حل نمونه‌سوالات میان‌ترم

آمار و احتمالات مهندسی
آذر ۱۴۰۲

نگارش: امیر نجفی

توجه:
- نوشتن تمامی این جزئیات بر روی پاسخ‌نامه الزامی نیست. صرفاً کافی است منظور رسانده شود. این پاسخ‌نامه تعمدا با جزئیات زیاد نوشته شده است.
- «توضیحات اضافی» در برخی سوال‌ها صرفاً هدف آموزشی دارند. لازم نیست در پاسخنامه بدان‌ها اشاره‌ای شده باشد.

جواب سوال ۱:

الف) بله، درست است. در صورتیکه مستقل باشند، داریم:

$$\mathbb{E}(XY) = \int\int xyf_{XY} = \int\int xyf_Xf_Y = \int xf_X \int yf_Y = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$$

ب) خیر. بر عکس مورد الف) درست نیست. به منظور تست استقلال در حالت کلی و بدون هیچ توضیح اضافی (مثل اینجا) تنها راه چک کردن $P(X,Y) = P(X)P(Y)$ است (برای اخذ نمره در همین حد کافی است).
توضیحات بیشتر: مثلاً فرض کنید X یک نرمال با میانگین صفر بوده، و داشته باشیم $Y = X^2$. در این صورت، فرض سوال برقرار است (یعنی $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$)، ولی دو متغیر تصادفی به وضوح مستقل نیستند.

ج) خیر، اشتباه است. در صورتیکه X, Y مشترکاً گاوسی باشند، توزیع $X \mid Y$ حتما گاوسی است، و میانگین آن تابعی خطی از Y خواهد بود. لذا این حالتی که مدنظر سوال است نمی‌تواند متناظر با حالت مشترکاً گاوسی باشد.

د) خیر، درست نیست. توزیع یکنواخت روی مربع $[0,1]^2$ به شرط استقلال X, Y بدست خواهد آمد. ولی می‌توانند مستقل نباشند. مثلاً حالت $X = Y$ نیز دارای همان توزیع‌های حاشیه‌ای است، ولی چگالی احتمال دوبعدی فقط روی خط تکین $x - y = 0$ مقدار غیر صفر دارد.

ه) بله، درست است. چون از یکدیگر مستقل هستند، پس Var تحت جمع شکسته می‌شود. لذا داریم:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_i \frac{X_i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_i)\frac{1}{i^2} = \mathrm{Var}(X_1)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} < +\infty\,.$$

پس واریانس وجود دارد و همگراست.

د) خیر، دیگر درست نیست. چون هیچ فرضی در مورد نحوه ارتباطشان با یکدیگر نشده، می‌توانید مثلاً فرض کنید:

$X_1 = X_2 = \ldots$

در این صورت داریم:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_i \frac{X_i}{i}\right) = \mathrm{Var}\left[X_1 \cdot \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\right] = \mathrm{Var}(X_1)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\right]^2 = +\infty\,.$$

که واگرا است.

جواب سوال ۲:

الف) در صورت انتخاب $m = 1$، بازی فقط یک بار انجام خواهد شد. در نتیجه شما به احتمال $\mathbb{P}\left(\text{lose}\right) = 1 - p$ خواهید باخت و چیزی نمی‌گیرید، و با احتمال $\mathbb{P}\left(\text{win}\right) = p$ یک میلیون تومان جایزه می‌برید. پس داریم:

$\mathbb{E}\left(\text{prize}\right) = \left(1-p\right)\times 0 + p\times 1 = p\,.$

پس جواب p است.

ب) در صورت انتخاب $m = 2$، بازی نهایتاً دو بار انجام خواهد شد. اگر خوش‌شانس باشید و دو بار پشت سر هم برنده شوید برنده ۱+۱=۲ میلیون تومان می‌شوید. احتمال این رخداد نیز به وضوح $p \times p = p^2$ است. در غیر این صورت نیز (باخت در مرحله اول، یا برد در مرحله اول و باخت در مرحله دوم) هیچ جایزه‌ای نمی‌برید. لذا برای میانگین جایزه کسب شده داریم:

$\mathbb{E}\left(\text{prize}\right) = p^2\times 2 + \left(1-p^2\right)\times 0 = 2p^2\,.$

پس جواب $2p^2$ است.

ج) برای واریانس جایزه کسب شده در قسمت ب) به این واقعیت توجه کنید که میزان جایزه برنده شده در این قسمت توزیعی مشابه با برنولی دارد. یعنی به احتمال $q = p^2$ برنده ۲ میلیون تومان می‌شوید، و با احتمال $1 - q = 1 - p^2$ برنده صفر میلیون تومان خواهید شد. لذا داریم:

$\text{prize} \sim 2 \times \text{Bern}\left(q, 1-q\right),$

و در نتیجه $\mathrm{Var}\left(\text{prize}\right) = 4\mathrm{Var}\left(\text{Bern}\left(q\right)\right)$.

در آخر کار به رابطه زیر می‌رسیم:

$\mathrm{Var}\left(\text{prize}\right) = 4q\left(1-q\right) = 4p^2\left(1-p^2\right)\,.$

پس جواب $4p^2\left(1-p^2\right)$ است.

د) در صورتیکه مسابقه را m مرحله انجام دهیم، به احتمال p^m برنده m میلیون تومان می‌شویم، و به احتمال $1 - p^m$ در یکی از مراحل خواهیم باخت و چیزی نمی‌بریم (دقت کنید فقط زمانی برنده می‌شویم که تمام m مرحله را مستقل از یکدیگر ببریم ـ هر اتفاقی غیر از این برابر با باخت است). لذا میانگین جایزه دریافتی برابر با mp^m خواهد بود.
حال سوال این است که به ازای چه مقداری از m این عبارت بیشینه می‌شود.

- حل این سوال چندین راه دارد که از هر کدام اقدام کنید و به جوابی درست برسید قابل قبول است.
- یکی از راه‌های ساده به صورت زیر است: فرض کنید $m = m^*$ جواب بهینه باشد. در این صورت m^* کوچکترین عددی است که به ازای آن خواهیم داشت:

$$m^* p^{m^*} \geq (m^* + 1) p^{m^*+1}$$

بعد از کمی ساده‌سازی به جواب

$$m^* = \left\lceil \frac{p}{1-p} \right\rceil$$

می‌رسیم.

سوال ۳:

داریم:

$$\mathbb{E}\left(X^4\right) = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4} m_X(t) \bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \bigg|_{t=0}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \frac{6\lambda}{(\lambda - t)^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \frac{24\lambda}{(\lambda - t)^5}$$

در نتیجه، جواب آخر به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbb{E}\left(X^4\right) = \frac{24}{\lambda^4}$$

سوال ۴:

الف) رأس شماره یک می‌تواند به صورت بالقوه به $n - 1$ رأس دیگر متصل باشد. هر اتصال (یال) مستقل از سایر یال‌ها با احتمال p برقرار است. لذا درجه رأس شماره یک برابر با جمع $n - 1$ متغیر تصادفی i.i.d. با توزیع $\text{Bern}\left(p\right)$ است، که می‌دانیم یک توزیع دوجمله (Binomial) با پارامترهای $n - 1$ و p خواهد داشت. در نتیجه داریم:

$$\mathbb{P}\left(\text{Deg}_1 = k\right) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}, \;\; k = 0,1,\ldots, n-1$$

ب) می‌دانیم که یک زیرگراف مشخص از گراف هم‌بند است، یعنی بین هر دو رأس آن یک مسیر پیوسته وجود دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید که این زیرگراف شامل رئوس ۱ تا $n-1$ باشد.

در این صورت، کل گراف زمانی هم‌بند خواهد بود که رأس n به حداقل یکی از این رئوس قبلی متصل باشد. چرا که:

- اگر رأس n به هیچ رأس دیگری وصل نباشد، پس از این رأس هیچ مسیری به رئوس دیگر وجود ندارد و گراف هم‌بند نیست.
- از طرفی، اگر رأس n به حداقل یک رأس دیگر وصل باشد، به دلیل هم‌بند بودن زیرگراف ۱ تا $n-1$، به همه رئوس دیگر نیز متصل است.

واقعه هم‌بند بودن کل گراف را با All connected نشان می‌دهیم. همچنین، واقعه «قطع بودن رأس n از همه رئوس دیگر» را نیز با A نشان خواهیم داد. در این صورت داریم:

$$\mathrm{P}\left(\text{All connected}\right) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - (1-p)^n \,,$$

که به دلیل استقلال میان برقراری/عدم برقراری یال‌ها برقرار است. پس جواب نهایی سوال $1-(1-p)^n$ است.

سوال ۵:

الف) نمونه‌های i.i.d. گرفته شده از X را با متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ نشان می‌دهیم. در این صورت طبق تعریف صورت سوال داریم:

$$\hat{B} = \max_i X_i$$

لذا خطای $\hat{B}$ در تخمین B زمانی بزرگ‌تر از مقدار مثبت ϵ خواهد شد که همه متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ از مقدار $B-\epsilon$ کوچک‌تر یا مساوی باشند. چون توزیع X_iها مستقل از یکدیگر و به صورت یکنواخت در بازه $[0,B]$ است، داریم:

$$\mathbb{P}(X_i < B - \epsilon) = \frac{B-\epsilon}{B}$$

در نتیجه:

$$\mathbb{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n < B - \epsilon) = \left(\frac{B-\epsilon}{B}\right)^n = \left(1 - \frac{\epsilon}{B}\right)^n$$

یا با عبارتی، جواب نهایی قسمت الف خواهد شد:

$$\mathbb{P}\left(B - \hat{B} > \epsilon\right) = \left(1 - \frac{\epsilon}{B}\right)^n.$$

ب) در قسمت الف) احتمال بروز خطایی با اندازه ϵ یا بزرگ‌تر از آن را بدست آوردیم. در این قسمت کافی است این احتمال را برابر با δ قرار دهیم (تا احتمال بروز خطایی کوچک‌تر از ϵ برابر با $1-\delta$ شود)، و سپس حداقل n لازم برای اینکه این اتفاق بیافتد را حساب کنیم.

در این صورت، داریم:

$$\mathbb{P}\left(B-\hat{B}>\epsilon\right)=\left(1-\frac{\epsilon}{B}\right)^{n}\leq\delta \quad\Rightarrow\quad n\geq\log\frac{1}{\delta}/\log\left(\frac{1}{1-\epsilon/B}\right)$$

توضیحات اضافی: اگر $B \gg \epsilon$، آنگاه داریم $\log\left(\frac{1}{1-\epsilon/B}\right)\simeq\epsilon/B$ و در نتیجه کران بالا به شکل زیر در خواهد آمد:
$n\geq\frac{B}{\epsilon}\log\frac{1}{\delta}$

سوال ۶:

الف) واضح است که وابسته هستند. برای مثال در صورتیکه بدانیم $Z=2$، بدین معنی است که با احتمال یک داشته‌ایم $X=Y=1$ و لذا مقدار $W=X-Y$ با احتمال یک برابر با صفر خواهد شد. اما در صورت ندانستن این مقدار، توزیع W یک چگالی احتمال مثلثی بین ۱− و ۱+ دارد. پس دانستن مقداری یکی از متغیرهای Z,W به ما در مورد دیگری اطلاعات (information) می‌دهد.
همین برای جواب به این سوال کافی است.

توضیحات اضافی:
فرض کنید که X,Y مستقل و هم‌توزیع بوده، ولی توزیع آنان به جای یکنواخت به صورت $\mathcal{N}(0,1)$ باشد. در آن صورت متغیرهای تصادفی X,Y مشترکاً گاوسی هستند (چون هر کدام گاوسی بوده و از هم مستقل‌اند)، پس ترکیبات خطی آنان نیز نسبت به یکدیگر مشترکاً گاوسی هستند.
از طرفی می‌توان دید که چون میانگین W,Z هر دو صفر است، داریم
$\operatorname{cov}(W,Z)=\mathbb{E}\left((X+Y)(X-Y)\right)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}\left(Y^2\right)=0.$
پس، W,Z متغیرهای تصادفی مشترکاً گاوسی و در عین حال ناهمبسته هستند. در نتیجه مستقل‌اند.
یعنی توزیع اولیه X,Y در مستقل بودن/نبودن W,Z تاثیر مستقیم دارند.

سوال ۷:

الف) این مسئله چندین راه‌حل دارد، که در اینجا صرفاً یکی را می‌نویسیم. فرض کنید که متغیر تصادفی مترادف با «یکی مانده به بزرگ‌ترین» از بین $X_1,\ldots,X_n$ را با Z نمایش دهیم. در این صورت، برای عدد دلخواه z و مقدار مثبت و دیفرانسیلی h داریم:

$$\mathbb{P}\left(z\leq Z\leq z+h\right)=\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\mathbb{P}\left(X_i>z+h\ ,\ z\leq X_j\leq z+h\ ,\ X_{\text{others}}<z\right)\quad\text{for } h\to 0$$

به عبارت دیگر، می‌بایست از بین $X_1,\ldots,X_n$ یکی از $z+h$ بزرگ‌تر باشد، یکی در بازه خاص $[z,z+h]$ بیافتد، و مابقی از z کوچک‌تر شوند. بالطبع اتفاق فوق می‌تواند $n(n-1)$ جایگشت مختلف داشته باشد: n انتخاب برای بیشینه، و $n-1$ انتخاب برای یکی مانده به بیشینه. که باید روی احتمال همگی آنان جمع گرفته شود، چون اشتراکی با یکدیگر ندارند.

از طرفی، به دلیل استقلال و هم توزیع بودن Xها، برای هر i و j (با $i \neq j$) داریم:

$$\mathbb{P}\left(X_i > z + h \ , \ z \leq X_j \leq z + h \ , \ X_{\text{others}} < z\right) = \left(1 - F_X(z + h)\right) \times \mathbb{P}\left(z \leq X \leq z + h\right) \times F_X^{n-2}(z)$$

در نتیجه داریم:

$$f_Z(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}\left(z \leq Z \leq z + h\right)}{h} = n(n-1) \cdot f_X(z) \cdot (1 - F_X(z)) \cdot F_X^{n-2}(z)$$