سوال ۱

الف) یک مسئله شمارشی ساده است:

تعداد کل حالات : $\binom{n}{L_1}\times\binom{n}{L_2}\times\binom{n}{L_3} = \dfrac{(n!)^3}{\prod_{i=1}^{3}(L_i!)(n-L_i)!} \triangleq N_{tot}$

تعداد کل حالاتی که منجر به شروع مجدد رایانه نمی‌شوند : $\binom{n}{L_1}\binom{n-L_1}{L_2}\binom{n-L_1-L_2}{L_3}$

چون در این صورت، خانه‌ای که پیش‌تر توسط یک برنامه انتخاب شده است، دوباره انتخاب نمی‌شود.

$$\frac{n!}{L_1!(n-L_1)!}\times\frac{(n-L_1)!}{L_2!(n-L_1-L_2)!}\times\frac{(n-L_1-L_2)!}{L_3!(n-\sum_{i=1}^{3}L_i)!} =$$

$$\frac{n!}{(n-\sum_{i=1}^{3}L_i)!\prod_{i=1}^{3}L_i!} \triangleq N_{OK}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{not-crash} = \frac{N_{OK}}{N_{Tot}} = \frac{\prod_{i=1}^{3}(n-L_i)!}{(n!)^2(n-\sum_{i=1}^{3}L_i)!}}$$

ب) چون خانه‌های حافظه مستقل از یکدیگر بررسی شوند، می‌توان روی یک خانه تمرکز کرد و سپس
به راحتی به $\underline{n}$ خانه تعمیم داد.

$A \leftarrow$ احتمال اینکه روی یک خانه خاص
بیش از $\underline{1}$ بار نوشته نشود.

$$\Rightarrow P_{not-crash} = A^n$$

از طرفی داریم:

$$A = P(\text{اصلاً نوشته نشود}) + P(\text{دقیقاً ۱ بار نوشته شود})$$

$$= (1-p)(1-q)(1-r) + p(1-q)(1-r) + q(1-p)(1-r) + r(1-p)(1-q)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{not-crash} = \left[(1-p)(1-q)(1-r) + p(1-q)(1-r) + q(1-p)(1-r) + r(1-p)(1-q)\right]^n}$$

سؤال 2)

الف)

$$P(Z=0) = P(X=0 \,,\, Y=0) > 0$$

$\Rightarrow$ هر دو متغیر X و Y می توانند صفر شوند.

$$P(Z=2) = P(X=1, Y=1) > 0$$

$\Rightarrow$ هر دو متغیر X و Y می توانند یک شوند.

لذا، اگر مستقل می بودند حتما باید $Z=1$ نیز احتمال غیر صفر می داشت، چون

$$Z=1 \Rightarrow \begin{cases} X=0,\ Y=1 \\ \text{or} \\ X=1,\ Y=0 \end{cases}$$

پس قطعاً مستقل نیستند!

ب) فرض کنید بتوانند مستقل باشند:

$X \sim Bern(p)$ $\quad X \perp\!\!\!\perp Y$

$Y \sim Bern(q)$

$$\Rightarrow P(Z=2) = P(X=Y=1) = pq$$

$$P(Z=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) = p(1-q) + q(1-p) = p+q-2pq$$

$$\Rightarrow \begin{cases} pq = 0.6 \\ p+q-2pq = 0.1 \end{cases} \Rightarrow p+q = 0.1 + 2pq = 0.1 + 2\times 0.6 = 1.3$$

$$q = \frac{0.6}{p}$$

$$\Rightarrow p + \frac{0.6}{p} = 1.3 \Rightarrow p^2 - 1.3p + 0.6 = 0$$

$$\Delta = (1.3)^2 - 4 \times 0.6 \times 1 < 0 \Rightarrow$$

معادله جواب ندارد

نمی توانند مستقل باشند

سؤال ۳)

الف) V و U گاوسی و مستقل هستند. پس توزیع مشترک گاوسی دارند.

X و Y دو ترکیب خطی V و U هستند. پس این دو نیز توزیع **مشترک گاوسی** دارند.

ب) توزیع X و Y هر کدام به صورت جداگانه گاوسی است.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sigma U) = \sigma\,\mathbb{E}(U) = 0$$

$$\mathbb{E}\left((X-\mu_X)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(\sigma^2 U^2) = \sigma^2\,\mathbb{E}(U^2) = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \boxed{X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left[\sigma'(U\cos\theta + V\sin\theta)\right] = \sigma'\cos\theta\,\mathbb{E}(U) + \sigma'\sin\theta\,\mathbb{E}(V)$$

$$= 0$$

$$\mathbb{E}\left[(Y-\mu_Y)^2\right] = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\left[\sigma'^2\left[U^2\cos^2\theta + V^2\sin^2\theta + UV\sin\theta\cos\theta\right]\right]$$

$$= \sigma'^2\cos^2\theta + \sigma'^2\sin^2\theta + \sigma'^2\sin\theta\cos\theta\,\underbrace{\cancel{\mathbb{E}[UV]}}_{0} = \sigma'^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma'^2)}$$

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}(XY)}{\sigma\sigma'} = \frac{\sigma\sigma'\,\mathbb{E}[U^2]\cos\theta + \sigma\sigma'\,\mathbb{E}(UV)\sin\theta}{\sigma\sigma'}$$

$$= \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \cos\theta}$$

$$\begin{cases} \theta = 0 \rightarrow \text{fully-correlated} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{independent} \\ \theta = \pi \rightarrow \text{fully-anti correlated} \end{cases}$$

سؤال ۴)

الف)

$$Z \triangleq \max(X,Y)$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}(z \le Z \le z+h)}{h}$$

$$= P(z \le X \le z+h)P(Y \le z) + P(z \le Y \le z+h)P(X \le z) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = f_X(z)\, F_Y(z) + f_Y(z) F_X(z)$$

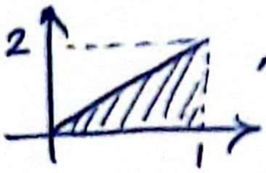
$$= \Big\{ 2z \underbrace{\int_0^z 2(1-y)dy}_{(2z-z^2)} + 2(1-z)\underbrace{\int_0^z 2x\,dx}_{z^2} \Big\} \mathbb{1}(0 \le z \le 1)$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = 2z(2z-z^2) + 2z^2(1-z) =$$

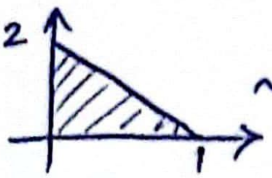
$$2z^2\left[2 - z + 1 - z\right] = 2z^2(3-2z)$$

$$\Rightarrow \boxed{f_Z(z) = 2z^2(3-2z)}$$

ب)



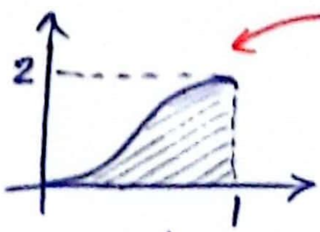
~X



~Y

$\Longrightarrow \max(X,Y) \sim$

لازم نبود رسم شود.



$$\int_0^1 2z^2(3-2z)dz = \int_0^1 6u^2 du - \int_0^1 4u^3 du = \boxed{2-1=1}$$

سؤال ۵)

$X \triangleq$ متغیر تصادفی دارا

$$\Rightarrow X \mid choice = 1 \sim \mathrm{Exp}(1)$$

$$X \mid choice = 2 \sim \mathrm{Exp}(3)$$

$$\Rightarrow P(Choice \mid X) = \frac{f(X \mid choice)\, P(Choice)}{f(X)}$$

$$P(Choice) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ch = 1 \\ \frac{1}{2} & ch = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{3}{2} e^{-3x}$$

$$\Rightarrow P(Choice \mid X) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 3e^{-3x}} & \text{for } ch = 1 \\[2ex] \dfrac{3e^{-3x}}{e^{-x} + 3e^{-3x}} & \text{for } ch = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-a}}{e^{-a} + 3e^{-3a}} = \frac{3e^{-3a}}{e^{-a} + 3e^{-3a}} \Rightarrow$$

$$e^{-a} = 3e^{-3a} \Rightarrow e^{2a} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2} \ln 3}$$