

آزمون میان‌ترم
آمار و احتمال مهندسی

اردیبهشت ۱۴۰۳

مدرس: امیر نجفی

توضیحات:

* زمان کل امتحان ۱۳۰ دقیقه است. همچنین، امتحان شامل ۵ سوال است.

سوال (۱) سیستم عامل مشکل‌دار! (۵ نمره):

یک رایانه که دارای حافظه‌ای به طول n بیت است توسط یک سیستم عامل ناکارآمد مدیریت می‌شود. سه برنامه مجزا به صورت مستقل در حال اجرا بر روی رایانه هستند و هر سه بر روی خانه‌های حافظه آن یادداشت می‌کنند. هیچ برنامه‌ای، بر روی یک خانه خاص از حافظه بیش از یک بار نمی‌نویسد. اما سیستم عامل مراقب اینکه دو یا چند برنامه مختلف بر روی هیچ خانه‌ای بیش از یک بار ننویسند نیست! در انتهای اجرای برنامه‌ها، اگر مشخص شود که روی حتی یک خانه حافظه بیش از یک بار نوشته شده است، رایانه crash می‌کند...

الف) فرض کنید که سه برنامه فوق به صورت پشت سر هم اجرا شوند. در این صورت، برنامه اول تعداد L_1 خانه از حافظه n تایی را به صورت تصادفی انتخاب کرده و روی آنها می‌نویسد، اما با مابقی کاری ندارد. برنامه دوم نیز مستقل از اینکه اولی کدام خانه‌ها را انتخاب کرده بوده، همین کار را با L_2 خانه حافظه انجام می‌دهد. در نهایت نیز برنامه سوم مستقل از دوتای قبلی، فرآیند مشابهی را با L_3 خانه حافظه تکرار می‌کند. فرض کنید $L_1 + L_2 + L_3 \leq n$. احتمال اینکه روی هیچ خانه‌ای از حافظه بیش از یک بار نوشته نشده باشد چقدر است؟

ب) حال فرض کنید که سه برنامه به صورت همزمان، ولی مستقل از یکدیگر در حال اجرا باشند. برنامه اول روی هر یک از n خانه از حافظه، مستقل از سایر خانه‌ها و همچنین دو برنامه دیگر، با احتمال p یادداشت کرده و با احتمال $1 - p$ با آن خانه کاری ندارد. برنامه دوم و سوم نیز همین فرآیند را با احتمال‌های به ترتیب q و r تکرار می‌کنند. دقت کنید جز اینکه $p, q, r \in [0, 1]$ هیچ شرط دیگری نداریم. در این صورت، احتمال اینکه روی هیچ خانه‌ای از حافظه بیش از یک بار نوشته نشده باشد چقدر است؟

سوال (۲) جمع دو برنولی (۴ نمره):

فرض کنید هر کدام از متغیرهای تصادفی X, Y دارای توزیع برنولی باشند. هیچ اطلاعات دیگری از این دو متغیر در اختیار نداریم. به عبارتی، نمی‌دانیم که پارامترهای توزیع آنها چه هستند، نمی‌دانیم که آیا این دو متغیر «هم‌توزیع» هستند یا خیر، و حتی نمی‌دانیم مستقل هستند یا نه! اما در مورد توزیع متغیر تصادفی $Z = X + Y$ اطلاعات کافی در دسترس هست.

الف) فرض کنید توزیع Z بدین گونه باشد: Z با احتمال $0/7$ مقدار ۲، و با احتمال $0/3$ مقدار صفر را به خود می‌گیرد. در این صورت، آیا امکان دارد که متغیرهای تصادفی X, Y مستقل باشند؟

ب) حال فرض کنید توزیع Z بدین گونه باشد: Z با احتمال $0/6$ مقدار ۲، با احتمال $0/1$ مقدار ۱، و با احتمال $0/3$ مقدار صفر را به خود می‌گیرد. در این صورت، آیا امکان دارد که متغیرهای تصادفی X, Y مستقل باشند؟ (اگر ممکن است مستقل باشند، مثال بیاورید. اگر نه، اثبات کنید.)

راهنمایی: می‌دانیم که معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه‌های حقیقی $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ است. اما اگر $b^2 - 4ac < 0$ ، آنگاه ریشه حقیقی ندارد.

سوال (۳) ساختن توزیع مشترکاً گاوسی (۳ نمره):

فرض کنید که یک منبع تولید متغیر تصادفی گاوسی $\mathcal{N}(0, 1)$ در اختیار داریم که می‌توانیم هر اندازه بخواهیم از آن نمونه‌های مستقل بگیریم. در این سوال بررسی می‌کنیم که چگونه می‌توان صرفاً با استفاده از این منبع، نمونه‌های دوتایی متناسب به یک توزیع «مشترکاً گاوسی» با ضریب

همبستگی دلخواه تولید کرد. فرض کنید که $U, V \sim \mathcal{N}(0,1)$ i.i.d. یک توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ باشند. با استفاده از این دو، دو متغیر تصادفی جدید X, Y را به شکل زیر می‌سازیم:

$$X = \sigma U, \quad Y = \sigma' (U \cos \theta + V \sin \theta)$$

- که در اینجا زاویه θ به همراه ضرایب مثبت $\sigma, \sigma' > 0$ پارامترهای دلخواه و یقینی هستند.
- الف) توزیع مشترک دو متغیر تصادفی (X, Y) مربوط به چه خانواده‌ای از توزیع‌هاست؟ چرا؟
- ب) توزیع‌های حاشیه‌ای دقیق X, Y را به صورت جداگانه پیدا کنید. یعنی بگویید از چه خانواده‌ای هستند، و پارامترهای آنان چه هستند.
- ج) ضریب همبستگی r میان X, Y بر حسب پارامتر θ چقدر است؟ (حالت‌های خاص $\theta = 0, \pi/2, \pi$ را بررسی کنید).

سوال ۴) بیشینه دو متغیر تصادفی ناهم‌توزیع (۵ نمره):

فرض کنید دو متغیر تصادفی X, Y توزیعی به شکل زیر داشته باشند:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{O.W.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{O.W.} \end{cases}$$

- الف) در این صورت، توزیع $\max(X, Y)$ را بیابید.
- ب) درست بودن توزیعی که بدست آورده‌اید را صحت‌سنجی کنید: نشان دهید که همواره نامنفی است، و مساحت زیر نمودار PDF در سرتاسر اعداد حقیقی برابر با ۱ است (شرط بهنجارش).

سوال ۵) انتخابم را حدس بزن! (۳ نمره):

دارا به دو متغیر تصادفی نمایی و مستقل X, Y با پارامترهای به ترتیب ۱ و ۳ دسترسی دارد (یعنی $X \sim \text{Exp}(1)$ و $Y \sim \text{Exp}(3)$). از میان این دو یکی را به صورت تصادفی و بدون ترجیح انتخاب کرده و سپس از خواهرش سارا می‌خواهد که انتخابش را حدس بزند. سارا در مورد چند و چون هر یک از توزیع‌ها اطلاع کامل دارد، اما در مورد انتخاب برادرش چیزی نمی‌داند. لذا پیش از آن که اطلاعات بیشتری به وی برسد بالطبع به این نتیجه خواهد رسید که هر یک از دو منبع ممکن است با احتمال مساوی انتخاب شده باشند.

سپس، دارا از منبعی که انتخاب کرده یک نمونه گرفته و آن را به سارا نشان می‌دهد، و دوباره از وی می‌خواهد حدسیاتش را ارزیابی کند. فرض کنید مقدار این نمونه را با a نشان بدهیم. در کمال تعجب، دارا مشاهده می‌کند که تخمین سارا از اینکه کدام منبع انتخاب شده است بعد از مشاهده a نیز تغییری نمی‌کند! و کماکان معتقد است انتخاب شدن هر یک از دو منبع احتمال‌های برابر دارند.

در صورتیکه سارا در محاسبات خود دچار اشتباه نشده باشد، مقدار a چقدر بوده است؟

موفق باشید.