

# شبکه‌های اجتماعی و اقتصادی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

مریم رمضانی  
زمستان ۱۴۰۳



گراف و مسیریابی

## تمرین اول

تاریخ انتشار: ۹ اسفند ۱۴۰۳

۱. راه حل تمامی سؤالات را به صورت خوانا و دقیق ارائه دهید.

۲. برای حل سؤال دوم عملی می‌توانید از جویتر نوتبوک استفاده کنید و یا یک گزارش به همراه تمامی کدهای خود ارائه دهید.

## سوالات تئوری (۱۲۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۲۴ اسفند ۱۴۰۳

پرسش ۱ (۲۰ نمره) فرض کنید که گراف  $G$  یک گراف جهت‌دار<sup>۱</sup> با  $n$  رأس است باشد. ماتریس مجاورت در این گراف را توسط ماتریس  $A$  نشان می‌دهیم. ماتریس‌های  $M_i$  را بر روی فیلد  $\{0, 1\}$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_0 = I$$

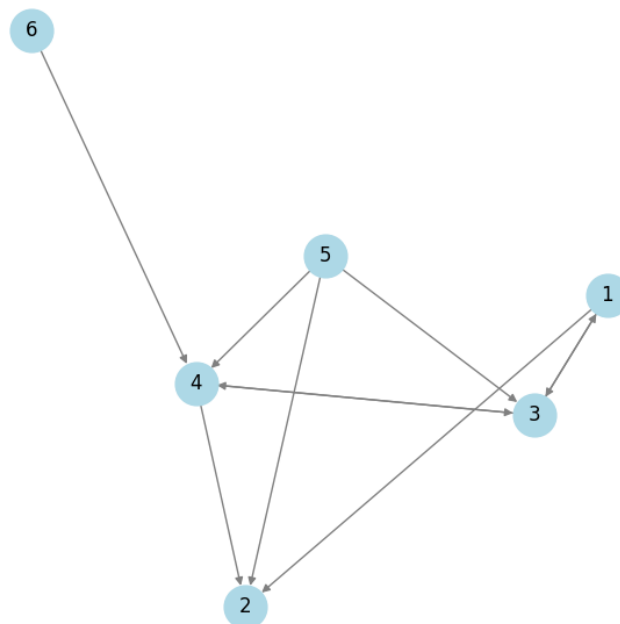
$$M_i = AM_{i-1} \quad \text{for } i > 0$$

(آ) نشان دهید که گراف  $G$  قویا همبند<sup>۲</sup> است اگر و فقط اگر تمام درایه‌های ماتریس زیر یک باشد.

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

(ب) توضیح دهید که هرکدام از ماتریس‌های  $M_i$  چه خاصیتی از گراف را توصیف می‌کنند.

(ج) با استفاده از این روش همبند<sup>۳</sup> بودن یا نبودن گراف را گزارش دهید.



راهنمایی: در فیلد  $\{0, 1\}$  جمع و ضرب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

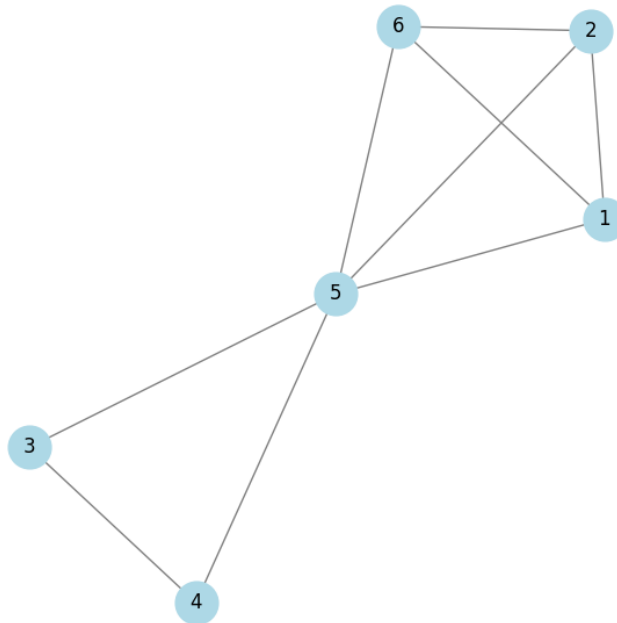
$$1 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 0 + 1 = 1, 0 + 0 = 0$$

$$0 \times 0 = 0, 0 \times 1 = 0, 1 \times 0 = 0, 1 \times 1 = 1$$

<sup>۱</sup> Directed graph  
<sup>۲</sup> Strongly connected  
<sup>۳</sup> Connected

**پرسش ۲ (۲۰ نمره)** گراف زیر به صورت تصادفی ساخته شده است. هرکدام از یال‌ها به احتمال  $p = \frac{1}{4}$  احتمال حضور در این گراف را داشته‌اند. با توجه به این گراف به سوالات زیر پاسخ دهید.

$n$  تعداد رئوس،  $m$  تعداد یال‌ها،  $c$  میانگین درجه و  $\rho$  برابر با نسبت تعداد یال‌ها به یال‌های گراف کامل با همین تعداد رأس است. همچنین چگال بودن یا نبودن ماتریس با توجه به حد  $\rho$  در بینهایت سنجیده می‌شود.



(آ) درجه هرکدام از رئوس را محاسبه نمایید.

(ب) درجه میانگین را محاسبه نمایید.

(ج) مقدار  $n \times c$  و  $2m$  را مقایسه نمایید.

(د) به ازای  $p$  ثابت که تابعی از  $n$  نیست نشان دهید که گراف تصادفی ساخته شده چگال<sup>۴</sup> است.

(ه) نشان دهید که اگر از  $p = \frac{1}{n}$  استفاده کنیم این ماتریس در بینهایت غیرچگال است.

**پرسش ۳ (۲۰ نمره)** نشان دهید که تعداد مثلث‌ها در هر گراف ساده با  $n$  رأس و  $m$  یال حداقل برابر است با

$$\frac{4m}{3n} \left( m - \frac{n^2}{4} \right)$$

**پرسش ۴ (۲۰ نمره)** یک گراف تورنمنت  $n$  رأسی یک گراف جهت‌دار با  $\binom{n}{2}$  یال است.

(آ) یک مسیر همیلتونی در این گراف یک مسیری است که از همس رئوس فقط یک بار می‌گذرد. اثبات کنید که یک تورنمنت  $n$  رأسی وجود دارد که حداقل  $\frac{n!}{2^{n-1}}$  مسیر همیلتونی دارد.

(ب) اثبات کنید که در یک گراف تورنمنت همواره رأسی وجود دارد که رئوس دیگر با حداکثر ۲ یال به آن مسیر جهت‌دار دارند.

**پرسش ۵ (۲۰ نمره)** یک گراف جهت‌دار بدون دوره<sup>۵</sup>  $D = \{V, E\}$  را در نظر بگیرید. در این گراف یک زنجیر به صورت مجموعه‌ای ترتیبی از رئوس  $v_1, \dots, v_i$  است که به ازای هر  $v_i, v_{i+1}$  یالی از  $E$  وجود دارد. در مقابل آن پادزنجیر است که به صورت مجموعه‌ای از رئوس  $v_1, \dots, v_i$  است که به ازای هر  $v_i, v_j$  هیچ مسیر جهت‌داری بین این دو وجود نداشته باشد.

(آ) اثبات کنید که حداقل یک جایگشت ترتیبی از رئوس گراف  $D$  وجود دارد که برای هر یال  $e = (u, v)$ ، رأس  $u$  قبل از رأس  $v$  آمده باشد.

(ب) نشان دهید که یک گراف جهت‌دار بدون دور  $D$  حداقل یک زنجیر یا پادزنجیر دارد.

(ج) نشان دهید که اندازه بزرگ‌ترین پادزنجیر برابر با کمترین تعداد زنجیرهایی است که نیاز داریم تا همه‌ی رئوس پوشش داده شوند.

## سوالات عملی (۴۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۲۴ اسفند ۱۴۰۳

Dense<sup>۴</sup>  
DAG<sup>۵</sup>

**پرسش ۱** (۲۰ نمره) تن تن در حال فرار از مافیای شهر است. او در یک رأس از یک گراف بدون جهت و وزن دار  $G$  بیدار می شود و به سرعت متوجه می شود که باید به سمت یک رأس خاص  $v$  حرکت کند. مافیای شهر اما خانه های زیادی در این گراف دارد و در تعداد زیادی رأس حضور دارند. آن ها از تمامی این رؤس به صورت همزمان شروع به حرکت می کنند و به دنبال تن تن هستند. در تعدادی از رؤس این گراف ماشین هایی برای مافیا تعبیه شده است که اگر به آن برسند می توانند یال های گراف را در نصف زمان طی کنند. همینطور مافیایا و تن تن می توانند این انتخاب را بکنند که در یک لحظه هیچ حرکتی نکنند و در رأسی که هستند بمانند. تن تن برنده ی این بازی است اگر قبل از اینکه در هیچ رأسی قبل از  $v$  با مافیایا در یک رأس نباشد و در نهایت به  $v$  برسد. به تن تن کمک کنید که بداند با فرض دانش مافیا از گراف ها آیا شانس برای برنده شدن دارد یا خیر.

**پرسش ۲** (۲۰ نمره) اطلاعات گراف  $G$  را از فایل graph.gml با استفاده از networkx بارگزاری کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید و گزارشی از جواب خود تهیه کنید.

- (آ) تعداد یال ها، رؤس و جهت دار بودن یا نبودن گراف را چاپ کنید.
  - (ب) میانگین درجه و چگالی را گزارش دهید. تعداد مؤلفه های همبند گراف را مشخص کنید. اگر گراف جهت دار است تعداد مؤلفه های قویا همبند و همبند ضعیف را گزارش کنید.
  - (ج) اندازه بزرگترین مؤلفه همبند را گزارش کنید.
  - (د) هیستوگرامی از توزیع درجه رؤس رسم کنید و چگال بودن یا نبودن را با توجه به این هیستوگرام توجیه کنید.
  - (ه) مرکزیت درجه، بینابینی، نزدیکی و بردار ویژه را در این گراف بررسی کنید.
  - (و) برای هر نوع از مرکزیت ۵ تا از برترین گره های آن را بیابید.
  - (ز) در دو بزرگترین مؤلفه ی این گراف میانگین کوتاه ترین مسیر و قطر آن را گزارش کنید.
  - (ح) نقاط قطع را در این گراف پیدا کنید.
  - (ط) بزرگترین و کوچکتری PC گراف را به دست آورید
- راهنمایی: نقاط قطع نقاطی هستند که حذف آن ها باعث زیاد شدن تعداد مؤلفه های گراف می شود.