\quad \text{به شرط}\quad (A^{-۱/۲}b)^Ty=۱.$$

اکنون از نابرابری شوارتس (در فضای برداری $\mathbb{R}^n$) استفاده می‌کنیم:

$$|(A^{-۱/۲}b)^Ty|\le\|A^{-۱/۲}b\|\,\|y\|.$$

ولی قید برابر با ۱ است، پس:

$$۱\le\|A^{-۱/۲}b\|\,\|y\|\quad\Longrightarrow\quad \|y\|^۲\ge\frac{۱}{\|A^{-۱/۲}b\|^۲}=\frac{۱}{b^TA^{-۱}b}.$$

برابری در شوارتس زمانی برقرار می‌شود که:

$$y=c(A^{-۱/۲}b)$$

برای یک اسکالر c. مقدار c را از قید تعیین می‌کنیم:

$$۱=(A^{-۱/۲}b)^Ty=c\,\|A^{-۱/۲}b\|^۲=c\,b^TA^{-۱}b.$$

پس:

$$c=\frac{۱}{b^TA^{-۱}b}.$$

در نتیجه

$$y=\frac{A^{-۱/۲}b}{b^TA^{-۱}b}\qquad\Longrightarrow\qquad x=A^{-۱/۲}y=\frac{A^{-۱}b}{b^TA^{-۱}b}.$$

$$\boxed{x_{\min}=\frac{A^{-۱}b}{b^TA^{-۱}b}}$$

و مقدار کمینه:

$$\min x^TAx=\frac{۱}{b^TA^{-۱}b}.$$

پرسش ۱۳ فرض کنید A یک ماتریس متقارن دارای کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدارویژه‌های $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ باشد. ثابت کنید که:

$$\lambda_{\min}=\min_{\|x\|=۱}x^TAx,\qquad \lambda_{\max}=\max_{\|x\|=۱}x^TAx.$$

سپس نتیجه بگیرید که مجموعهٔ مقادیر فرم درجه‌دو روی کرهٔ واحد یعنی

$$\{x^TAx:\|x\|=۱\}$$

دقیقاً برابر بازهٔ بستهٔ

$$[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$$

است.

پاسخ چون ماتریس A متقارن است، بنا بر قضیهٔ قطری‌سازی متعامد، می‌توان آن را به صورت

$$A = Q\Lambda Q^T$$

نوشت، که در آن Q ماتریسی متعامد و $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ شامل تمام مقدارویژه‌های حقیقی A است. فرض کنید

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}.$$

یک بردار واحد $x \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. با تغییر متغیر

$$y = Q^T x,$$

داریم $\|y\| = \|x\| = 1$ چون Q متعامد است. حال مقدار فرم درجه‌دو تبدیل می‌شود به:

$$x^T A x = x^T Q\Lambda Q^T x = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

از آنجا که y یک بردار واحد است، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1.$$

اکنون از این واقعیت استفاده می‌کنیم که $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ برای همهٔ i. پس:

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \geq \lambda_1 (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_1.$$

و همچنین:

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_n.$$

در نتیجه:

$$\lambda_{\min} \leq x^T A x \leq \lambda_{\max} \quad \text{برای هر} \|x\| = 1.$$

برای نشان دادنِ برابریِ کران‌ها، کافی است در نظر بگیریم که اگر $v_{\min}$ و $v_{\max}$ بردارهای ویژهٔ متناظر با $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ باشند، آنگاه

$$v_{\min}^T A v_{\min} = \lambda_{\min}, \qquad v_{\max}^T A v_{\max} = \lambda_{\max}.$$

بنابراین:

$$\lambda_{\min} = \min_{\|x\|=1} x^T A x, \qquad \lambda_{\max} = \max_{\|x\|=1} x^T A x.$$

دیدیم که:

$$\lambda_{\min} \leq x^T A x \leq \lambda_{\max} \quad \text{برای تمام} \|x\| = 1.$$

و همچنین این دو مقدار با انتخاب بردارهای ویژهٔ متناظر قابل دستیابی هستند.

پس مجموعهٔ

$$\{x^T A x : \|x\| = 1\}$$

دقیقاً برابر است با بازهٔ بستهٔ

$$[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}].$$