به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۴

تبدیل خطی، تغییر پایه، معکوس و دترمینان | **تمرین تئوری سوم** | تاریخ انتشار: ۲۷ آبان ۱۴۰۴

پرسش ۱ فرض کنید $f, f_1, f_2, \dots, f_m$ تبدیل‌های خطی حقیقی روی V هستند به طوری که می‌دانیم اگر برای هر $x \in V$ داشته باشیم:

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_m(x) = 0,$$

آنگاه $f(x) = 0$. نشان دهید که f ترکیب خطی از $f_1, f_2, \dots, f_m$ است.

پاسخ با استقرا روی n (که همان m است) حکم را ثابت می‌کنیم.

حالت پایه: $n = 1$. اگر همیشه $f_1(x) = 0$ باشد، حکم بدیهی است. در غیر این صورت، برداری مانند e_1 وجود دارد به طوری که $f_1(e_1) = 1$. آنگاه داریم:

$$f_1\big(xf_1(e_1) - e_1 f_1(x)\big) = f_1(x) - f_1(x) = 0 \Rightarrow f\big(xf_1(e_1) - e_1 f_1(x)\big) = 0 \Rightarrow f(x) = f(e_1)\, f_1(x).$$

فرض استقرا. فرض کنید حکم برای $n = k$ برقرار باشد و می‌خواهیم آن را برای $n = k + 1$ نشان دهیم.

اگر یکی از f_iها چنین باشد که:

$$\forall j \neq i:\ f_j(\cdot) = 0 \Rightarrow f_i(\cdot) = 0,$$

آنگاه طبق فرض استقرا می‌توان f را به صورت ترکیب خطی از f_jها با $j \neq i$ نوشت.

پس فرض کنید برای هر f_i برداری مانند e_i وجود داشته باشد به طوری که:

$$f_i(e_i) \neq 0, \qquad \forall j \neq i:\ f_j(e_i) = 0,$$

و می‌توانیم با مقیاس‌گذاری فرض کنیم $f_i(e_i) = 1$.

اکنون محاسبه می‌کنیم:

$$\forall j:\ f_j\left(x - \sum_{i=1}^{n} e_i f_i(x)\right) = f_j(x) - \sum_{i \neq j} f_j(e_i) f_i(x) - f_j(e_j) f_j(x) = f_j(x) - f_j(x) = 0.$$

پس:

$$f\left(x - \sum_{i=1}^{n} e_i f_i(x)\right) = 0 \Rightarrow f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(e_i) f_i(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, f_i(x).$$

بنابراین f ترکیب خطی از $f_1, \dots, f_n$ است.

پرسش ۲ فرض کنید $P \in \mathcal{L}(V)$ و $P^2 = P$ (نگاشت P یک پروجکشن است). نشان دهید:

$$V = \mathrm{Null}(P) \oplus \mathrm{Range}(P).$$

(عملگر $\oplus$ نمایش‌دهنده direct sum است.)

پاسخ برای هر $v \in Null\ P \cap Range\ P$ داریم $Pv = 0$ و از طرفی $\exists u \in V$ به طوری که $v = Pu$. پس

$$Pv = P(Pu) = P^2 u = Pu = v.$$

از $Pv = 0$ نتیجه می‌شود $v = 0$. بنابراین:

$$Null\ P \cap Range\ P = \{0\} \implies dim(Null\ P \cap Range\ P) = 0.$$

از قضیه رتبه‌ـ پوچی داریم:

$$dim\ V = dim\ Null\ P + dim\ Range\ P.$$

همچنین:

$$dim(Null\ P + Range\ P) = dim\ Null\ P + dim\ Range\ P - dim(Null\ P \cap Range\ P).$$

چون $dim(Null\ P \cap Range\ P) = 0$، پس:

$$dim(Null\ P + Range\ P) = dim\ V.$$

و چون $Null\ P + Range\ P \subseteq V$، نتیجه می‌گیریم:

$$V = Null\ P + Range\ P.$$

از طرفی $Null\ P \cap Range\ P = \{۰\}$، پس:

$$V = Null\ P \oplus Range\ P.$$

پرسش ۳ فرض کنید V و W فضاهای برداری با بعد متناهی باشند و X زیرفضایی از V و Y زیرفضایی از W باشد. نشان دهید که نگاشتی خطی $T \in \mathcal{L}(V, W)$ وجود دارد به طوری که:

$$\mathbf{Null}\, T = X, \quad \mathbf{Range}\, T = Y$$

اگر و تنها اگر:

$$\dim X + \dim Y = \dim V.$$

پاسخ ($\Longrightarrow$) اگر $T \in \mathcal{L}(V, W)$ چنان باشد که $Null\ T = X$ و $Range\ T = Y$، آنگاه طبق «قضیه بنیادی تبدیل‌های خطی» (همانی رتبه‌ـ پوچی) داریم:

$$\dim V = \dim(Null\ T) + \dim(Range\ T) = \dim X + \dim Y.$$

($\Longleftarrow$) اکنون فرض کنید $\dim X + \dim Y = \dim V$. یک پایه X را به صورت $x_۱, \ldots, x_n$ و یک پایه Y را $y_۱, \ldots, y_m$ در نظر بگیرید. از آن جا که $\dim V = n + m$، می‌توان $x_۱, \ldots, x_n$ را به یک پایه V به شکل

$$x_۱, \ldots, x_n, u_۱, \ldots, u_m$$

گسترش داد. اکنون $T : V \to W$ را روی این پایه چنین تعریف کنید:

$$T(x_i) = ۰ \quad (۱ \leq i \leq n), \quad T(u_j) = y_j \quad (۱ \leq j \leq m),$$

سپس T را به طور خطی گسترش دهید. یعنی برای هر $v = \sum_{i=۱}^{n} a_i x_i + \sum_{j=۱}^{m} b_j u_j$ قرار دهید:

$$T(v) = \sum_{j=۱}^{m} b_j y_j.$$

آنگاه به وضوح:

$$Null\ T = \operatorname{span}\{x_۱, \ldots, x_n\} = X, \quad Range\ T = \operatorname{span}\{y_۱, \ldots, y_m\} = Y.$$

پس نگاشتی با ویژگی‌های خواسته شده وجود دارد.

پرسش ۴ فرض کنید

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} ۱ \\ x \\ x^۲ \end{pmatrix}$$

یک پایهٔ مرتب برای $P_۳$ باشد و پایهٔ مرتب دیگر به‌صورت

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} ۲x^۲ - x + ۳ \\ x^۲ - ۱ \\ ۳x^۲ - ۲x + ۲ \end{pmatrix}$$

داده شده است. تبدیل خطی $T : P_۳ \to P_۳$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(p(x)) = p'(x) + ۲p(x).$$

(آ) ماتریس استاندارد تبدیل خطی T نسبت به پایهٔ $\mathcal{P}$ را بیابید.

(ب) ماتریس استاندارد تبدیل خطی T نسبت به پایهٔ $\mathcal{Q}$ را بیابید.

(ج) فرض کنید بردار $g(x) \in P_۳$ به‌طوری‌که بردار مختصاتش نسبت به $\mathcal{Q}$ برابر است با

$$[g(x)]_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}.$$

$[T(g(x))]_{\mathcal{Q}}$ را بیابید و همچنین $g(x)$ و $T(g(x))$ را به‌صورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathcal{Q}$ بنویسید.
(پیشنهاد می‌شود وارون ماتریس‌ها را با استفاده از قاعده‌ی کرامر بدست آورید.)

پاسخ

(آ) کافی است T را روی بردارهای پایه اعمال کنیم و نتایج را برحسب $\mathcal{P}$ بنویسیم.

$$T(۱) = ۰ + ۲ \cdot ۱ = ۲ \quad \Longrightarrow \quad [T(۱)]_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix},$$

$$T(x) = ۱ + ۲x \quad \Longrightarrow \quad [T(x)]_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix},$$

$$T(x^۲) = ۲x + ۲x^۲ \quad \Longrightarrow \quad [T(x^۲)]_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۲ \end{pmatrix}.$$

پس ماتریس T نسبت به پایهٔ $\mathcal{P}$ برابر است با

$$T_P = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}.$$

(ب) ستون‌های ماتریس $S_{\mathcal{Q}\to\mathcal{P}}$، مختصات بردار های پایه‌ی $\mathcal{Q}$ نسبت به $\mathcal{P}$ هستند.

$$q_۱ = ۲x^۲ - x + ۳ \quad \Rightarrow \quad [q_۱]_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

$$q_۲ = x^۲ - ۱ \quad \Rightarrow \quad [q_۲]_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$q_۳ = ۳x^۲ - ۲x + ۲ \quad \Rightarrow \quad [q_۳]_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} ۲ \\ -۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

پس:

$$S = S_{\mathcal{Q}\to\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}.$$

ابتدا دترمینان S را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \det(S) &= ۳\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} - (-۱)\begin{vmatrix} -۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} + ۲\begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} \\ &= ۳(۰ \times ۳ - (-۲) \times ۱) - (-۱)(-۱ \times ۳ - (-۲) \times ۲) + ۲(-۱ \times ۱ - ۰ \times ۲) \\ &= ۳(۲) - (-۱)(-۳ + ۴) + ۲(-۱) = ۶ + ۱ - ۲ = ۵ \end{aligned}$$

حال ماتریس معکوس با قاعده کرامر:

$$S^{-۱} = \frac{۱}{\det(S)}\operatorname{adj}(S)$$

$$\text{ماتریس الحاقی} : \quad \operatorname{adj}(S) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & -۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} ۲ & ۵ & ۲ \\ -۱ & ۵ & ۴ \\ -۱ & -۵ & -۱ \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad S^{-۱} = \begin{pmatrix} \frac{۲}{۵} & ۱ & \frac{۲}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} & ۱ & \frac{۴}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} & -۱ & -\frac{۱}{۵} \end{pmatrix} \quad \text{(با استفاده از کرامر)}$$

در نتیجه ماتریس T نسبت به پایه‌ی $\mathcal{Q}$ برابر است با

$$T_{QQ} = S^{-۱}T_{PP}S = \begin{pmatrix} \frac{۲۸}{۵} & ۲ & \frac{۲۶}{۵} \\ \frac{۲۱}{۵} & ۴ & \frac{۳۲}{۵} \\ -\frac{۱۹}{۵} & -۲ & -\frac{۱۸}{۵} \end{pmatrix}.$$

(ج) داریم

$$[g(x)]_{\mathcal{P}} = S[g(x)]_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ \\ -۴ \\ ۶ \end{pmatrix}$$

$$g(x) = -۱ \times ۱ - ۴ \times x + ۶ \times x^۲ = ۶x^۲ - ۴x - ۱$$

حال مختصات $T(g(x))$ را بر حسب پایه‌ی $\mathcal{Q}$ بدست می‌آوریم.

$$[T(g(x))]_{\mathcal{Q}} = T_{QQ}[g(x)]_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} \frac{۳۲}{۵} \\ \frac{۷۴}{۵} \\ -\frac{۲۶}{۵} \end{pmatrix}$$

با استفاده از ماتریس تبدیل پایه‌ی S، این مختصات را به پایه‌ی $\mathcal{P}$ می‌بریم.

$$[T(g(x))]_{\mathcal{P}} = S[T(g(x))]_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{۳۲}{۵} \\ \frac{۷۴}{۵} \\ -\frac{۲۶}{۵} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۶ \\ ۴ \\ ۱۲ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(g(x)) = ۱۲x^۲ + ۴x - ۶$$

پرسش ۵ فرض کنید $T : V \to V$ و B, B' دو پایه دلخواه برای V هستند. نشان دهید اگر ماتریس‌های X, Y به ترتیب نمایش ماتریسی T در پایه‌های B, B' باشند، آنگاه جمع اعداد روی قطر ماتریس‌های X و Y با هم برابرند.

پاسخ می‌خواهیم نشان دهیم که مجموع درایه‌های روی قطر (Trace) ماتریس نمایش یک تبدیل خطی T در هر دو پایه‌ی دلخواه برابر است.

فرض کنید X ماتریس نمایش T در پایه‌ی B و Y ماتریس نمایش T در پایه‌ی B' باشد. اگر P ماتریس تغییر پایه از B' به B باشد، آنگاه داریم:

$$Y = P^{-۱}XP$$

حال باید نشان دهیم:

$$\mathrm{Tr}(Y) = \mathrm{Tr}(X)$$

از خاصیت چرخه‌ای بودن Trace استفاده می‌کنیم که بیان می‌کند برای هر دو ماتریس A, B از مرتبه‌ی مناسب داریم:

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

در نتیجه:

$$\mathrm{Tr}(Y) = \mathrm{Tr}(P^{-۱}XP) = \mathrm{Tr}(XPP^{-۱}) = \mathrm{Tr}(XI) = \mathrm{Tr}(X)$$

پس مقدار Trace مستقل از انتخاب پایه است و برای هر دو پایه‌ی B و B' برابر است. یعنی مجموع درایه‌های روی قطر ماتریس تبدیل T در هر دو پایه برابر خواهد بود.

$$\boxed{\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(Y)}$$

پرسش ۶ اگر بدانیم ماتریس A وجود دارد طوری که $A^۳ = ۲I$، آن گاه نشان دهید ماتریس B که مطابق زیر تعریف می‌شود، وارون‌پذیر است.

$$B = A^۲ - ۲A + ۲I$$

پاسخ برای اثبات وارون‌پذیری B کافی است نشان دهیم:

$$det(B) \neq ۰$$

مطابق تعریف سوال:

$$B = A^۲ - ۲A + ۲I = A^۲ - ۲A + A^۳ = A(A^۲ + A - ۲I) = A(A + ۲I)(A - I)$$

همچنین از $A^۳ = I$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$I = (\tfrac{۱}{۲}A^۲)(A) \implies det(A) \neq ۰$$
$$I = A^۳ - I = (A - I)(A^۲ + A + I) \implies det(A - I) \neq ۰$$
$$A^۳ + ۸I = ۱۰I \implies (A + ۲I)(A^۲ - ۴A + ۴I) = ۱۰I \implies det(A + ۲I) \neq ۰$$

در نتیجه:

$$det(B) = det(A) * det(A - I) * det(A + ۲I) \neq ۰$$

و از این نتیجه می‌شود که ماتریس B تعریف شده وارون‌پذیراست.

پرسش ۷ برای دو ماتریس وارون‌پذیر A و B با درایه های عضو اعداد حقیقی اگر داشته باشیم: $(A + B)^{-۱} = A^{-۱} + B^{-۱}$، آن گاه نشان دهید: $det(A) = det(B)$.

پاسخ با ضرب $(A + B)$ در طرفین تساوی فرض سوال:

$$\begin{aligned} &(A + B)(A + B)^{-۱} = (A + B)(A^{-۱} + B^{-۱}) \\ \implies &I = AA^{-۱} + AB^{-۱} + BA^{-۱} + BB^{-۱} = ۲I + AB^{-۱} + BA^{-۱} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$AB^{-۱} + BA^{-۱} = -I$$

حال تعریف می‌کنیم $C := AB^{-۱}$ و در نتیجه $C^{-۱} = BA^{-۱}$
با بازنویسی رابطه‌ی بدست آمده بر حسب C و $C^{-۱}$ داریم:

$$C + C^{-۱} = -I$$

حال در طرفین معادله C ضرب می‌کنیم:

$$C^۲ + I = -C \implies C^۲ + C + I = ۰$$

حال در طرفین $(C - I)$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &(C - I)(C^۲ + C + I) = (C^۳ - I) = ۰ \\ &\implies C^۳ = I \end{aligned}$$

در ادامه دترمینان گیری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\implies det(C^۳) = ۱ \implies det(C)^۳ = ۱ \implies det(C) = ۱ \\ &\implies det(C) = det(AB^{-۱}) = \tfrac{det(A)}{det(B)} = ۱ \\ &\implies det(A) = det(B) \end{aligned}$$

پرسش ۸ فرض کنید $۱ = d_۱ < d_۲ < \cdots < d_{۲m} = n$ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد طبیعی n باشند، که n مربع کامل نیست. ثابت کنید که دترمینانِ ماتریسِ زیر برابر است با:

$$\det(A) = n^m \left(۱ + \sum_{i=۱}^{۲m} d_i \right),$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} n + d_۱ & n & n & \cdots & n \\ n & n + d_۲ & n & \cdots & n \\ n & n & n + d_۳ & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n + d_{۲m} \end{bmatrix}.$$

پاسخ

برای همهٔ $i \neq j$ داریم $a_{ij} = n$ و برای هر i داریم $a_{ii} = n + d_i$. پس می‌توان نوشت:

$$A = D + nJ,$$

که در آن $D = \mathrm{diag}(d_۱, d_۲, \ldots, d_{۲m})$ و J ماتریسِ همه‌یک‌ها است (یعنی $J = uu^T$ برای $u = (۱, ۱, \ldots, ۱)^T$).

اکنون از فرمول دترمینان استفاده می‌کنیم:

$$\det(D + n\,uu^T) = \det(D)\,\big(۱ + n\,u^T D^{-۱} u\big).$$

از آنجا که $\det(D) = \prod_{i=1}^{2m} d_i$ و $u^T D^{-1} u = \sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{d_i}$، داریم:

$$\det(A) = \Big(\prod_{i=1}^{2m} d_i\Big)\Big(1 + n\sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{d_i}\Big).$$

چون مقسوم‌علیه‌های n به‌صورت جفت‌های $(d_i,\, n/d_i)$ هستند، می‌دانیم که:

$$n\sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{d_i} = \sum_{i=1}^{2m} d_i.$$

جای‌گذاری در رابطهٔ بالا نتیجه می‌دهد:

$$\det(A) = \Big(\prod_{i=1}^{2m} d_i\Big)\Big(1 + \sum_{i=1}^{2m} d_i\Big).$$

از سوی دیگر، چون حاصل‌ضرب تمامِ مقسوم‌علیه‌های n برابر n^m است، در نهایت داریم:

$$\boxed{\det(A) = n^m\Big(1 + \sum_{i=1}^{2m} d_i\Big)}.$$

اثبات کامل شد.

پرسش ۹ فرض کنید $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ و داشته باشیم $A^2 + B^2 = 0$. ثابت کنید برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\det(aA + bB) = 0.$$

پاسخ

کافی است نشان دهیم برای هر عدد حقیقی x مقدار $\det(A + xB)$ برابر صفر است. زیرا اگر این ادعا برقرار باشد، برای $a \neq 0$ خواهیم داشت

$$\det(aA + bB) = a^3 \det\big(A + \tfrac{b}{a}B\big) = 0,$$

و اگر $a = 0$ آنگاه $\det(bB) = b^3 \det(B) = 0$ (که بعداً نشان می‌دهیم $\det(B) = 0$).

ابتدا از فرض $A^2 + B^2 = 0$ با گرفتن دترمینان می‌نویسیم:

$$\det(A^2) = \det(-B^2) = (-1)^3 \det(B^2) = -\det(B^2).$$

بنابراین $\det(A)^2 = -\det(B)^2$. چون طرف چپ یک مربع غیرمنفی است و طرف راست منهای یک مربع است، تنها راه حل این است که هر دو مربع صفر باشند، و لذا

$$\det(A) = \det(B) = 0.$$

حال چندجمله‌ای $f(x) = \det(A + xB)$ را در نظر بگیرید. این یک چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی و درجهٔ حداکثر ۳ است و چون $\det(B) = 0$ ضریب x^3 صفر می‌شود، پس درجهٔ f حداکثر ۲ است. همچنین از $\det(A) = 0$ معلوم است $x = 0$ ریشهٔ f است.

اکنون محاسبه کنید:

$$(A + B)^2 + (A - B)^2 = 2(A^2 + B^2) = 0.$$

با همان استدلال دترمینان (همان‌طور که برای A, B به‌کار رفت) نتیجه می‌شود $\det(A + B) = \det(A - B) = 0$. بنابراین $x = 1$ و $x = -1$ نیز ریشه‌های f هستند.

پس f که درجهٔ آن حداکثر ۲ است دارای سه ریشهٔ متمایز $x = 0, 1, -1$ می‌باشد؛ این تنها زمانی ممکن است که چندجمله‌ای f همواره صفر باشد، و در نتیجه $f \equiv 0$. بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $\det(A + xB) = 0$.

با توجه به جملهٔ آغازین این بخش، این نتیجه برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ نیز برقرار است:

$$\det(aA + bB) = 0.$$

□