



STUDIENARBEIT ZUM MODUL *MATHEMATISCHE*
DENKSPORTAUFGABEN

Stefan Volz

Fakultät für angewandte Natur- und Geisteswissenschaften
Hochschule für angewandte Wissenschaften Würzburg-Schweinfurt
Studiengang Technomathematik
Matrikelnummer: 3519001
stefan.volz@student.fhws.de

19. Januar 2021, Wintersemester 2020/21

Abstract

Die Arbeit betrachtet kombinatorische, zahlentheoretische und geometrische Rätsel.

Inhaltsverzeichnis

1	Fibonacci's Hasen	2
1.1	Grundproblem	2
1.2	Verallgemeinerung 1	2
1.3	Verallgemeinerung 2	3
1.4	Lineare Rekurrenzgleichungen	4
2	Conways Dezimalzahl	6
3	Kreise	7
4	Ausgewählte Probleme aus <i>Problems for children from 5 to 15</i>	8
4.1	Nr. 19 – Würfel-Raupe	8
4.2	Nr. 36 – Kubische Differenz	10
4.3	Nr. 37 – Quintische und septische Differenzen	10
4.4	Primpotenzielle Differenzen	10

1 Fibonacci Hasen

1.1 Grundproblem

Wir betrachten zunächst das in [LL11, S. 46, Problem Nr. 57] formulierte Problem:

Problem 1.1. A man put a pair of rabbits in a place surrounded on all sides by a wall. The initial pair of rabbits (male and female) are newborn. All rabbit pairs are not fertile during the first month of life but give birth to one new male/female pair at the end of the second month and every month thereafter. How many pairs of rabbits will be there in a year?

bzw. auf Deutsch

Problem 1.2. Ein Mann platziert ein Paar neugeborener Hasen (Männchen und Weibchen) in einem umzäunten Gebiet. Alle Hasen Paare sind während ihres ersten Lebensmonats nicht geschlechtsreif, aber zeugen jeden Monat ab dem Ende ihres zweiten Lebensmonats ein neues Paar Hasen (Männchen und Weibchen). Wieviele Paare Hasen gibt es nach einem Jahr?

Lösung 1.3. Es seien $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Folgen, welche die Anzahl an Hasenpaaren bzw. die Anzahl an geschlechtsreifen Hasen im n -ten Monat beschreiben. Dann gilt $h_0 = 1, p_0 = 0$ (ein initiales, nicht-geschlechtsreifes Hasenpaar), $\forall n \in \mathbb{N}_0 : h_{n+1} = h_n + p_n$ (alle geschlechtsreifen Hasen produzieren pro Monat ein paar Hasen) sowie $\forall n \in \mathbb{N}_0 : p_{n+1} = h_n$ (Hasen benötigen einen Monat um aufzuwachsen). Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ direkt $h_{n+2} = h_{n+1} + p_{n+1} = h_{n+1} + h_n$, was zusammen mit der Anfangsbedingung $h_0 = 1, p_0 = 0 \implies h_1 = 1$ die bekannte Fibonacci-Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ ¹ liefert. Am Ende des Jahres(nach zwölf Monaten) existieren daher $\lceil \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{12} \rceil = 144$ Hasen - wobei $\lceil \cdot \rceil$ die Gaußklammer bezeichnet.

1.2 Verallgemeinerung 1

Wir modifizieren obiges Problem nun ein wenig:

Problem 1.4. Es seien $N \in \mathbb{N}$ paar kleiner Hasen gegeben. Alle Hasen sind innerhalb der ersten zwei Monate ihres Lebens nicht geschlechtsreif, produzieren jedoch ab dem Ende ihres dritten Lebensmonats jeden Monat ein Paar Hasen. Wieviele Hasen existieren nach $k \in \mathbb{N}_0$ Monaten?

Lösung 1.5. Es sei $h_0 = h_1 = N, \forall n \in \mathbb{N}_0 : h_{n+1} = h_n + p_n$ analog zu 1.1 definiert, für p_n gilt nun die Rekursionsgleichung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : p_{n+2} = h_n$. Wir definieren die formalen Potenzreihen $P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ und $H(x) := \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$. Wir multiplizieren zunächst $h_{n+1} = h_n + p_n$ und $p_{n+2} = h_n$ beidseitig mit x^{n+1} bzw. x^{n+2} und summieren anschließend von $n = 0$ beginnend beidseitig auf:

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (h_n + p_n) x^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} p_n x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n \quad (1)$$

$$\iff H(x) - h_0 = x(H(x) + P(x)) \quad \text{und} \quad P(x) - p_0 - p_1 x = x^2 H(x) \quad (2)$$

$$\iff H(x) = \frac{P(x) - p_0 - p_1 x}{x^2} \quad \text{und} \quad P(x) = \frac{H(x)(1-x) - h_0}{x} \quad (3)$$

$$\iff H(x) = -\frac{x(p_0 + p_1 x) + h_0}{x^3 + x - 1} \quad \text{und} \quad P(x) = \frac{(x-1)(p_1 x + p_0) - h_0 x^2}{x^3 + x - 1} \quad (4)$$

Die Koeffizienten der Taylorentwicklung in 0 der generierenden Funktion $H(x)$ liefern uns nun h_n . Betrachtet man die ersten Glieder der Taylorentwicklung so liegt folgende Gleichheit nahe:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : h_n = \frac{1}{n!} D^n H(0) = a_n h_0 + a_{n-1} p_0 + a_{n-2} p_1 \quad (5)$$

$$\text{mit } a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n-2k}{k} = e_1^T A^n e_1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 = (1, 0, 0)^T. \quad (6)$$

Da $\text{Rang}(A) = 3$ ist hierbei insbesondere für alle $n \in \mathbb{N}_0 : a_{-n}$ wohldefiniert.

¹OEIS Nr. A000045

²OEIS Nr. A078012

Beweis 1.6. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt $h_{n+2} = h_n + p_n, p_{n+2} = h_n$. Man verifiziert leicht, dass für $n \leq 2$ die Gleichung 5 gilt, sei daher $n > 2$. Dann folgt $p_n = h_{n-2} \implies h_{n+1} = h_{n-2} + h_n$. Setzen wir hier Gl. 5 ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
 h_{n+1} &= h_{n-2} + h_n \\
 \iff e_1^T A^{n+1} e_1 h_0 + e_1^T A^n e_1 p_0 + e_1^T A^{n-1} e_1 p_1 &\stackrel{!}{=} e_1^T A^{n-2} e_1 h_0 + e_1^T A^{n-3} e_1 p_0 + e_1^T A^{n-4} e_1 p_1 \\
 &\quad + e_1^T A^n e_1 h_0 + e_1^T A^{n-1} e_1 p_0 + e_1^T A^{n-2} e_1 p_1 \\
 \iff e_1^T (h_0(A^{n+1} - A^{n-2} - A^n) + p_0(A^n - A^{n-3} - A^{n-1}) + p_1(A^{n-1} - A^{n-4} - A^{n-2})) e_1 &\stackrel{!}{=} 0 \\
 \iff e_1^T (h_0 A^{n-2} + p_0 A^{n-3} + p_1 A^{n-4})(A^3 - A^2 - I_3) e_1 &\stackrel{!}{=} 0, \text{ mit } A^3 - A^2 - I_3 = 0 \\
 \iff 0 = 0
 \end{aligned}$$

Wobei $I_3 = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ die Einheitsmatrix des $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ bezeichnet. Somit ist bewiesen, dass Gleichung 5 tatsächlich eine Lösung der Rekursionsgleichung ist. \square

Nach k Monaten existieren mit $h_0 = N, p_0 = p_1 = 0$ also $h_k = e_1^T \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k + p_0 \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} + p_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{k-2} \right) e_1 \right) e_1$ Hasenpaare, von denen $p_k = h_{k-2}$ ausgewachsen sind.

1.3 Verallgemeinerung 2

Wir modifizieren obiges Problem ein weiteres mal:

Problem 1.7. Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ Paar kleiner, und $N \in \mathbb{N}_0$ Paar ausgewachsener Hasen gegeben. Alle Hasen sind innerhalb der ersten $M \in \mathbb{N}_0$ Monate ihres Lebens nicht geschlechtsreif, produzieren jedoch ab dem Ende ihres $M+1$ -ten Lebensmonats jeden Monat $G \in \mathbb{N}$ Paar Hasen. Wieviele Hasen existieren nach $m \in \mathbb{N}_0$ Monaten?

Das lineare System linearer Rekurrenzgleichungen zu obiger Aufgabe ist

$$\forall \eta \in \mathbb{N}_0 : h_{\eta+1} = h_\eta + G \cdot p_\eta \quad (7)$$

$$\forall \eta \in \mathbb{N}_0 : p_{\eta+M} = h_\eta \quad (8)$$

mit den Randbedingungen

$$h_0 = n + N, p_0 = \dots = p_{M-1} = N. \quad (9)$$

Mit diesen Verfahren wir analog zur ersten Verallgemeinerung und erhalten somit:

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} h_\eta x^\eta = x \sum_{\eta=0}^{\infty} (h_\eta + p_\eta) x^\eta \quad \text{und} \quad \sum_{\eta=M}^{\infty} p_\eta x^\eta = x^M \sum_{\eta=0}^{\infty} h_\eta x^\eta \quad (10)$$

$$\iff H(x) - h_0 = x(H(x) + GP(x)) \quad \text{und} \quad P(x) - \sum_{\eta=0}^M p_\eta x^\eta = x^M H(x) \quad (11)$$

$$\iff H(x) = \frac{P(x) - \sum_{\eta=0}^{M-1} p_\eta x^\eta}{x^M} \quad \text{und} \quad P(x) = \frac{H(x)(1-x) - h_0}{Gx} \quad (12)$$

$$\iff H(x) = - \frac{Gx \sum_{\eta=0}^{M-1} p_\eta x^\eta + h_0}{x^{M+1} + x - 1} \quad \text{und} \quad P(x) = \frac{(x-1) \sum_{\eta=0}^{M-1} p_\eta x^\eta - h_0 x^M}{Gx^{M+1} + x - 1} \quad (13)$$

Man überprüft leicht, dass es sich tatsächlich um eine Verallgemeinerung des vorherigen Problems handelt. Mittels Matlab lassen sich leicht einige Taylorpolynome bestimmen. Für $M = 2, G$ beliebig scheint für die Koeffizienten $a_v^{(2,G)}$ von h_0 in der Taylorentwicklung von F die Gleichung

$$a_v^{(2,G)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ G & 0 & 0 \end{pmatrix}^v$$

zu gelten. Allgemein gilt $a_0 = \dots = a_M = 1, \forall \eta > M : a_{\eta+1} = a_\eta + Ga_{\eta-M}$. Für $M = 3, G = 1$ bzw. $M = 4, G = 1$ sind

$$a_\nu^{(3,1)} = e_1^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\nu e_1, a_\nu^{(4,1)} = e_1^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\nu e_1$$

gute Kandidaten. Eine Verbindung und Verallgemeinerung dieser Schemata liefert

$$a_\nu^{(M,G)} = e_1^T \left(\frac{e_1}{G} \middle| \frac{I_M}{0} \right)^\nu e_1.$$

Es verbleibt das Problem der Bestimmung der M Koeffizienten $x_{(\nu,i)}^{(M,G)}, i \in \{0, \dots, M-1\}$ von p_i im ν -ten Term der Taylorentwicklung von H . Ein Blick auf die Taylorpolynome legt hierbei

$$x_{(\nu,i)}^{(M,G)} = Ga_{\nu-(i+1)}^{(M,G)} = Ge_1^T \left(\frac{e_1}{G} \middle| \frac{I_M}{0} \right)^{\nu-(i+1)} e_1 \quad (14)$$

nahe, womit sich im Ganzen

$$h_\nu = e_1^T \left(\sum_{k=0}^M y_k G^{1-\delta_{0,k}} \left(\frac{e_1}{G} \middle| \frac{I_M}{0} \right)^{\nu-k} \right) e_1, y_0 := h_0, \forall 0 < k < M : y_k := p_{k-1} \quad (15)$$

ergibt.

Beweis 1.8. Der Beweis beginnt analog zum speziellen Fall. Es sei $A := \left(\frac{e_1}{G} \middle| \frac{I_M}{0} \right)$. Kombinieren wir beide Ursprünglichen Rekurrenzgleichungen erhalten wir

$$h_{\nu+1} = h_\nu + Gh_{\nu-M} \quad (16)$$

$$\iff e_1^T \left(\sum_{k=0}^M y_k G^{1-\delta_{0,k}} A^{\nu+1-k} \right) e_1 \stackrel{!}{=} e_1^T \left(\sum_{k=0}^M y_k G^{1-\delta_{0,k}} A^{\nu-k} \right) e_1 + e_1^T \left(\sum_{k=0}^M y_k G^{1+1-\delta_{0,k}} A^{\nu-M-k} \right) e_1 \quad (17)$$

$$\iff e_1^T \left(\sum_{k=0}^M y_k G^{1-\delta_{0,k}} (A^{\nu-k+1} - A^{\nu-k} - GA^{\nu-k-M}) \right) e_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (18)$$

$$\iff e_1^T \left(\sum_{k=0}^M y_k G^{1-\delta_{0,k}} A^{\nu-k-M} (A^{1+M} - A^M - GI_{M+1}) \right) e_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (19)$$

$$\iff A^{1+M} - A^M - GI_{M+1} = 0 \quad (20)$$

Wie man z.B. mittels des Laplace'schen Entwicklungssatzes leicht verifiziert gilt für das charakteristische Polynom $P_A \in \mathbb{R}[t]$ von A : $P_A = (t-1) \cdot t^M - G(-1)^{2M} = t^{M+1} - t^M - G$. Gleichung 20 folgt daher direkt aus dem Satz von Cayley-Hamilton [LM15, S. 109] womit die zu zeigende Aussage bewiesen ist. \square

1.4 Lineare Rekurrenzgleichungen

Wie wir gesehen haben liefern oftmals Matrixpotenzen die Lösungen zu Rekurrenzgleichungen und es scheint eine enge Korrespondenz zwischen den charakteristischen Polynomen der Lösungsmatrix und der zu lösenden Gleichung zu bestehen. Betrachtet man eine allgemeine lineare Rekurrenzgleichung der Form

$$f_n = \alpha_k f_{n-1} + \dots + \alpha_1 f_{n-k}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

so sollte eine Linearform $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{k,1} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $\mathcal{L}(f_{n-1}, \dots, f_{n-k}) = f_n$ - da wir jedoch auf potenzierbare Matrizen hinauswollen wollen wir stattdessen einen Endomorphismus $L : \mathbb{R}^{k,1} \rightarrow \mathbb{R}^{k,1}$ auf $\mathbb{R}^{k,1}$ suchen, sodass $e_i^*(L(f)) = \mathcal{L}(f)$. Hierbei sei $e_i^* \in (\mathbb{R}^{k,1})^*$ ein Element der Standardbasis des Dualraums. Wir vermuten,

dass die gesuchte Matrix eine darstellende Matrix A_L von L ist. Eine erste Idee wäre z.B. Folgenglieder in A_L *abzulegen* und diese dann *abzurufen*. Es wird jedoch schnell klar, dass uns hierbei zwangsläufig der *Speicher* ausgeht. Somit kann A_L lediglich die reine Rechenvorschrift von Gleichung 21 enthalten und alle *Nutzdaten* müssen durch den Eingabevektor zugeführt werden. Sind $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{R}$ Anfangswerte für unsere Rekursionsgleichung, so muss die Anwendung von L bzw. A_L auf diese alle Informationen liefern, welche wir benötigen um f_{k+1} zu berechnen. Wir legen daher die der Reihenfolge der Elemente nach arbiträr gewählte Gleichung

$$A_L \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_k \\ \alpha_1 f_1 + \alpha_k f_k \end{pmatrix} \quad (22)$$

fest. Allgemeiner fordern wir

$$A_L \begin{pmatrix} f_{n-k} \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-(k-1)} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

nutzen also quasi den Ausgabevektor als Schieberegister. Aus Gleichung 22 lässt sich A_L leicht konstruieren:

$$A_L = \begin{pmatrix} 0_{k-1,1} & \dots & I_{k-1} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k,k}. \quad (23)$$

Mit $f = (f_{n-k}, \dots, f_{n-1})^T$ sollte nun $e_k^T A_L^n f = f_n$ gelten. Wir setzen dies ganz analog zu den bereits geführten Beweisen in 21 ein, und erhalten:

$$\begin{aligned} e_k^T A_L^n f &= \alpha_k e_k^T A_L^{n-1} f + \dots + \alpha_1 e_k^T A_L^{n-k} f \\ \iff 0 &= e_k^T (A_L^n - \alpha_k A_L^{n-1} - \dots - \alpha_1 A_L^{n-k}) f \\ &\iff 0 = A_L^{n-k} (A_L^k - \alpha_k A_L^{k-1} - \dots - \alpha_1 A_L^0) \\ &\iff 0 = A_L^k - \alpha_k A_L^{k-1} - \dots - \alpha_1 A_L^0 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun mittels Induktion über k , dass dies genau dem Einsetzen von A_L in das zugehörige charakteristische Polynom $p_{A_L} \in \mathbb{R}[t]$ entspricht. Sei zunächst $k = 1$, dann gilt offensichtlich $A_L = (\alpha_1)$, $p_{A_L} = t - \alpha_1$, $p_{A_L}(A_L) = 0$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, gelte obige Aussage für $k-1$ und sei $B \in \mathbb{R}^{k-1,k-1}$ die lösende Matrix nach obiger Konstruktion zu

$$f_n = \alpha_k f_{n-1} + \dots + \alpha_2 f_{n-k-1}.$$

Es gilt also insbesondere $p_B = t^{k-1} - \alpha_k t^{k-2} - \dots - \alpha_2 t^0$, woraus folgt:

$$\begin{aligned} p_{A_L} &= \det(tI_k - A_L) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -\alpha_1 & \dots & \dots & t - \alpha_k \end{pmatrix} = t \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} t & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -\alpha_2 & \dots & \dots & t - \alpha_k \end{pmatrix}}_{p_B} + (-1)^{1+k} \alpha_1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ t & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & t - \alpha_k \end{pmatrix}}_{(-1)^{k-1}} \\ &= t p_B + (-1)^{2k} \alpha_1 \\ &= t(t^{k-1} - \alpha_k t^{k-2} - \dots - \alpha_2 t^0) + \alpha_1 \\ &= t^k - \alpha_k t^{k-1} - \dots - \alpha_2 t - \alpha_1. \end{aligned}$$

Wir haben somit gezeigt, dass die konstruierte Matrix tatsächlich die ursprüngliche Gleichung löst. Es ist außerdem erwähnenswert, dass obige Konstruktion auch mit komplexen Matrizen erfolgen kann.

Wenden wir dieses Ergebnis auf die zweite Verallgemeinerung an, so ergibt sich:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{M,1} & I_M \\ G & 1 \end{pmatrix}, f = (N, \dots, N, n+N)^T.$$

Um zu testen, dass dies tatsächlich Sinn macht vergleichen wir die Matrixlösung mit der rekursiven und der zuvor erarbeiteten auf Basis von Matrixpolynomen:

```

using LinearAlgebra

M = 2; G = 3; n = 5
N = 7; m = 20

function h(k)
    if k == 0
        return n + N
    else
        return h(k - 1) + G * p(k - 1)
    end
end
function p(k)
    if k < M
        return N
    else
        return h(k - M)
    end
end

A = [Matrix{I, M, 1} Matrix{I, M, M}; G zeros(M)']
y(k) = (k == 0) * (n + N) + (k != 0) * N
δ(i,j) = i == j
h_star(v) = sum([floor(Int, (y(k) * G^(1 - δ(0, k))) * A^(v - k))[1, 1]) for k in 0:M])
p_star(v) = h_star(v - M)

B = [zeros(M, 1) Matrix{I, M, M}; G zeros(1, M-1) 1]
e_k = zeros(M+1, 1); e_k[M+1, 1] = 1
f = [N*ones(M, 1); n+N]
for v in 0:m
    println((h_star(v), h(v), e_k' * B^v * f))
end

```

Hierbei sehen wir, dass tatsächlich (für die gewählten Parameter) alle drei Varianten identische Lösungen liefern.

2 Conways Dezimalzahl

Das folgende Problem wurde im Quanta Magazine[Mut20] veröffentlicht und wird dem britischen Mathematiker John Conway zugeschrieben:

Problem 2.1. Es sei $n = (x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_{10}$ eine Dezimalzahl für die $x_i \neq x_j \forall i \neq j$ und

$$\begin{aligned}
 &1|(x_9)_{10} \\
 &2|(x_9x_8)_{10} \\
 &3|(x_9x_8x_7)_{10} \\
 &4|(x_9x_8x_7x_6)_{10} \\
 &5|(x_9x_8x_7x_6x_5)_{10} \\
 &6|(x_9x_8x_7x_6x_5x_4)_{10} \\
 &7|(x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3)_{10} \\
 &8|(x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2)_{10} \\
 &9|(x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1)_{10} \\
 &10|(x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_{10}
 \end{aligned}$$

gilt. Wie lautet n ?

Lösung 2.2. Es sei $9 := (x_9)_{10}$, $8 := (x_9x_8)_{10}$, ..., $0 := (x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_{10}$ und $k_9 := 1, \dots, k_0 := 10$.

Nach der Teilbarkeitsregel für 10 gilt, dass 0 mit einer Null enden muss; dies sieht man leicht anhand der Betrachtung $0 = 10^9 x_9 + 10^8 x_8 + \dots + 10^0 x_0 = x_0 = 0 \pmod{10}$. Da eine Zahl genau dann durch 5 teilbar ist, wenn ihre letzte Stelle 0 oder 5 ist, folgt sofort $x_5 = 5$ - dies kann man wieder leicht mittels Modulararithmetik nachweisen. Weiterhin gilt für $k \in \{2, 4, \dots, 8\} : k \mid k \implies k = 0 \pmod{2}$, woraus direkt folgt $\{x_8, x_6, x_4, x_2\} = \{2, 4, 6, 8\}$ und $\{x_9, x_7, x_3, x_1\} = \{1, 3, 7, 9\}$. Nach der Teilbarkeitsregel für 3^3 gilt außerdem $3 \mid 7 \iff 7 = 10^2 x_9 + 10 x_8 + x_7 = x_9 + x_8 + x_7 = 0 \pmod{3}$. Weiterhin gilt $6 \mid 4 \implies \sum_{k=4}^9 x_k = 0 \pmod{3}$, da eine durch 6 teilbare Zahl auch durch 3 teilbar sein muss. Subtrahieren wir die erste von der zweiten Gleichung erhalten wir somit $x_4 + x_5 + x_6 = x_4 + 5 + x_6 = 0 \pmod{3} \iff x_4 + x_6 = -5 = 1 \pmod{3}$. Aus der Teilbarkeitsregel für 4^4 folgt außerdem $4 \mid 6 \iff 4 \mid (x_7 x_6)_{10}$. Im Intervall $[10, 99]$ liegen allerdings nur die Lösungen $4^2 = 16$ und $4^3 = 64$, und wir wissen, dass x_7 ungerade sein muss. Es folgt somit $x_7 = 1, x_6 = 6$. Zusammen mit dem vorherigen Ergebnis erhalten wir somit $x_4 = 1 - 6 = 1 \pmod{3} \implies x_4 = 4$. Wir wissen also

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_4 &= 4 \\ x_5 &= 5 \\ x_6 &= 6 \\ x_7 &= 1 \\ x_2, x_8 &\in \{2, 8\} \\ x_1, x_3, x_9 &\in \{3, 7, 9\} \end{aligned}$$

Nach der Teilbarkeitsregel für 8^5 gilt: $8 \mid 2 \iff 8 \mid (x_4 x_3 x_2)_{10} \iff 10^2 x_4 + 10 x_3 + x_2 = 4 \cdot 4 + 2 x_3 + x_2 = 2 x_3 + x_2 = 0 \pmod{8}$. Ist $x_2 = 2$ dann gilt $2 x_3 + x_2 = 0 \pmod{8} \iff 2 x_3 = 6 \pmod{8}$, was für $x_3 \in \{3, 7\}$ wahr ist. Ist hingegen $x_2 = 8$ dann gilt $2 x_3 = 0 \pmod{8}$, was mit den möglichen Werten für x_3 nicht lösbar ist. Daher muss also $x_2 = 2, x_3 \in \{3, 7\}$ gelten, was direkt $x_8 = 8$ impliziert. Wir wissen weiterhin nach der Dreiteilbarkeitsregel, dass $x_9 + x_8 + x_7 = 0 \pmod{3} \iff x_9 = -(8 + 1) = 0 \pmod{3}$. Die verbleibenden Möglichkeiten sind

$$\begin{aligned} x_9 &= 3, x_3 = 7, x_1 = 9 \\ x_9 &= 9, x_3 = 3, x_1 = 7 \\ x_9 &= 9, x_3 = 7, x_1 = 3 \end{aligned}$$

Diese drei Möglichkeiten werden eindeutig durch die Wahl von x_9, x_3 identifiziert und es gilt

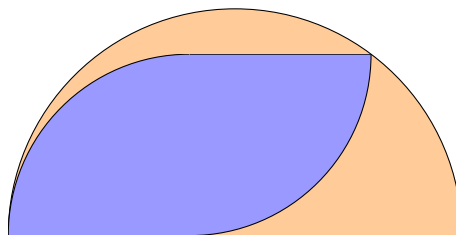
$$3 = \begin{cases} 0 & x_9 = 3, x_3 = 7, \\ 2 & x_9 = 9, x_3 = 3, \\ 6 & x_9 = 9, x_3 = 7 \end{cases} \pmod{7}.$$

Daraus folgt per Widerspruch, dass nur die erste Variante eine Lösung sein kann und es gilt $n = 3816547290$.

3 Kreise

Das folgende Rätsel stammt aus der Sammlung geometrischer Rätsel von Catronia Agg⁶.

Problem 3.1. In welchem Verhältnis stehen die blaue und orangene Fläche?



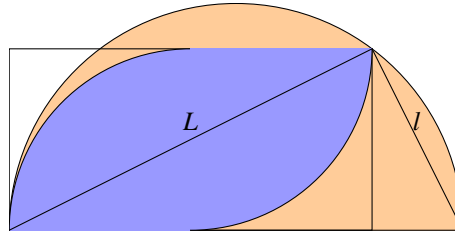
³Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist, da $\forall k \in \mathbb{N} : 10^k = (9+1)^k = 1 \pmod{3}$.

⁴Eine Zahl $(a_n \dots a_0)_{10}$ ist genau dann durch 4 teilbar, wenn $(a_1 a_0)_{10}$ durch vier teilbar ist. Dies gilt weil $\sum_{k=0}^n 2^k a_k = a_0 + 2a_1 + \sum_{k=2}^n 4 \cdot 2^{k-2} a_k = a_0 + 2a_1 \pmod{4}$.

⁵Eine Zahl $(a_n \dots a_0)_{10}$ ist genau dann durch 8 teilbar, wenn $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ durch acht teilbar ist. Beweis analog zur Regel für Teilbarkeit durch 4.

⁶<https://twitter.com/Cshearer41/status/1300392090397016066/photo/1>

Lösung 3.2. Wir bezeichnen den Radius der kleinen Kreise mit r , den des großen mit R und erweitern obige Zeichnung wie folgt:



Es gilt

$$r^2 + (2r)^2 = |L|^2$$

$$(2R - 2r)^2 + r^2 = |l|^2$$

und nach dem Satz des Thales stehen L und l senkrecht, was die Gleichheit $|L|^2 + |l|^2 = (2R)^2$ liefert. Kombinieren wir diese Gleichungen erhalten wir $r^2 + (2r)^2 + 4(R-r)^2 + r^2 = (2R)^2 \iff 10r^2 - 8rR = 0 \iff$

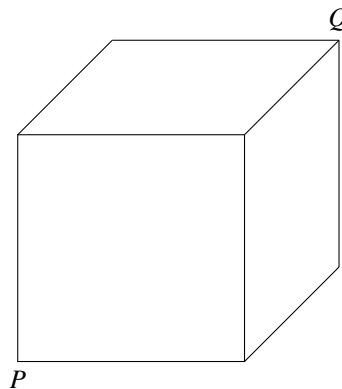
$R = \frac{5}{4}r$ bzw. $\frac{R}{r} = \frac{5}{4}$. Da die Fläche proportional zum Quadrat des Radius ist, gilt $\frac{A_{\text{Orange}}}{A_{\text{Blau}}} = \frac{25}{16}$.

4 Ausgewählte Probleme aus *Problems for children from 5 to 15*

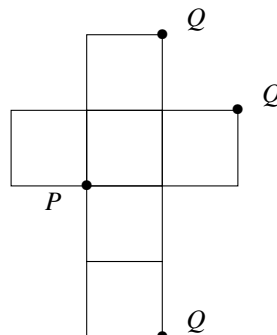
In diesem Abschnitt werden diverse Rätsel, bzw. deren Verallgemeinerungen aus einer Sammlung von V.I. Arnolds behandelt[Arn].

4.1 Nr. 19 – Würfel-Raupe

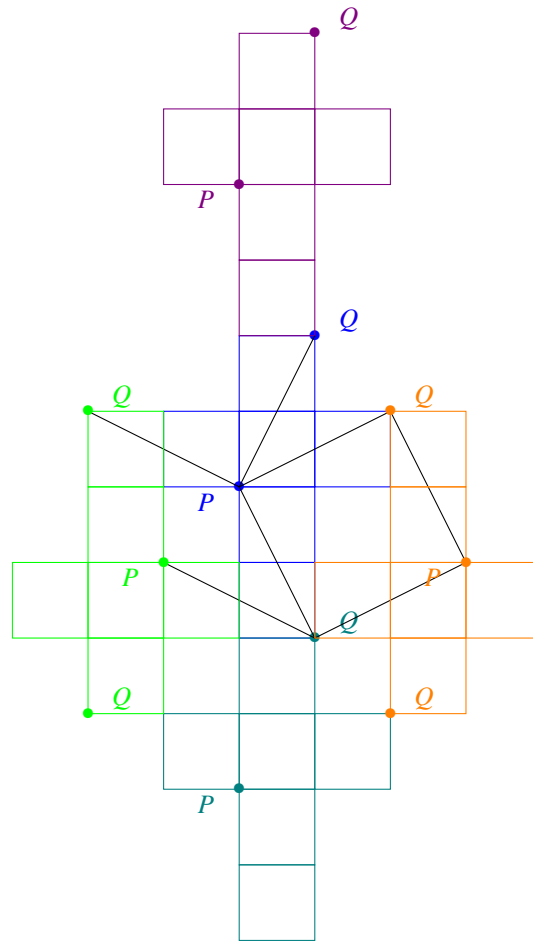
Problem 4.1. Eine Raupe möchte sich in einem würfelförmigen Raum von der linken unteren (P) zur rechten oberen Ecke (Q) bewegen. Was ist die kürzeste Route entlang den Wänden des Raumes?



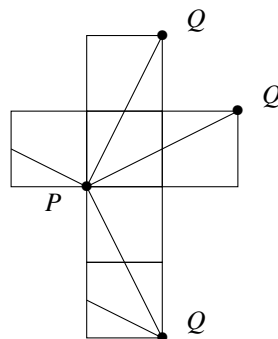
Lösung 4.2. Wir schneiden den Würfel auf um ein Netz zu erhalten:



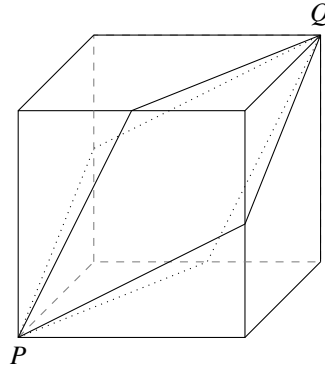
Nun nehmen wir mehrere dieser Netze und "kleben" zwei Kanten zusammen wenn diese im gefalteten Würfel zusammenfallen und verbinden alle Q 's zum zentralen (blauen) P :



In einem einzelnen Netz eingezeichnet sind also dies die möglichen Pfade:



Da jede Ecke eines Würfels an drei Flächen angrenzt, muss auch im Netz jeder Punkt an drei Flächen angrenzen. Man sieht sofort, dass es keinen kürzeren als die eingezeichneten Wege geben kann. Somit gibt es mehrere Möglichkeiten für den kürzesten Weg und die Länge in Abhängigkeit der Seitelänge a des Würfels beträgt $\sqrt{5}a$.



Man kann auch etwas formaler zeigen, dass dies tatsächlich die kürzesten Verbindungsstrecken sind. Um P und Q zu verbinden muss die Verbindungsstrecke zwangsläufig irgendwann eine Kante des Würfels kreuzen oder über eine Ecke laufen. Sei Z dieser erste Kreuzungspunkt mit einer Kante bzw. einem Eckpunkt. Läuft der Pfad über eine Ecke, dann ist der kürzest mögliche der direkte Pfad PZQ mit der Länge $\sqrt{2}a + a = (1 + \sqrt{2})a > \sqrt{5}a$ - demnach kann Z nicht auf einer Ecke liegen. Liege also Z o.B.d.A. auf der oberen vorderen Würfelkante (die anderen Fälle sind gleich modulo Symmetrie). Die kürzeste Strecke ist wieder die direkte Verbindungsstrecke \overline{PZQ} . Wir platzieren ein Koordinatensystem, sodass $P = (0, 0, 0)$, $Q = (1, 1, 1)$, $Z = (z, 1, 0)$ und den Achsenrichtungen parallel zu den Kanten des Würfels. Dann gilt $\overline{PZQ} = \|Z - P\|_2 + \|Q - Z\|_2 = \sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{(z - 1)^2 + 1}$. Wir minimieren nun diesen Ausdruck über z und erhalten

$$\arg \min_{0 < z < 1} \overline{PZQ} = \frac{1}{2}, \quad \min_{0 < z < 1} \overline{PZQ} = \sqrt{5}.$$

4.2 Nr. 36 – Kubische Differenz

Problem 4.3. Die Summe der dritten Potenzen dreier ganzer Zahlen wird von der dritten Potenz der selben Zahlen subtrahiert. Ist die Differenz stets durch drei teilbar?

Lösung 4.4. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Die obige Frage ist, ob $3|(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$ immer wahr ist. Diese Frage ist äquivalent zu $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) \equiv 0 \pmod{3}$, mit dem Multinomialssatz gilt

$$(a + b + c)^3 = \sum_{k_1+k_2+k_3=3} \binom{3}{k_1, k_2, k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}.$$

Da 3 die Partitionen $\{\{3\}, \{2, 1\}, \{1, 1, 1\}\}$ besitzt, gilt in dieser Summe modulo Permutation stets $(k_1, k_2, k_3) \in \{(3, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. Der Multinomialkoeffizient $\binom{3}{k_1, k_2, k_3} = \frac{3!}{k_1! k_2! k_3!}$ hat somit in genau drei Fällen im Nenner eine drei, wodurch diese sich mit der Zähler wegkürzt. Für alle Fälle in denen dies nicht zutrifft, ist der Nenner eine Zweierpotenz welche den Zähler nicht teilt, somit sind all diese Summenglieder insbesondere Vielfache von 3 und somit $0 \pmod{3}$ und es gilt

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = \frac{3!}{3!0!0!} a^3 + \frac{3!}{3!0!0!} b^3 + \frac{3!}{3!0!0!} c^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 0 \pmod{3}.$$

Damit ist gezeigt, dass die Aussage für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt. Tatsächlich lässt sich sofort sagen, dass im Allgemeinen $\forall a_0, \dots, a_N \in \mathbb{Z} : 3 | (\sum_{k=0}^N a_k)^3 - (\sum_{k=0}^N a_k^3)$ gilt.

4.3 Nr. 37 – Quintische und septische Differenzen

Hierbei handelt es sich um Abwandlungen von Problem Nr. 36.

Problem 4.5. Die Summe der fünften bzw. siebten Potenzen ganzer Zahlen wird von der fünften bzw. siebten Potenz der selben Zahlen subtrahiert. Ist die Differenz stets durch fünf bzw. sieben teilbar?

Wir verallgemeinern dieses Problem sofort zu

4.4 Primpotenzielle Differenzen

Problem 4.6. Sei p eine Primzahl. Die Summe der p -ten Potenzen ganzer Zahlen wird von der p -ten Potenz der selben Zahlen subtrahiert. Ist die Differenz stets durch p teilbar?

Lösung 4.7. Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl und seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k \right)^p - \sum_{k=0}^n a_k^p = \sum_{\sum_{r=0}^n k_r = p} \binom{p}{k_0, \dots, k_n} \prod_{r=0}^n a_r^{k_r} - \sum_{k=0}^n a_k^p. \quad (24)$$

Da p prim ist, ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper und somit sind alle Elemente ungleich Null invertierbar. Dies sichert die Wohldefiniertheit der Multinomialkoeffizienten über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Ist (k_0, \dots, k_n) eine Partition von p , dann gilt

$$\binom{p}{k_0, \dots, k_n} = \frac{p!}{\prod_{r=0}^n k_r!} = \begin{cases} (\prod_{r=0, k_r \neq p}^n k_r!)^{-1} = (\prod_{r=0, k_r \neq p}^n 0!)^{-1} = 1 & \text{wenn } p \in \{k_0, \dots, k_n\}, \\ p \cdot \frac{(p-1)!}{\prod_{r=0}^n k_r!} = 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (25)$$

Es gibt genau $n+1$ Summanden in Gleichung 24 bei denen hierbei der obere Zweig gewählt wird, nämlich für $r = 0, \dots, n : k_r = p$. Demnach gilt

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k \right)^p - \sum_{k=0}^n a_k^p = 0 \pmod{p}.$$

Die Differenz ist also stets durch p teilbar. Da 5 und 7 Primzahlen sind folgt Problem 37 somit direkt.

Literatur

- [Arn] V. I. Arnold. *Problems for children from 5 to 15*. URL: https://imaginary.org/sites/default/files/taskbook_arnold_en_0.pdf.
- [LL11] Anany Levitin und Maria Levitin. *Algorithmic Puzzles*. Oxford University Press, 2011. ISBN: 978-0-199-74044-4.
- [LM15] Jörg Liesen und Volker Mehrmann. *Lineare Algebra. Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis*. 2. Aufl. Springer Spektrum, 2015. ISBN: 978-3-658-06609-3.
- [Mut20] Pradeep Mutalik. *Celebrating the Playful Magic of John Horton Conway*. zuletzt abgerufen am 09.11.2020. 2020. URL: <https://www.quantamagazine.org/three-math-puzzles-inspired-by-john-horton-conway-20201015/>.