

Innere Geometrie der Flächen

Stefan Volz

Mathematisches Seminar zur Differentialgeometrie
Bachelorstudiengang Technomathematik
Fakultät für angewandte Natur- und Geisteswissenschaften

12. September 2021

Zusammenfassung

Oftmals werden Flächen als immersierte Objekte in einem "größeren" Raum betrachtet; so ist zum Beispiel die Oberfläche der Erde eine 2-dimensionale Fläche in einem 3-dimensionalen Raum. Was passiert jedoch wenn man auf diesen größeren Raum verzichtet und die Fläche für sich betrachtet? Was könnte ein flaches Wesen das auf einer Fläche lebt über die Geometrie derselben aussagen? Diese Frage wird in der inneren Geometrie untersucht.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Zur Notation	2
1.2	Sonstige Konventionen	3
1.3	Vorkenntnisse	3
1.4	Grundlegende Definitionen	3
1.4.1	Mannigfaltigkeiten und Tangentialräume	3
1.4.2	Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Flächen	6
2	Geodäten	9
2.1	Definition und Motivation	9
2.2	Die Levi-Civita Ableitung	13
2.3	Christoffelsymbole	15
2.4	Die Geodätengleichung	20
2.4.1	Bestimmung der Gleichung	20
2.4.2	Charakterisierung und Lösungsverhalten	21
2.5	Paralleltransport	23
2.5.1	Parallelität	23
2.5.2	Holonomie	24
2.6	Schlussbemerkung	25
3	Das Theorema Egregium	26
4	Rodrigues-Formel	31
4.1	Die Rodrigues-Formel über Kreuzproduktmatrizen	31
4.2	Beziehung zu Quaternionen	34
A	Ausblick und Anwendungen	36

The main object of study in differential geometry is, at least for the moment, the differentiable manifolds, structures on the manifolds (Riemannian, complex, or other), and their admissible mappings.

Differential Geometry; its past and its future

SHII-SHEN CHERN [Che70]

Kapitel 1

Through the wish to introduce measure next into the continuum just defined this continuum becomes space, and geometry is born.

Einführung

Science and Hypothesis

HENRI POINCARÉ [Poi13, S. 54]

1.1 Zur Notation

Wir werden uns Notationsmäßig an den Büchern [Tu10] und [Tu17] sowie [LM14] orientieren, diese jedoch nicht direkt übernehmen. Insbesondere bezeichnen wir demensprechend Koordinatenfunktionen mit hochgestellten Indizes, schreiben also x^1, \dots, x^n statt x_1, \dots, x_n - die zugehörigen Koordinatenvektorfelder $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ hingegen schreiben wir mit tiefgestellten Indizes. In der Regel sollte keine Verwechslungsmöglichkeit mit Potenzen bestehen, falls dies doch der Fall ist werden Klammern gesetzt. Ein Ausdruck wie $(x + y)^k$ ist somit immer als Potenz zu verstehen. Dies ist eine in der Differentialgeometrie und ihren Anwendungen gängige Konvention welche u.a. die Einsteinsche Summenkonvention ermöglicht. Diese wollen wir aus Gründen der Klarheit explizit *nicht* verwenden; Ausdrücke ohne großes Sigma Σ sind somit nie als Summe zu verstehen. Wir werden hingegen oftmals darauf verzichten Summenbereiche oder Auswertungspunkte explizit zu nennen wenn diese aus dem Kontext klar sind. Weiterhin definieren wir oftmals Funktionen $X \rightarrow \bigsqcup_{t \in I} M_t$ wobei M_t Mengenfamilien sind. Hierbei ist $\bigsqcup_{t \in I} M_t$ als disjunkte Vereinigung $\bigcup_{i \in I} \{t\} \times M_t$ zu verstehen. In aller Regel werden wir auf das explizite Erwähnen der ersten Komponente bei Funktionsdefinitionen verzichten, schreiben also $x \mapsto f(x)$ statt $x \mapsto (t(x), f(x))$. Partielle Ableitungen bezeichnen wir i.d.R. mit Variationen von ∂ , während gewöhnliche Ableitungen mit D bzw. D^n bezeichnet werden; das Differential einer Funktion ϕ mit ϕ_* . Insbesondere bezeichnet $D\gamma$ zu einer differenzierbaren Kurve γ die elementweise Ableitung aller Komponenten. Die Einschränkung $f|_M$ einer Funktion $f : X \rightarrow Y$ auf eine Teilmenge $M \subseteq X$ bezeichnen wir mit $f|_M$. Für offene Teilmengen $M \subseteq X$ schreiben wir $M \subseteq_o X$ und die Menge von Abbildungen $M \rightarrow X$ bezeichnen wir mit X^M . Für den Spezialfall der Endomorphismen $V \rightarrow V$ eines Vektorraums schreiben wir $\text{End}(V)$. An manchen Stellen werden wir einen kleinen "abuse of notation" begehen und beispielsweise Matrizen deren Elemente reellwertige Funktionen sind als Elemente des $\mathbb{R}^{n,m}$ bezeichnen.

1.2 Sonstige Konventionen

Wir werden i.d.R. nur glatte Funktionen behandeln - also Funktionen welche unbeschränkt oft differenzierbar sind. Für viele der Sätze könnte man auch mit schwächeren Bedingungen auskommen. Weiterhin sind alle Mannigfaltigkeiten als glatte differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu verstehen.

1.3 Vorkenntnisse

Die nötigen Vorkenntnisse umfassen Differentialrechnung im \mathbb{R}^n (gewöhnliche Differentialgleichungen eingeschlossen) sowie auf Untermannigfaltigkeiten desselben und die damit verbundenen Topologiegrundlagen, sowie lineare Algebra und die Themen der anderen Seminarvorträge: also Kurventheorie, die Begriffe der Weingartenabbildung bzw. des Formoperator und die damit verbundenen Krümmungsbegriffe der Hauptkrümmungen sowie der Gaußschen Krümmung. Die nötigen Kenntnisse der Analysis und Topologie werden in [For18], [Jän08], [Jän04] und [AE06a] (sowie den Folgebänden der gleichen Autoren) behandelt, für die Lineare Algebra sei auf [LM14] verwiesen. Die Differentialgeometrischen Themen werden in [Tu17], [EJ14] oder etwas informaler in [Nee21] und [Sti10] behandelt. Weitere Bücher zu den Themen sind dem Anhang zu entnehmen. Außerdem nutzen wir das Konzept der Variation eines Funktionals wie es z.B. in [Kie10] behandelt wird.

Im Allgemeinen bemühen wir uns um eine moderne Darstellung des Themas; werden allerdings auf die Nutzung von Differentialformen - obgleich diese auf die behandelten Themen anwendbar sind - aus Platzgründen verzichten. Der interessierte Leser sei auf das exzellente [For18] sowie [Nee21],[Tu10] und [Tu17] verwiesen.

1.4 Grundlegende Definitionen

1.4.1 Mannigfaltigkeiten und Tangentialräume

Ein zentraler Begriff in der modernen Differentialgeometrie ist der der (*differenzierbaren*) *Mannigfaltigkeit*. Aufgrund der zentralen Bedeutung wollen wir hier die Definition wiederholen, und sie zum Begriff der *riemannschen Mannigfaltigkeit* erweitern. Intuitiv ist eine topologische k -Mannigfaltigkeit eine Menge welche lokal wie der k -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^k aussieht. Für die Differentialgeometrie fordern wir desweiteren, dass diese lokal euklidische Eigenschaft in gewisser Weise "glatt" ist. Um dies zu formalisieren benötigen wir einige Definitionen. Wir verfahren hierbei nach [Jän04], weitere Zugänge zum Thema sind z.B. in [Tu10] und [EJ14] zu finden.

Zunächst müssen wir den Sachverhalt "Raum X sieht wie Raum Y aus" formalisieren. Der hierzu nötige Begriff ist der des Homöomorphismus.

Definition 1.1 (Homöomorphismus / Homeomorphismus).

Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Wir nennen f genau dann einen Homöomorphismus bzw. Homeomorphismus wenn gilt:

(H1) f ist bijektiv

(H2) f ist stetig

(H3) f^{-1} ist stetig.

Nun kümmern wir uns darum, dass dieses "gleich Aussehen" eine lokale Eigenschaft sein soll und führen über *Karten* Koordinatensysteme ein.

Definition 1.2 (Karte, Kartengebiet, Koordinatenumgebung).

Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq_o X$ und $V \subseteq_o \mathbb{R}^k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Ist weiterhin $\phi : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismen dann bezeichnen wir (ϕ, U) als Karte auf X . Zu einer gegebenen Karte bezeichnen wir U als Kartengebiet. Gelegentlich werden wir auch ϕ selbst als Karte bezeichnen oder den Begriff der Koordinatenumgebung nutzen. Wollen wir die Dimension k von V hervorheben, so sprechen wir auch von einer k -Karte.

Haben wir zwei Koordinatensysteme so wollen wir zwischen diesen hin- und herwechseln können. Dies bringt uns zum Thema der Kartenwechsel.

Definition 1.3 (Kartenwechsel).

Es seien $(\phi, U), (\psi, U')$ k -Karten auf einem topologischen Raum X . Wir bezeichnen die Abbildung

$$f := \psi \circ (\phi|_{\phi(U \cap U')})^{-1} : \phi(U \cap U') \rightarrow \psi(U \cap U') \subseteq_o \mathbb{R}^k \quad (1.1)$$

als Kartenwechsel von ϕ nach ψ . Ist f ein Diffeomorphismus so sagen wir, dass die beiden Karten differenzierbar wechseln.

Schlussendlich wollen wir aber mit diesen lokalen Eigenschaften doch global über eine Mannigfaltigkeit sprechen können. Hierzu bilden einen *Atlas*, in welchem jeder Punkt der Mannigfaltigkeit "kartiert" ist.

Definition 1.4 (Atlas).

Sei X ein topologischer Raum und A eine Menge von k -Karten auf X . Gilt

$$X = \bigcup_{(\phi, U) \in A} \phi(U), \quad (1.2)$$

ist also die Menge der Kartengebiete $\{\phi(U) : (\phi, U) \in A\}$ eine Überdeckung von X , so nennen wir A einen (k -)Atlas auf X . Gilt weiterhin, dass je zwei Karten aus A differenzierbar wechseln so nennen wir A differenzierbar.

Definition 1.5 (Maximaler Atlas).

Sei A ein differenzierbarer Atlas auf X sowie $K \notin A$ eine Karte auf X . Ist auch

$A \cup \{K\}$ ein differenzierbarer Atlas so nennen wir K differenzierbar kompatibel mit A . Die Erweiterung von A mit allen differenzierbaren Abbildungen nennen wir maximalen (differenzierbaren) Atlas oder eine differenzierbare Struktur.

Bemerkung 1.6.

Es sei bemerkt, dass diese differenzierbare Struktur i.A. nicht eindeutig festzulegen ist.

Mit all diesen Definitionen kommen wir nun zur Definition einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit.

Definition 1.7 (Mannigfaltigkeit).

Sei M ein topologischer Raum und A ein maximaler k -Atlas über M . Weiterhin erfülle M das hausdorffsche Trennungsaxiom - zu $p, q \in M$ existieren also Umgebungen $U_p, U_q \subseteq M$, so dass $U_p \cap U_q = \emptyset$. Dann nennen wir (M, A) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Mitunter wollen wir den Atlas hierbei unterdrücken und bezeichnen M selbst als Mannigfaltigkeit.

Da wir **Differential**geometrie betreiben wollen benötigen wir außerdem eine Möglichkeit unsere Mannigfaltigkeit lokal zu linearisieren. Das hierzu nötige Konzept ist uns als Tangentialraum bekannt - um eine Vielzahl weiterer Definitionen zu vermeiden sei hier auf [Tu10] verwiesen. Ohne Beweis wollen wir lediglich folgenden Satz festhalten

Satz 1.8 (Basis des Tangentialraums).

Es sei (U, ϕ) eine Karte um einen Punkt $p \in M$ einer n -Mannigfaltigkeit M und r^1, \dots, r^n die Standardkoordinaten des \mathbb{R}^n . Wir setzen $x^i := r^i \circ \phi$. Dann ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \quad (1.3)$$

eine Basis des Tangentialraums $T_p M$ von M bei p . Hierbei ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p f := \left. \frac{\partial}{\partial r^1} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}) \quad (1.4)$$

für glatte Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Mittels des Tangentialraums können wir nun einen weiteren zentralen Begriff einführen. Wir arbeiten an vielen Stellen mit Vektorfeldern *auf* und *entlang* von Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.9 (Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit).

Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $X : M \rightarrow TM, p \mapsto X_p \in T_p M$ nennen wir ein *Vektorfeld auf M* . Sei nun $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte um

$p \in M$. Nach Satz 1.8 können wir dann

$$X_p = \sum_i a^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad (1.5)$$

schreiben. Die Koeffizientenfunktionen sind hierbei Funktionen $M \rightarrow \mathbb{R}$, insbesondere werden wir nur Vektorfelder behandeln für die diese Funktionen glatt, also C^∞ , sind. Die Menge all dieser Vektorfelder bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(M)$.

Beispiel 1.10.

Geschwindigkeitsvektorfeld einer Kurve.

Definition 1.11 (Vektorfeld entlang einer Untermannigfaltigkeit).

Es sei N eine Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit M . Eine Abbildung $X : N \rightarrow TM, p \mapsto X_p \in T_p M$ welche jedem Punkt $p \in N$ der Untermannigfaltigkeit einen Tangentialvektor X_p in $T_p M$ der Übermannigfaltigkeit zuordnet nennen wir *Vektorfeld entlang N in M* . Wie auch im Fall der Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit definieren wir Glattheit und bezeichnen die Menge aller glatten Vektorfelder mit $\Gamma(TM|_N)$.

Beispiel 1.12.

Normaleneinheitsfeld einer Fläche.

1.4.2 Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Flächen

Eine Mannigfaltigkeit an sich reicht jedoch noch nicht um Geometrie zu betreiben. In der Geometrie geht es im Gegensatz zur Topologie um Messungen mit konkreten Zahlen. Wir wollen wissen wie weit Punkte voneinander entfernt sind, wie stark sich eine Kurve krümmt etc. und eine Zahl haben an der wir die Ausprägung dieser Eigenschaft festmachen können. Im Speziellen wollen wir innere Geometrie betreiben: denkt man an das flache Lebewesen aus der Zusammenfassung zurück, so macht es Sinn, dass man solche Größen welche nur auf Längen- und Winkelmessungen basiert, welche das Lebewesen durchführen, kann als Größen der inneren Geometrie definiert. Bedenkt man die Winkeldefinition über ein inneres Produkt, so macht es also Sinn dass wir ein solches auf den Flächen untersuchen wollen. Ganz nach dem Zitat zu Beginn des Kapitels, fordern wir also eine *Metrik*¹ g und erhalten somit eine sog. *riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Definition 1.13 (Riemannsche Mannigfaltigkeit^a).

Es sei M eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit und g eine Funktion, welche jedem $p \in M$ ein Skalarprodukt auf dem Tangentialraum $T_p M$ der Mannigfaltigkeit bei p zuordnet. Weiterhin hänge g differenzierbar von p ab – es sei also

¹Bei g handelt es sich nicht wirklich um eine Metrik im Sinne der metrischen Räume.

$p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ eine differenzierbare Funktion für Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann nennen wir (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und g eine riemannsche Metrik.

^aBERNHARD RIEMANN, 1826-1866, deutscher Mathematiker der gewissermaßen als Vater der modernen Differentialgeometrie verstanden werden kann. Der Begriff der Mannigfaltigkeit hat seinen Ursprung in Riemanns Habilitationsvortrag [Rie54].

Beispiel 1.14.

Die Tangentialräume $T_p\mathbb{R}^n$ des \mathbb{R}^n sind isomorph zum \mathbb{R}^n selbst, somit induziert das euklidische Skalarprodukt des \mathbb{R}^n eine riemannsche Metrik auf $T_p\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen diese als euklidische Metrik.

Beispiel 1.15.

Ist $\phi : N \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist

$$g'_p : T_p N \times T_p N \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto g_{\phi(p)}(\phi_* u, \phi_* v) \quad (1.6)$$

eine riemannsche Metrik auf N , wobei

$$\phi_* : T_p N \rightarrow T_{\phi(p)} M \quad (1.7)$$

das Differential von ϕ ist.

Aus diesen Beispielen erhalten wir sofort das folgende aus der Analysis wohlbekannte Beispiel.

Beispiel 1.16.

Für eine k -Untermannigfaltigkeit N des \mathbb{R}^n mit Karte (U, ϕ) um $p \in N$ ist

$$g_p : T_p N \times T_p N \simeq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto u^T G_p v \quad (1.8)$$

eine riemannsche Metrik auf N . Hierbei ist

$$G_p = J_\phi(p)^T J_\phi(p). \quad (1.9)$$

die *Gramsche Matrix* der Jacobimatrix $J_\phi(p)$. Dies sehen wir dadurch ein, dass das Differential ϕ_* durch die Jakobimatrix gegeben ist, es gilt also

$$\langle \phi_*(u), \phi_*(v) \rangle = \langle J_\phi(p)u, J_\phi(p)v \rangle = (J_\phi(p)u)^T (J_\phi(p)v) = u^T G_p v. \quad (1.10)$$

Dieses Beispiel wird das wohl wichtigste für unsere Untersuchungen sein, da wir vornehmlich Flächen untersuchen wollen und der Flächenbegriff, auf welchen wir diese Untersuchungen aufbauen wollen, der folgende ist.

Definition 1.17 (Reguläre Untermannigfaltigkeit).

Es sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge einer Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen N eine reguläre Untermannigfaltigkeit der Dimension k , wenn für

alle $p \in N$ eine Koordinatenumgebung $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ existiert, sodass $U \cap N$ die Nullstellenmenge von $n - k$ der Koordinatenfunktionen ist. Durch Umordnung können wir annehmen, dass diese Koordinatenfunktionen gerade x^{k+1}, \dots, x^n sind. Die zugehörige Karte nennt man *angepasste Karte* oder auch *Flachmacher*.

Definition 1.18 (Fläche).

Eine Fläche ist eine reguläre 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 .

Zudem wollen wir über Isometrien dieser Flächen sprechen - also Abbildungen welche intrinsische Längen und Winkel nicht ändern.

Definition 1.19 (Isometrie).

Wir nennen einen Diffeomorphismus $\phi : (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ eine *Isometrie* wenn,

$$g_p(u, v) = \widetilde{g}_{\phi(p)}(\phi_* u, \phi_* v) \quad (1.11)$$

für alle $p \in M, u, v \in T_p M$ gilt.

Diese Isometrien können als Verbiegungen einer Fläche aufgefasst werden.

Aber bevor wir diesen Gegenstand weiter verfolgen,
müssen wir die Principien der Theorie der kürzesten
Linien auf einer gegebenen Fläche vorausschicken.

Kapitel 2

Allgemeine Flächentheorie
CARL FRIEDRICH GAUSS [Gau28, S. 25, sic]

Geodäten

Historisch fand die Differentialgeometrie viele Anwendungen in der Geodäsie, also der Landvermessung. Im Jahr 1820 wurde Carl Friedrich Gauß¹ die Leitung der Vermessung des Königreichs Hannover übertragen. Im Zuge seiner dortigen Arbeit entwickelte er Methoden wie das gaußsche Eliminationsverfahren und die Methode der kleinsten Quadrate, wurde allerdings auch zu Arbeiten in der Differentialgeometrie angeregt und bewies hier zentrale Sätze. Dies fand im Jahr 1827 seinen Höhepunkt in Gauß' *Allgemeiner Flächentheorie*. Dieser Verbindung zur Geodäsie wird namensgebend in der Geodätenlehre Rechnung getragen: eine Geodäte ist hierbei eine auf einer Fläche verlaufende Kurve, welche eine spezielle lokale Minimaleigenschaft erfüllt. Geodäten sind informell als Kurven zu verstehen, welche auf einer Fläche so gerade wie möglich verlaufen.

2.1 Definition und Motivation

Wir wollen nun Kurven auf Flächen betrachten.

Definition 2.1 (Kurve auf Mannigfaltigkeit).

Eine glatte Abbildung $\gamma : I := (a, b) \rightarrow M$ eines offenen Intervalls I auf eine Mannigfaltigkeit bezeichnen wir als Kurve auf der Mannigfaltigkeit.

Wir betrachten hierbei nur den Spezialfall in dem $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Weiterhin benötigen wir den Begriff der Länge einer Kurve. Wie aus der Analysis bekannt berechnet sich diese wie folgt:

Definition 2.2 (Längenfunktional).

Das Längenfunktional ist die Abbildung $\mathcal{L} : (\mathbb{R}^n)^{(a,b)} \rightarrow \mathbb{R}$, welche einer Kurve

¹CARL FRIEDRICH GAUSS, 1777 - 1855, einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker der auch auf vielen anderen Gebieten wie der Physik, Astronomie und Statistik überragende Resultate erzielte.

$\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ihre Länge

$$\mathcal{L}[\gamma] := \int_a^b \|\mathbf{D}\gamma(t)\|_2 dt \quad (2.1)$$

zuordnet.

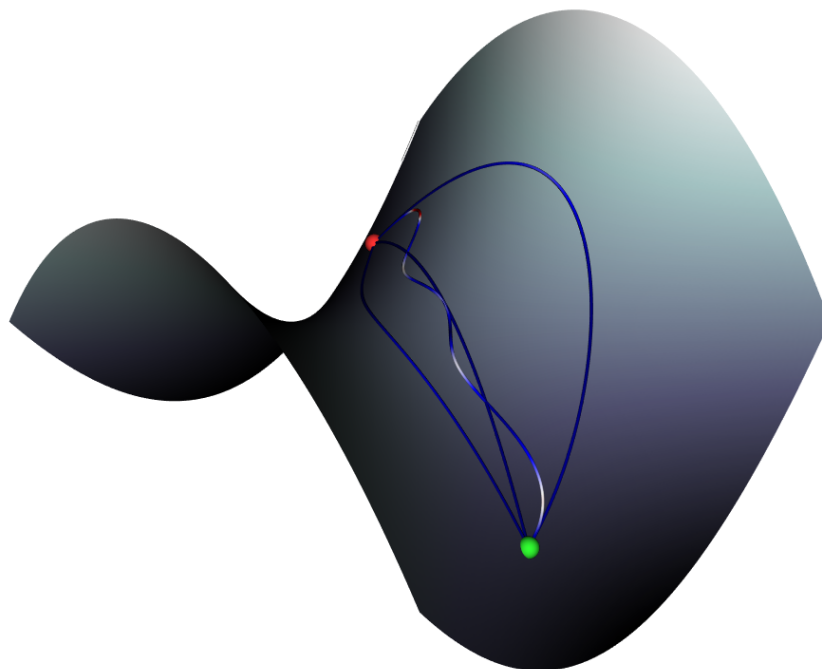


Abbildung 2.1: Einigen Kurven auf einem hyperbolischen Paraboloid.

Sei nun M eine Fläche und A, B Punkte auf M (in etwa so wie in Abbildung 2.1 dargestellt). Ist M eine Ebene so ist uns intuitiv klar, dass die kürzeste Verbindungskurve der Punkte A, B eine gerade Linie ist. Doch wie ändert sich die Situation wenn M nicht mehr *eben* ist? Wie können wir die Eigenschaft der Ebenheit konkretisieren und formalisieren? Lassen wir die zweite Frage zunächst beiseite und wenden uns der ersten zu. Wir suchen also eine Kurve $\gamma_0 : I := (a, b) \rightarrow M$ auf M welche das Längenfunktional minimiert. Dies ist ein Problem der Variationsrechnung und wir könnten auf allgemeine Sätze zurückgreifen, um Bedingungsgleichungen für γ_0 herzuleiten. Dieser Ansatz wird z.B. in [Kie10] beschrieben; wir wollen hier jedoch einen anderen Weg wählen: Es sei γ_0 die das

Funktional minimierende Kurve. Wir nehmen hierbei o.B.d.A.² an, dass γ_0 nach Kurvenlänge parametrisiert ist - also $\|\gamma_0\|_2 \equiv 1$ auf I . Soll γ_0 das Funktional minimieren, so muss es insbesondere eine stationäre Funktion desgleichen sein; es muss also für alle Kurven $\delta\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\delta\gamma(a) = \delta\gamma(b) = 0$

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = 0 \quad (2.2)$$

gelten. Die Variation $\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma]$ von \mathcal{L} berechnet sich hierbei nach

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|\mathbf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2 dt \Big|_{\varepsilon=0} \quad (2.3)$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|\mathbf{D}\gamma_0(t) + \varepsilon\mathbf{D}\delta\gamma(t)\|_2 \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (2.4)$$

$$= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^3 \mathbf{D}\delta\gamma_k(t) \mathbf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)_k(t)}{\|\mathbf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2} \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (2.5)$$

$$= \int_a^b \frac{\langle \mathbf{D}\gamma_0, \mathbf{D}\delta\gamma \rangle(t)}{\|\mathbf{D}\gamma_0(t)\|_2} dt. \quad (2.6)$$

Aufgrund der Parametrisierung nach Kurvenlänge gilt $\|\mathbf{D}\gamma_0\|_2 \equiv 1$ und somit

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \int_a^b \langle \mathbf{D}\gamma_0, \mathbf{D}\delta\gamma \rangle(t) dt, \quad (2.7)$$

was durch partielle Integration übergeht zu

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \langle \mathbf{D}\gamma_0, \delta\gamma \rangle(t) \Big|_a^b - \int_a^b \langle \mathbf{D}^2\gamma_0, \delta\gamma \rangle(t). \quad (2.8)$$

Indem wir die Begriffe der Orthogonal- und Tangentialkomponenten einführen, können wir diese Aussage noch etwas verschärfen.

Definition 2.3 (Orthogonal- und Tangentialkomponente eines Vektors).

Es sei M eine Fläche im \mathbb{R}^n mit Normaleneinheitsfeld $\nu : M \rightarrow S^{n-1}$. Sei weiterhin $v \in \mathbb{R}^n$ und $u \in M$. Wir definieren die Orthogonalkomponente $v^\perp(u)$ sowie die Tangentialkomponente $v^\top(u)$ von v bzgl. ν in u durch

$$v^\perp(u) := \langle v, \nu(u) \rangle \nu(u) \quad (2.9)$$

$$v^\top(u) := v - v^\perp(u). \quad (2.10)$$

Satz 2.4.

Ist $\gamma : I := (a, b) \rightarrow M$ eine nach Kurvenlänge parametrisierte Kurve auf einer

²Eine solche Parametrisierung existiert immer, für einen Beweis siehe z.B. [EJ14, Lemma 2.1.2]. Ein weiterer sehr eleganter Beweis einer Verallgemeinerten Aussage ist in [Tu17, Proposition 2.3 und 2.4] zu finden.

Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ so gilt für alle Kurven $\delta\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\delta\gamma(a) = \delta\gamma(b) = 0$

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = [\langle D\gamma_0, \delta\gamma \rangle(t)]_a^b - \int_a^b \langle (D^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma \rangle(t) dt, \quad (2.11)$$

wobei $(D^2\gamma_0)^\top$ die Tangentialkomponente von $D^2\gamma_0$ bezeichnet.

Beweis. Das Grundvorgehen ist analog zu obiger Herleitung. Das Ersetzen von $D^2\gamma_0$ durch seine Tangentialkomponente $(D^2\gamma_0)^\top$ rechtfertigen wir dadurch, dass $\delta\gamma(t)$ für alle $t \in I$ im Tangentialraum $T_{\gamma_0(t)}M$ liegt:

Es gilt $\delta\gamma \in T_{\gamma_0}M$, da γ_0 sowie $\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma$ Kurven auf M sind. Somit sind $D\gamma_0, D(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma) = D\gamma_0 + \varepsilon D\delta\gamma \in T_{\gamma_0}M$. Die Aussage folgt somit direkt aus der Vektorraumseigenschaft des Tangentialraums. Wir schreiben nun $D^2\gamma_0 = D^2\gamma_0^\perp + D^2\gamma_0^\top$ und bemerken, dass $D^2\gamma_0^\perp$ im Normalraum - also dem Orthogonalraum des Tangentialraums liegt. Durch Ausnutzen der Bilinearität des Skalarproduktes folgt die Behauptung. \square

Wir bemerken weiterhin, dass aufgrund unserer Anfangs- und Endbedingung für $\delta\gamma$ stets $[\langle D\gamma_0, \delta\gamma \rangle(t)]_a^b = 0$ gelten muss. Da wir einen stationären Punkt des Längenfunktionalen suchen muss also

$$\int_a^b \langle (D^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma \rangle(t) dt = 0 \quad (2.12)$$

gelten, was offensichtlich der Fall ist wenn $(D^2\gamma_0)^\top \equiv 0$. Da wir eingangs festgestellt hatten, dass eine "gerade" Linie intuitiv kürzer als eine "krumme" ist nennen wir den Vektor $D^2\gamma_0^\top$ den *geodätischen Krümmungsvektor* und seine Norm $\|D^2\gamma_0^\top\|$ die *geodätische Krümmung*. Kurven für welche die geodätische Krümmung verschwindet nennen wir *Geodäten*. Dies halten wir in der folgenden Definition fest.

Definition 2.5 (Geodäte, geodätische Krümmung).

Es sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve auf einer Fläche M . Gilt

$$(D^2\gamma)^\top \equiv 0 \text{ auf } I, \quad (2.13)$$

so nennen wir γ eine *Geodäte*. Für eine allgemeine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ nennen wir $(D^2\gamma)^\top$ den *geodätischen Krümmungsvektor* und $\|(D^2\gamma)^\top\|_2$ die *geodätische Krümmung*.

Bemerkung 2.6.

Es gibt weitere Motivationen für diese Definition welche wir hier nicht im Detail behandeln wollen. So kann man die geodätische Krümmung zum Beispiel als ein Maß dafür interpretieren, wie sich eine Mannigfaltigkeit von ihrem Tangentialraum wegkrümmt.

2.2 Die Levi-Civita Ableitung

Aus der Analysis kennen wir bereits die Richtungsableitung. Die Abbildung $v \mapsto D_v$, welche einem Tangentialvektor $v \in T_p M$ die Richtungsableitung D_v zuordnet lässt, eine Interpretation von Tangentialvektoren als Differentialoperatoren für Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zu. Gehen wir nun von Vektoren an einem Punkt zu Vektorfeldern $X \in \mathfrak{X}(M)$ über, so können wir genauso dieses Vektorfeld auf f anwenden, es gilt $(Xf)(p) = D_{X_p} f$. Eine weitere Verallgemeinerung, bei der wir die Funktion f durch ein Vektorfeld $Y = \sum_k y^k \partial_k$ ersetzen, liefert uns schließlich die Richtungsableitung eines Vektorfelds entlang eines weiteren Vektorfelds; wir definieren:

Definition 2.7 (Richtungsableitung eines Vektorfelds entlang eines Vektorfelds).

Es sei M eine reguläre Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Weiterhin seien $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M und $Y = \sum_k y^k \partial_k \in \Gamma(T\mathbb{R}^n|_M)$ ein Vektorfeld entlang M in \mathbb{R}^n . Dann definieren wir die Richtungsableitung von Y entlang X durch

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T\mathbb{R}^n|_M) \rightarrow \Gamma(T\mathbb{R}^n|_M) \quad (2.14)$$

$$(X, Y) \mapsto D_X Y := \sum_k (X y^k) \partial_k. \quad (2.15)$$

Über dieses Thema ließe sich noch sehr viel mehr sagen, aus Platzgründen verweisen wir den interessierten Leser hier auf [Tu10, S. 10ff] sowie [Tu17, S. 22ff]. Nötiges Vorwissen ist aus der Linearen Algebra bekannt und wird z.B. in [LM14, Kapitel 11] behandelt.

Den Operator ∇ , welcher zwei glatten Vektorfeldern $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf und $Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^3|_M)$ entlang der Fläche gerade den für die Geodäten wichtigen Tangentialteil zuordnet, nennen wir *Levi-Civita-Ableitung*.

Definition 2.8 (Levi-Civita-Ableitung^a).

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Die *Levi-Civita-Ableitung* ∇ auf M ist definiert durch

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T\mathbb{R}^3|_M) \rightarrow \Gamma(T\mathbb{R}^3|_M) \quad (2.16)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y := (D_X Y)^\top. \quad (2.17)$$

^aTULLIO LEVI-CIVITA, 1873-1941, italienischer Mathematiker der sich u.a. mit Tensoranalysis und deren Anwendung auf die Einsteinsche Relativitätstheorie beschäftigte.

Für Vektorfelder, welche entlang einer Kurve verlaufen, spezialisieren wir diese zur *kovarianten Ableitung*.

Definition 2.9 (Kovariante Ableitung).

Es sei M eine Fläche, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve auf M und $V \in \Gamma(TM|_{\gamma(t)})$ ein Vektorfeld entlang der Kurve mit einem Vektorfeld $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$ auf der Mannigfaltigkeit, sodass $V(t) = \tilde{V}(\gamma(t))$. Dann definieren wir die kovariante

Ableitung von V entlang γ auf M durch

$$\frac{DV}{dt}(t) := \nabla_{D\gamma(t)} \tilde{V}. \quad (2.18)$$

Bemerkung 2.10 (Alternative Definition).

Teils wird die kovariante Ableitung auch äquivalent durch

$$\frac{DV}{dt}(t) := \sum_i Dv^i \partial_i + v^i \nabla_{D\gamma(t)} \partial_i \quad (2.19)$$

definiert, wobei $V =: (v^1, v^2)$ und $\partial_i := \partial_{x_i}$ mit einer Koordinatenumgebung (U, x_1, x_2) . Wir werden hierbei die Äquivalenz ohne Beweis nutzen und verweisen den interessierten Leser auf [Tu17, Theorem 13.1].

Bemerkung 2.11.

Der Begriff der Kovarianz bezieht sich hierbei auf die Ko- und Kontravarianz von Tensoren und sagt informal aus, dass sich eine Größe bei Koordinatenwechseln "wie die Koordinaten ändert". Eine Ausführliche Erläuterung ist in [Irg19, Section 6.2.1] zu finden.

Wir stellen fest, dass der geodätische Krümmungsvektor $(D^2\gamma_0)^\top$ sich mit Bezug auf diesen neuen Begriff durch

$$(D^2\gamma_0)^\top(t) = \frac{D\gamma_0}{dt}(t) \quad (2.20)$$

ausdrücken lässt.

Ein Beweis dieses Zusammenhangs ist in [Tu17, Proposition 4.11] zu finden, wir wollen hier lediglich ein Beispiel betrachten.

Beispiel 2.12.

Betrachten wir nun die (nach Kurvenlänge parametrisierte) Kurve

$$\gamma : I := \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \gamma(I) =: M \subseteq \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

mit der inversen Abbildung

$$\gamma^{-1} : M \rightarrow I, \quad (2.22)$$

dann ist $D\gamma : I \rightarrow \bigsqcup_{t \in I} T_{\gamma(t)} M, t \mapsto \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ und somit das Geschwindigkeitsvektorfeld $\tilde{\gamma}$ von γ auf M gegeben durch

$$\tilde{\gamma} := D\gamma \circ \gamma^{-1} : M \rightarrow \bigsqcup_{p \in M} T_p M, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Es sei nun $p = (x, y) = \gamma(t) \in M$ und $v_p := \tilde{\gamma}(p) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} v^x \\ v^y \end{pmatrix}$. Schreiben wir $D\gamma(t)$ als Linearkombination $-y\partial_x + x\partial_y$ und wenden diese auf die Komponenten von v_p an so erhalten wir

$$D\gamma(t)v^x = -y\partial_x(-y) + x\partial_y(-y) = -x \quad (2.24)$$

$$D\gamma(t)v^y = -y\partial_x(x) + x\partial_y(x) = -y \quad (2.25)$$

und somit

$$D_{D\gamma(t)}v_p = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = D^2\gamma(t). \quad (2.26)$$

Wir sehen also, dass tatsächlich die Zweite Ableitung gleich der Richtungsableitung ist - den Schritt der Tangentialprojektion können wir uns somit sparen.

2.3 Christoffelsymbole

Wir bemerken, dass diese Berechnung – besonders für kompliziertere Kurven – nicht unbedingt einfach durchzuführen ist und würden daher gerne eine weitere Möglichkeit finden ∇ darzustellen.

Hierzu wollen wir zunächst einige Eigenschaften der Levi-Civita Ableitung festhalten. Diese folgen aus den Eigenschaften der Richtungsableitung.

Definition 2.13 (Torsion, Krümmung, Lie-Klammer^a).

Es sei M eine Fläche. Wir definieren die sog. Lie-Klammer durch ihre Wirkung auf eine glatte Funktion f auf M in einem Punkt $p \in M$:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), [X, Y]_p f := (X_p Y - Y_p X)f \quad (2.27)$$

Weiterhin definieren wir Torsion

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.28)$$

sowie den Krümmungsoperator

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{End}(\mathfrak{X}(M)), (X, Y) \mapsto [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}. \quad (2.29)$$

^aSOPHUS LIE, 1842 - 1899, sehr bedeutender norwegischer Mathematiker; z.B. bekannt für die sog. *Lie-Theorie* in welcher stetige Symmetrien untersucht werden.

Lemma 2.14 (Eigenschaften der Levi-Civita Ableitung).

Es sei M eine Fläche, \mathcal{F} der Ring der C^∞ Funktionen auf M und $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Dann hat ∇ folgende Eigenschaften:

1. (\mathcal{F} -Linearität im ersten Argument) für alle $f, g \in \mathcal{F}$ gilt

$$\nabla_{fX+gZ}Y = f\nabla_XY + g\nabla_ZY \quad (2.30)$$

2. (Leibniz Regel)

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_XY \quad (2.31)$$

3. (Torsionsfreiheit)

$$T(X, Y) = 0 \quad (2.32)$$

Seien nun $X = \sum_k a^k \partial_k, Y = \sum_k b^k \partial_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt nach diesen Eigenschaften

$$\nabla_X Y \underset{\text{Linearität}}{=} \sum_k a^k \nabla_{\partial_k} Y \underset{\text{Leibniz Regel}}{=} \sum_k a^k \sum_j (\partial_k b^j) \partial_j + b^j \nabla_{\partial_k} \partial_j. \quad (2.33)$$

Also legt die Wirkung von ∇ auf die ∂_j die Abbildung vollständig fest. Es sei daher M eine Fläche mit einer Koordinatenumgebung $(U, \phi) = (U, x^1, x^2)$ und $\partial_i := \partial_{x^i}, i = 1, 2$. Dann liegt $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ wieder in $\mathfrak{X}(M)$ und genügt somit einer Entwicklung

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (2.34)$$

Definition 2.15 (Christoffelsymbole^a).

Diese $2^3 = 8$ Koeffizienten Γ_{ij}^k bezeichnen wir als *Christoffelsymbole* bzgl. (U, ϕ) .

^aELWIN BRUNO CHRISTOFFEL, 1829-1900, deutscher Mathematiker welcher sich u.a. mit Tensoranalysis und mathematischer Physik beschäftigte.

Diese Christoffelsymbole besitzen folgende wichtige Eigenschaft:

Lemma 2.16 (Symmetrie der Christoffelsymbole).

Für $i, j, k = 1, 2$ gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (2.35)$$

Beweis. Folgt aus Torsionsfreiheit und dem Satz von Schwarz. Ein detaillierter Beweis ist in [Tu17, Proposition 13.5] zu finden. \square

Bemerkung 2.17.

Es sei angemerkt, dass wir hier den Spezialfall der Levi-Civita Ableitung auf Flächen im \mathbb{R}^3 behandeln. Ist diese allgemeiner definiert muss diese Eigenschaft nicht zwingend gelten!

Die Christoffelsymbole ermöglichen es uns im nächsten Schritt die *Geodätengleichung* zu entwickeln. Da die Bestimmung der Christoffelsymbole allerdings nicht zwingend trivial, ist wollen wir zunächst jedoch noch ein Beispiel betrachten.

Beispiel 2.18 (Graph einer Funktion - Hyperbolischer Paraboloid).

Es sei M der Graph der Funktion $w(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{2}$ mit $u, v > 0$. Also wird M durch

$$\phi : U := \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow M, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ w(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

parametrisiert, dann ist eine Karte von M gegeben durch $\phi^{-1} : M \rightarrow \mathbb{R}$. Nach Satz 1.8 ist eine Basis von TM gegeben durch ∂_u, ∂_v . Es gilt

$$\phi_u \circ \phi^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \simeq \partial_u = 1\partial_{r^1} + x\partial_{r^3} \quad (2.37)$$

und somit

$$D_{\partial_u} \partial_u = \partial_u(1)\partial_{r^1} + \partial_u(x)\partial_{r^3} \quad (2.38)$$

$$= \partial_{r^3} \quad (2.39)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi_{uu} \circ \phi^{-1}(x, y, z). \quad (2.40)$$

Die Richtungsableitung in Richtung ∂_u entspricht somit genau der partiellen Ableitung nach u im Parameterbereich. Analog finden wir

$$D_{\partial_v} \partial_v = -\partial_{r^3} \quad (2.41)$$

$$D_{\partial_u} \partial_v = 0. \quad (2.42)$$

Wir benötigen nun die Tangentialkomponenten dieser Vektoren, also zunächst ein Normaleneinheitsfeld $n \in \Gamma(T\mathbb{R}^3|_M)$ auf M . Wie aus der Analysis bekannt gewinnen wir dieses wie folgt: es sei

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto z - w(x, y), \quad (2.43)$$

dann ist M gerade die Nullstellenmenge von g . Ein mögliches Normaleneinheitsfeld ist nun gegeben durch

$$n : M \rightarrow T\mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|_2}. \quad (2.44)$$

Da wir auf U arbeiten wollen, definieren wir $\nu = n \circ \phi$ und erhalten somit

$$\nu : U \rightarrow T\mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} \begin{pmatrix} -u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Wir können nun die Definition der Tangentialkomponente aus 2.3 direkt anwenden und erhalten

$$\nabla_{\partial_u} \partial_u = (\phi_{uu}(u, v))^{\top} = \phi_{uu}(u, v) - \langle \phi_{uu}(u, v), \nu(u, v) \rangle \nu(u, v) \quad (2.46)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{u^2 + v^2 + 1} \begin{pmatrix} -u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

sowie

$$\nabla_{\partial_v} \partial_v = (\phi_{vv}(u, v))^{\top} = \phi_{vv}(u, v) - \langle \phi_{vv}(u, v), \nu(u, v) \rangle \nu(u, v) \quad (2.48)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u^2 + v^2 + 1} \begin{pmatrix} -u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Betrachten wir nun die ersten beiden Komponenten und vergleichen diese mit ∂_u, ∂_v in Gleichungen (2.40) und (2.41) so sehen wir direkt, dass

$$\nabla_{\partial_u} \partial_u = \frac{u}{u^2 + v^2 + 1} \partial_u + \frac{-v}{u^2 + v^2 + 1} \partial_v \quad (2.50)$$

$$\nabla_{\partial_v} \partial_v = \frac{-u}{u^2 + v^2 + 1} \partial_u + \frac{v}{u^2 + v^2 + 1} \partial_v \quad (2.51)$$

$$\nabla_{\partial_v} \partial_u = \nabla_{\partial_u} \partial_v = 0 \quad (2.52)$$

gelten muss.

Somit sind alle Christoffelsymbole

$$\Gamma_{uu}^u(u, v) = \frac{u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad \Gamma_{uu}^v(u, v) = \frac{-v}{u^2 + v^2 + 1} \quad (2.53)$$

$$\Gamma_{vv}^u(u, v) = \frac{-u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad \Gamma_{vv}^v(u, v) = \frac{v}{u^2 + v^2 + 1} \quad (2.54)$$

$$\Gamma_{uv}^u(u, v) = 0, \quad \Gamma_{uv}^v(u, v) = 0 \quad (2.55)$$

$$\Gamma_{vu}^u(u, v) = 0, \quad \Gamma_{vu}^v(u, v) = 0. \quad (2.56)$$

Wie wir in diesem Beispiel festgestellt haben, ergeben sich die Richtungsableitungen der partiellen Ableitungsoperatoren einer Parametrisierung genau als die zweiten Ableitungen - dies war keine Kuriosität des gewählten Beispiels, sondern lässt sich im Allgemeinen zeigen. Es sei M eine Fläche mit (lokaler) Parametrisierung $\phi : U \rightarrow M$ und $\phi_{ij} := \partial_{r^i} \partial_{r^j} \phi$. Kombinieren wir dies mit der Definition der Christoffelsymbole erhalten wir

$$(\phi_{ij} \circ \phi^{-1})^{\top} \simeq \nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \simeq \sum_k \Gamma_{ij}^k (\phi_k \circ \phi^{-1}) \text{ für } i, j = 1, 2 \quad (2.57)$$

$$\iff \phi_{ij}^{\top} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \phi_k. \quad (2.58)$$

Bemerkung 2.19.

Fasst man $T_p M$ als Unterraum von $T_p \mathbb{R}^3$ auf, so ist dessen orthogonales Komplement der Normalraum $N_p M$ von M - demnach erhalten wir die Gleichungen

$$\phi_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \phi_k + f_{ij} \nu, \quad (2.59)$$

wobei f_{ij} eine Glatte Funktion und ν ein Normaleneinheitsfeld auf M ist. Diese Gleichungen werden in der klassischeren Literatur wie z.B. [WB19] oftmals zur Definition der Christoffelsymbole herangezogen.

Es seien nun $g_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$ die Einträge der Gramschen Matrix $G = J_\phi^T J_\phi$ von ϕ . Für $r = 1, 2$ gilt

$$\partial_r g_{ij} = \partial_r (\langle \phi_i, \phi_j \rangle) = \langle \phi_{ir}, \phi_j \rangle + \langle \phi_i, \phi_{jr} \rangle; \quad (2.60)$$

durch Permutation der Indizes und Kombination der Gleichungen erhalten wir daraus

$$\langle \phi_{ij}, \phi_r \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir}). \quad (2.61)$$

Bilden wir das Skalarprodukt der Gleichungen (2.58) mit ϕ_i , so ergibt sich für $i, j, r = 1, 2$ das folgende System linearer Gleichungen

$$\langle \phi_{ij}, \phi_r \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k \langle \phi_k, \phi_r \rangle \iff \frac{1}{2} (\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir}) = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kr}. \quad (2.62)$$

Es seien nun $\Gamma_i := (\Gamma_{ij}^k)_{j,k=1,2} \in \mathbb{R}^{2,2}$ und $A_i := \frac{1}{2} (\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir})_{r,j=1,2} \in \mathbb{R}^{2,2}$ dann ist obiges System äquivalent zu

$$\Gamma_i G = A_i, i = 1, 2, \quad (2.63)$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Da G stets invertierbar ist, ist dieses System immer lösbar. Es folgt:

Satz 2.20.

Die Christoffelsymbole sind durch die Metrik und ihre Ableitungen eindeutig festgelegt.

Diese Aussage wirft eventuell die Frage auf, in wie weit die erste Fundamentalform bzw. Metrik die Geometrie einer Fläche bestimmen. Die Antwort hierzu liefert der *Satz von Bonnet*³: unter bestimmten Bedingungen (nennenswert sind hier die Codazzi-Mainardi Gleichungen, siehe z.B. [WB19, Section 6.3] oder [Tu17,

³PIERRE OSSIAN BONNET, 1819-1892, französischer Mathematiker der vornehmlich für seine Arbeiten in der Differentialgeometrie und der Didaktik der Mathematik bekannt ist.

Theorem 8.1]) legen die erste und zweite Fundamentalform eine Fläche eindeutig (modulo euklidischer Transformationen) fest. Die Wichtigkeit dieses Satzes wird auch durch die Bezeichnung als *Hauptsatz der Flächentheorie* hervorgehoben. Wir wollen diesen Satz hier jedoch nicht weiter verfolgen und verweisen deshalb auf [WB19, Section 6.3, Theorem 1]. Stattdessen wenden wir uns nun weiter unserer Untersuchung der Geodäten mittels der Christoffelsymbole zu.

2.4 Die Geodätengleichung

2.4.1 Bestimmung der Gleichung

Wir wollen nun eine Differentialgleichung bzw. ein System aus Differentialgleichungen bestimmen, mit welchem wir erste Aussagen über Geodäten treffen können. Diese Differentialgleichung, welche zuerst durch Euler⁴ bestimmt wurde [Sti10, S. 347], liefert uns der folgende Satz.

Satz 2.21 (Geodätengleichung).

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $(U, \phi) = (U, x^1, x^2)$ eine Koordinatenumgebung mit zugehörigen Christoffelsymbolen $\Gamma_{ij}^k, i, j, k = 1, 2$. Weiterhin sei $\gamma : I := [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve auf M . Dann ist γ genau dann eine Geodäte, wenn die sogenannten *Geodätengleichung*

$$D^2 y^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k D y^i D y^j = 0 \quad (2.65)$$

für $k = 1, 2$ gilt, wobei $y := \phi \circ \gamma : I \rightarrow U$ eine Kurve auf U ist.

Beweis. Es sei

$$V(t) := Dy(t) = \sum_j Dy^j(t) \partial_j. \quad (2.66)$$

⁴LEONHARD EULER, 1707-1783, einer der wohl bedeutsamsten Mathematiker welcher seine enorme Produktivität in vielen mathematischen Gebieten sowie anderen Fachgebieten wie der Astronomie und Geographie unter Beweis gestellt hat.

Dann gilt nach Bemerkung 2.10

$$\frac{DT}{dt}(t) = \sum_i D^2 y^j \partial_i + \sum_i D y^j \nabla_{D\gamma(t)} \partial_i \quad (2.67)$$

$$= \sum_i D^2 y^i \partial_i + \sum_i D y^j \sum_j D y^j \nabla_{\partial_j} \partial_i \quad (\text{Linearität}) \quad (2.68)$$

$$\stackrel{2.34}{=} \sum_i D^2 y^i \partial_i + \sum_i D y^j \sum_j D y^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (2.69)$$

$$= \sum_k D^2 y^k \partial_k + \sum_{i,j,k} D y^j D y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (2.70)$$

$$= \sum_k \left(D^2 y^k + \sum_{i,j} D y^j D y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k \quad (2.71)$$

$$\stackrel{!}{=} 0. \quad (2.72)$$

Da die ∂_k eine Basis bilden und somit linear unabhängig sind, gilt dies genau dann wenn für $k = 1, 2$

$$D^2 y^k + \sum_{i,j} D y^j D y^j \Gamma_{ij}^k = 0. \quad (2.73)$$

□

Bemerkung 2.22.

Tatsächlich sind diese Gleichungen auch auf höherdimensionalen Flächen charakterisierend, hierbei laufen die Indizes demensprechend weiter; der Beweis bleibt ansonsten exakt gleich.

2.4.2 Charakterisierung und Lösungsverhalten

Bei diesem Differentialgleichungssystem handelt es sich um ein System aus gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Für die Koeffizientenfunktionen fordern wir wie immer die Glattheit - insbesondere also Stetigkeit und somit folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz der gewöhnlichen Differentialgleichungen⁵ die Existenz einer Lösung für Anfangswertprobleme(AWP) dieser Gleichung - lokal sogar die Eindeutigkeit. Aufgrund der speziellen Form der Geodätengleichung lassen sich weitere Aussagen über Geodäten treffen - auf diese wollen wir nicht näher eingehen und verweisen daher auf [EJ14, S. 63f].

Beispiel 2.23 (Fortsetzung von 2.18).

⁵auch *Satz von Picard-Lindelöf* oder *Satz von Cauchy-Lipschitz*; vgl. z.B. [Heu09, Satz 56.1], [GJ16, Satz 3.6] oder [AE06b, Theorem 8.13] .

Wie zuvor bestimmt, sind die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{uu}^u(u, v) = \frac{u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad \Gamma_{uu}^v(u, v) = \frac{-v}{u^2 + v^2 + 1} \quad (2.74)$$

$$\Gamma_{vv}^u(u, v) = \frac{-u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad \Gamma_{vv}^v(u, v) = \frac{v}{u^2 + v^2 + 1} \quad (2.75)$$

$$\Gamma_{uv}^u(u, v) = 0, \quad \Gamma_{uv}^v(u, v) = 0 \quad (2.76)$$

$$\Gamma_{vu}^u(u, v) = 0, \quad \Gamma_{vu}^v(u, v) = 0. \quad (2.77)$$

Demnach erhalten wir die Geodätengleichungen

$$D^2 y^u + Dy^u Dy^u \frac{u}{u^2 + v^2 + 1} + Dy^v Dy^v \frac{-u}{u^2 + v^2 + 1} = 0 \quad (2.78)$$

$$D^2 y^v + Dy^u Dy^u \frac{-v}{u^2 + v^2 + 1} + Dy^v Dy^v \frac{v}{u^2 + v^2 + 1} = 0. \quad (2.79)$$

Dieses System ist äquivalent zu

$$D^2 y^u + \frac{u}{u^2 + v^2 + 1} ((Dy^u)^2 - (Dy^v)^2) = 0 \quad (2.80)$$

$$D^2 y^v + \frac{v}{u^2 + v^2 + 1} ((Dy^v)^2 - (Dy^u)^2) = 0. \quad (2.81)$$

Hierbei sind (u, v) die Punkte in U durch welche die Kurve verläuft - also $(u, v) = (y^u, y^v)$. Geben wir nun eine Startposition und Richtung bzw. Geschwindigkeit vor, betrachten also das AWP

$$y(0) = (y_0^u, y_0^v) \in U \quad (2.82)$$

$$Dy(0) = (Dy_0^u, Dy_0^v) \in T_{y(0)}U \quad (2.83)$$

so können wir Geodäten berechnen. Wir bemerken, dass bereits im Falle dieser eher "einfachen" Fläche eine nicht wirklich triviale Gleichung vorliegt. Die numerische Lösung der AWP

$$y(0) = 1 \in \mathbb{R}^2 \quad (2.84)$$

$$\|Dy(0)\|_2 = 1 \quad (2.85)$$

für einige verschiedene Richtungen $Dy(0)$ ergibt die in Abbildung dargestellten 2.2 Lösungskurven.

Bemerkung 2.24.

Das Bestimmen von Geodäten kann auch numerisch schwierig werden. Ein Überblick über die Thematik und eine numerische Lösungsmethode für Geodätenprobleme kann z.B. in [CWW17] gefunden werden.

Da lokal stets eine eindeutige Geodäte existiert macht es Sinn die sog. *geodätische Torsion* einer Kurve zu betrachten.

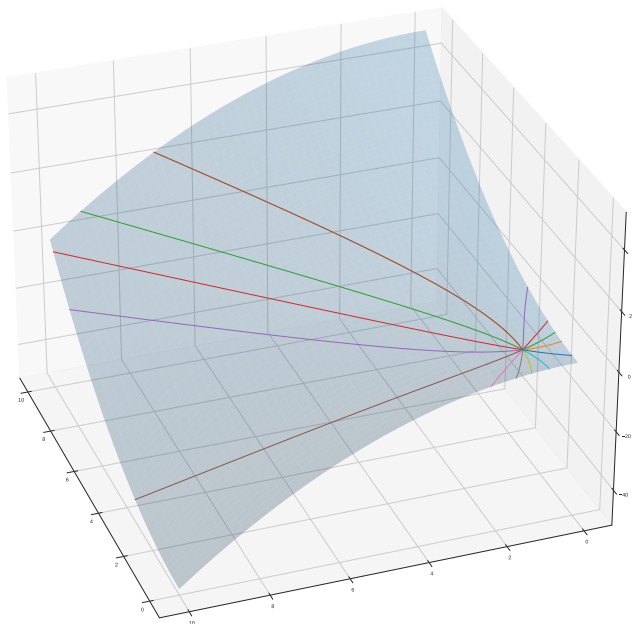


Abbildung 2.2: Numerisch bestimmte Geodäten

Definition 2.25 (geodätische Torsion).

Es sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve auf einer Fläche M . Die geodätische Torsion von γ in $p = \gamma(t_p) \in \gamma(I)$ ist definiert als die Torsion in p der Geodäte welche das AWP

$$\alpha(0) = p \quad (2.86)$$

$$D\alpha(0) = D\gamma(t_p) \quad (2.87)$$

der Geodätengleichung löst.

2.5 Paralleltransport

2.5.1 Parallelität

Betrachten wir einen Vektor $v \in T\mathbb{R}^2$ (als Pfeil) in der Ebene und verschieben wir diesen parallel entlang einer Kurve, so können wir dies als ein konstantes Vektorfeld entlang dieser Kurve auffassen; in Zeichen $\gamma : I := [a, b] \rightarrow T\mathbb{R}^2, t \rightarrow v$. Sicherlich würden wir sagen, dass der resultierende Vektor parallel

zum Anfangsvektor ist. Ist das Vektorfeld hingegen so geartet, dass der Vektor beispielsweise eine Rotation durchführt und am Ende wieder parallel zum ursprünglichen Vektor ist⁶, so würden wir nicht sagen, dass wir den ursprünglichen Vektor parallel verschoben haben. Parallelität kann also als eine Eigenschaft von Vektorfeldern entlang Kurven verstanden werden und hängt gewissermaßen damit zusammen, wie konstant ein Vektorfeld ist. Betrachten wir nun eine Kugel und ein Vektorfeld entlang dieser Kugel. Natürlich können wir auch hier sagen, dass ein Vektorfeld parallel ist, wenn es konstant ist, jedoch wirkt es hier nicht mehr so einsichtig und es ergibt sich folgendes Problem: konstante Vektorfelder entlang der Kugel liegen i.A. nicht mehr im Tangentialraum der Kugel sondern im Tangentialraum des einbettenden Raums. Sie sind also inkompatibel mit der inneren Geometrie. Wir können jedoch stattdessen Vektorfelder betrachten die so *konstant wie möglich* sind. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 2.26 (Parallelität).

Wir nennen ein Vektorfeld $V \in \Gamma(TM|_\gamma)$ entlang einer Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ auf einer Mannigfaltigkeit M genau dann *parallel*, wenn die Kovariante Ableitung konstant 0 ist; es gilt also

$$\frac{DV}{dt} \equiv 0. \quad (2.88)$$

Bemerkung 2.27 (Geodäten und Parallelität).

Betrachten wir die Definition der Geodäten so sehen wir schnell ein, dass eine Kurve genau dann eine Geodäte ist, wenn ihr Geschwindigkeitsvektorfeld parallel ist.

Fasst man diese Definition als Differentialgleichung auf und nimmt man an, dass man einen Startpunkt sowie einen Startvektor gegeben hat, so versichert einem der Existenz- und Eindeutigkeitssatz⁵ ein weiteres Mal die lokale Existenz einer Lösung. Es lässt sich zeigen, dass sich durch wiederholtes Anwenden dieses Lösungssatzes eine globale Parallelverschiebung entlang einer Stückweise glatten Kurve durchführen lässt. Für einen ausführlichen Beweis sei auf [Tu17, Theorem 14.14] verwiesen.

2.5.2 Holonomie

Wie wir es erwarten würden, sind Längen und Winkel invariant unter Parallelverschiebung. Es gilt der folgende Satz.

Satz 2.28 (Invarianz der Metrik unter Parallelverschiebung).

Es sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $W, V \in \Gamma(TM|_\gamma)$ parallele Vektorfelder entlang einer Kurve $\gamma : I \rightarrow M$. Dann gilt

$$\langle V(t), W(t) \rangle = c \quad (2.89)$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $t \in I$.

⁶Also z.B. $t \mapsto R(\frac{2\pi}{b-a}(t-a))v$ mit einer Rotationsmatrix R

Beweis. Es gilt

$$D\langle V(t), W(t) \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}(t), W(t) \right\rangle + \left\langle V(t), \frac{DW}{dt}(t) \right\rangle \quad (2.90)$$

$$= \langle 0, W(t) \rangle + \langle V(t), 0 \rangle = 0. \quad (2.91)$$

Somit ist $\langle V(t), W(t) \rangle$ konstant. \square

Korollar 2.29.

Längen und Winkel sind invariant unter Paralleltransport.

Ein interessantes Phänomen der Parallelverschiebung tritt auf wenn man Vektoren entlang geschlossener Wege verschiebt. Man würde wohl erwarten, dass ein so verschobener Vektor sich nicht verändert - dies ist jedoch i.A. nicht der Fall. Wir bezeichnen dieses Phänomen als Holonomie. Hierzu betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 2.30 (Holonomie auf der Kugel).

Die Geodäten auf der Kugeloberfläche sind gerade die sog. *Großkreise* - also Kreise, die als Schnittkurven der Fläche mit Ebenen durch den Mittelpunkt entstehen. Es sei ein geschlossener Weg $\alpha = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ gegeben, der aus einer Geodäte γ_2 entlang des Äquators, sowie zwei weiteren Geodäten γ_1, γ_3 , welche die Endpunkte von γ_2 mit dem Nordpol N verbinden, besteht. Es sei nun ein Tangentialvektor $v \in T_N S^2|_{\gamma_1}$ an γ_1 im Nordpol gegeben. Verschieben wir diesen entlang γ_1 zum Äquator, entlang γ_2 auf dem Äquator und schließlich über γ_3 wieder zum Nordpol so erhalten wir einen Vektor, der Tangential zu γ_3 verläuft. Insbesondere ist er also nicht mehr tangential zu γ_1 - er hat sich also (da seine Länge gleich sein muss) gedreht.

2.6 Schlussbemerkung

Geodäten sind ein höchst komplexes Thema zu dem es noch weitaus mehr zu sagen gibt. Weitere Themen sind zum Beispiel geodätische Koordinaten, die geodätische Exponentialabbildung, geodätische Dreiecke oder den Zusammenhang zwischen geodätischer und Gaußscher Krümmung welche mittels des Satzes von Gauß-Bonnet eine Verbindung zwischen Topologie und Geometrie offenbart. Aus Platzgründen müssen wir hier jedoch auf die Literatur verweisen – insbesondere sind hier [WB19], [EJ14] und [Mil65] hervorzuheben.

Diese Schlüsse enthalten fast Alles, was Euler zuerst über' die Krümmung von Oberflächen gelehrt hat.

Kapitel 3

Allgemeine Flächentheorie
CARL FRIEDRICH GAUSS [Gau28, S. 17, sic]

Das Theorema Egregium

Das Theorema Egregium besagt, dass die *Gaußsche Krümmung* eine Größe der inneren Geometrie ist.

Diese Aussage lässt sich auf verschiedenste Arten beweisen, so folgt ein sehr einfacher Beweis direkt aus der Definition der Gaußschen Krümmung als Determinante des Formoperators und der Invarianz der Determinante eines Endomorphismus unter Ähnlichkeitstransformationen (siehe hierzu z.B. [LM14]):

Beweis. Ist M eine Fläche, so ist der Formoperator L_p ein Endomorphismus auf $T_p M$. Sei nun (U, ϕ) eine Karte, dann ist $\phi_*^{-1} \circ L_p \circ \phi_* : T_{\phi^{-1}(p)} U \rightarrow T_{\phi^{-1}(p)} U$ eine zu L_p ähnliche lineare Abbildung mit gleicher Determinante. Da ϕ beliebig war folgt die Invarianz. \square

Wir merken jedoch an, dass dieser Beweis sich direkt auf Koordinaten bezieht und desweiteren fundamental auf Methoden basiert auf welche Gauß zu seiner Zeit keinen Zugriff hatte: Gauß veröffentlichte seine *Allgemeine Flächentheorie*¹ [Gau28] im Jahr 1827, zu diesem Zeitpunkt existierte die moderne lineare Algebra jedoch noch nicht². Wir wollen daher einen anderen Beweis wählen bei dem wir stattdessen (wenn auch ähnlich zum ersten Beweis) zeigen, dass sich die Gaußsche Krümmung durch *Verbiegung* nicht ändert; hierbei sind wir außerdem etwas näher am Beweis von Gauß welcher auf "direktem Nachrechnen" beruhte. Hierzu benötigen wir eine Aussage über das Transformationsverhalten des Formoperators sowie die Gaußsche Krümmungsgleichung.

¹Das Theorema Egregium ist auf S.23f zu finden.

²So wurden Hermann Grassmanns (HERMANN GRASSMANN, 1809-1877, deutscher Mathematiker, Physiker und Sprachwissenschaftler. Gilt als Begründer der Vektor- und Tensorrechnung.) *Die lineale Ausdehnungslehre*(sic) erst im Jahr 1844 veröffentlicht und Arthur Cayley (ARTHUR CAYLEY, 1821-1895, englischer Mathematiker der heute vor allem für seine Arbeiten in der Gruppentheorie bekannt ist.) führte erst im Jahr 1857 (2×2) -Matrizen ein [Sti10]. Der Begriff des Vektorraums wurde erstmals im 19. Jhd. durch Stefan Banach (STEFAN BANACH, 1892-1945, polnischer Mathematiker. Gilt als Begründer der modernen Funktionalanalysis.) definiert.

Lemma 3.1.

Es seien M, \widetilde{M} Flächen im \mathbb{R}^3 , $\phi : M \rightarrow \widetilde{M}$ eine Isometrie und e_1, e_2 eine Orthonormalbasis von $T_p M$. Weiterhin sei L der Formoperator auf M und \widetilde{L} der auf \widetilde{M} . Dann gilt

$$\phi_* L_p(e_i) = \widetilde{L}_{\phi(p)}(\phi_* e_i), i = 1, 2. \quad (3.1)$$

Beweis. Da ϕ insbesondere ein Diffeomorphismus ist, ist das Differential $\phi_* : T_p M \xrightarrow{\sim} T_{\phi(p)} \widetilde{M}$ ein Isomorphismus der Tangentialräume. Die obige Gleichung folgt aus

$$L_p = \phi_*^{-1} \circ \widetilde{L}_{\phi(p)} \circ \phi_*, \quad (3.2)$$

was wir leicht als einfachen Basisübergang und die entsprechende Transformation einer linearen Abbildung erkennen. Alternativ kann man auch die Kettenregel auf die darstellende Matrix des Formoperators anwenden. \square

Lemma 3.2 (Gaußsche Krümmungsgleichung).

Für eine Fläche M und Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$R(X, Y)Z = \langle L(Y), Z \rangle L(X) - \langle L(X), Z \rangle L(Y). \quad (3.3)$$

Satz 3.3 (Theorema Egregium).

Es sei (M, g) eine Fläche im \mathbb{R}^3 , $p \in M$ ein Punkt auf M . Dann gilt:

1. Ist e_1, e_2 eine Orthonormalbasis von $T_p M$, dann gilt für die Gaußsche Krümmung K_p von M bei p

$$K_p = g(R_p(e_1, e_2)e_2, e_1). \quad (3.4)$$

2. Die Gaußsche Krümmung ist eine isometrisch invariante Größe.

Beweis. (1) Sehr technisch; siehe [Tu17, Beweis zu Theorem 8.3].

(2) Es seien M, \widetilde{M} Flächen im \mathbb{R}^3 und $\phi : M \rightarrow \widetilde{M}$ eine Isometrie und g, \widetilde{g} riemannsche Metriken auf M, \widetilde{M} und R, \widetilde{R} die Krümmungsoperatoren auf M, \widetilde{M} . Weiterhin sei e_1, e_2 eine Orthonormalbasis von $T_p M$. Dann gilt aufgrund der Isometrieeigenschaft von ϕ

$$\delta_i^j = g_p(e_i, e_j) = \widetilde{g}_{\phi(p)}(\phi_* e_i, \phi_* e_j), i, j = 1, 2 \quad (3.5)$$

womit $\phi_* e_1, \phi_* e_2$ eine Orthonormalbasis von $T_{\phi(p)} \widetilde{M}$ ist. Nach (1) gilt daher

$$\widetilde{K}_{\phi(p)} = \widetilde{g}_{\phi(p)}(\widetilde{R}_{\phi(p)}(\phi_* e_1, \phi_* e_2)\phi_* e_2, \phi_* e_1) \quad (3.6)$$

$$K_p = g_p(R_p(e_1, e_2)e_2, e_1) \quad (3.7)$$

$$= \widetilde{g}_{\phi(p)}(\phi_* R_p(e_1, e_2)e_2, \phi_* e_1) \text{ (Isometrie) } . \quad (3.8)$$

Es gilt also $K_p = \tilde{K}_{\phi(p)}$ genau dann, wenn

$$\phi_* R_p(e_1, e_2)e_2 = \tilde{R}_{\phi(p)}(\phi_* e_1, \phi_* e_2)\phi_* e_2. \quad (3.9)$$

Es gilt

$$\phi_* R_p(e_1, e_2)e_2 = \phi_* g_p(L_p(e_2), e_2)L_p(e_1) - \phi_* g_p(L_p(e_1), e_2)L_p(e_2) \quad (3.10)$$

Krümmungs-
gleichung

$$= \tilde{g}_{\phi(p)}(\phi_* L(e_2), \phi_* e_2)\phi_* L_p(e_1) \quad (3.11)$$

Isometrie &
Linearität

$$- \tilde{g}_{\phi(p)}(\phi_* L(e_1), \phi_* e_2)\phi_* L_p(e_2). \quad (3.12)$$

Können wir nun zeigen, dass

$$\phi_* L_p(e_i) = \tilde{L}_{\phi(p)}(\phi_* e_i), i = 1, 2 \quad (3.13)$$

dann folgt die Aussage sofort aus der Gaußschen Krümmungsgleichung für \tilde{R} . Dies gilt jedoch nach Lemma 3.1. \square

Somit haben wir gezeigt, dass die Gaußsche Krümmung invariant unter Isometrien ist - also "Verbiegungen" eines Flächenstücks sie nicht beeinflussen. Betrachten wir zum Beispiel ein Blatt Papier, so ist uns klar, dass dieses Blatt nicht gekrümmt ist. Berechnen wir die beiden Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 so finden wir $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Die Gaußsche Krümmung als Produkt der Hauptkrümmungen ist demnach $K = 0$. Rollen wir das Blatt nun in einen Zylinder mit Radius r , so zwingen wir dem Blatt gewissermaßen als eine der Hauptkrümmungen die Krümmung eines Kreises mit Radius r auf - diese ist gleich $\frac{1}{r}$ und somit insbesondere größer Null. Da jedoch die Gaußsche Krümmung wie wir gerade gezeigt haben weiterhin 0 sein muss, bleibt dem Blatt nichts anderes übrig als sich in eine Richtung nicht zu verbiegen. Ist also eine der Hauptkrümmungen einer Fläche gleich Null so, wird sich dies auch durch Verbiegen nicht ändern.

Bemerkung 3.4.

Wir bemerken jedoch, dass wir dieses Resultat nur für *glatte* Flächen gezeigt haben. Für Flächen mit Knicken gilt es i.A. nicht.

Belastet man das verbogene Papier nun von oben, so kann es sich nicht (ohne zu knicken) verbiegen da dies eine Krümmungsänderung der auf Null gezwungenen Hauptkrümmung zur Folge hätte. Dieses Prinzip findet in den Ingenieurwissenschaften vielfach Anwendung um Flächen strukturelle Stabilität zu verschaffen, so beruht beispielsweise das Funktionsprinzip von Wellpappe hierauf.

Beispiel 3.5 (Verbiegung eines rechteckigen Flächenstücks).

Wir wollen nun ein Teilstück einer Ebene in einen (Halb-)Zylinder verbiegen und zeigen, dass hierbei tatsächlich die Längen von Kurven erhalten bleiben.

Es sei $L_1, L_2 > 0, t > 0, E := (-\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}) \times (-\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2})$ ein Rechteck. Wie man sich leicht überzeugt (erste und dritte Komponente erfüllen eine Kreisgleichung)

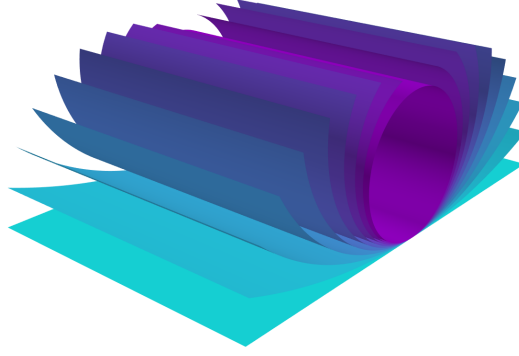


Abbildung 3.1: Blatt wird zu Zylinder verbogen.

geht E mit $r_t := \frac{L_2}{t\pi}$ unter

$$\psi_t : E \rightarrow \psi(E) =: Z_t, (v, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r_t \sin \frac{\varphi}{r_t} \\ v \\ r_t(1 - \cos \frac{\varphi}{r_t}) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

in einen Zylinder bzw. Stücke eines Zylinders über. Für $t = 1$ ergibt sich hierbei ein Halbzylinder, für $t = 2$ ein ganzer (abzüglich einer Kurve) und für $t \rightarrow 0$ erhalten wir E selbst. Das hierbei die Fläche tatsächlich *gebogen* wird, also keine Stelle der Fläche gedehnt wird o.ä. verifizieren wir indem wir uns vergewissern, dass die Metrik an jeder Stelle gleich der euklidischen Metrik der Ebene ist. Für die Jacobimatrix gilt

$$J_{\psi_t}(v, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \cos \frac{\varphi}{r_t} \\ 1 & 0 \\ 0 & \sin \frac{\varphi}{r_t} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

somit ergibt sich für die Gramsche Matrix

$$G(v, \varphi) = J_{\psi_t}^T(v, \varphi) J_{\psi_t}(v, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \frac{\varphi}{r_t} + \sin^2 \frac{\varphi}{r_t} \end{pmatrix} = I_2. \quad (3.16)$$

Die induzierte euklidische Metrix auf Z_t ist somit wie erwartet

$$g_{\psi_t(v, \varphi)} : T_{\psi_t(v, \varphi)} Z_t \times T_{\psi_t(v, \varphi)} Z_t \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

$$(u, w) \mapsto w^T G(v, \varphi) u = w^T u. \quad (3.18)$$

Tatsächlich geht das Theorema Egregium noch sehr viel tiefer als der Satz es auf den ersten Blick vielleicht errahnen lässt. Für einen Überblick über die größeren Implikationen sei auf [Nee21] verwiesen.

Es wird daher, um festen Boden zu gewinnen, zwar eine abstracte Untersuchung in Formeln nicht zu vermeiden sein, die Resultate derselben aber werden sich im geometrischen Gewande darstellen lassen.

Kapitel 4

Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen

BERNHARD RIEMANN [Rie54, Kapitel 2, sic]

Rodrigues-Formel

Die Rodrigues-Formel erlaubt es uns Rotationen des 3-dimensionalen euklidischen Raums durch Vektoren des \mathbb{R}^3 zu beschreiben.

4.1 Die Rodrigues-Formel über Kreuzproduktmatrizen

Aus der Bilinearität des Kreuzproduktes folgt direkt, dass jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ über das Kreuzprodukt eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ induziert. Die darstellende Matrix dieser¹ linearen Abbildung bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^3 bezeichnen wir als Kreuzproduktmatrix.

Definition 4.1 (Kreuzproduktmatrix).

Es sei $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Dann nennen wir

$$\Lambda_v := \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad (4.1)$$

die Kreuzproduktmatrix zu v .

Man rechnet leicht nach, dass folgendes Lemma gilt.

Lemma 4.2.

Es gilt

$$\Lambda_v w = w \times v \text{ und} \quad (4.2)$$

$$\Lambda_v^T = -\Lambda_v \text{ (Schiefsymmetrie)} \quad (4.3)$$

für alle $w \in \mathbb{R}^3$.

¹Strenggenommen gibt es mehrere solche Abbildungen: $w \mapsto w \times v$ und $w \mapsto v \times w$.

Eine besondere Eigenschaft dieser Matrizen ist, dass sich jede (natürliche) Potenz auf eine mit Exponenten kleiner 3 reduzieren lässt.

Lemma 4.3.

Ist $v \in \mathbb{R}^3$ dann gilt

$$\Lambda_v^3 = -\|v\|^2 \Lambda_v. \quad (4.4)$$

Beweis. Ausmultiplizieren. □

Diese Eigenschaft macht Kreuzproduktmatrizen sehr interessant für Anwendungen, die Potenzreihen enthalten. Eine solche wollen wir im Folgenden betrachten. Hierbei kommt die in z.B. [LM14, Kapitel 17.1] definierte Matrixexponentialfunktion vor.

Satz 4.4 (Rodrigues-Formel^a).

Es sei $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$ und $\hat{v} := \frac{v}{\|v\|}$. Dann gilt

$$\exp(\Lambda_v) = I_3 + \sin(\|v\|)\Lambda_{\hat{v}} + (1 - \cos(\|v\|))\Lambda_{\hat{v}}^2. \quad (4.5)$$

^aOLINDE RODRIGUES, 1795-1851, französischer Mathematiker und Bankier. Vornehmlich bekannt für die hier behandelte Formel sowie die als *Euler-Rodrigues* Formel bezeichnete Variante dieser.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass nach Lemma 4.3

$$\Lambda_v^k = \left(-\frac{\Lambda_v^3}{\|v\|^2} \right)^k \quad (4.6)$$

gilt. Mit $\Lambda_{\hat{v}} = \frac{\Lambda_v}{\|v\|}$ folgt also

$$\Lambda_v^k = (-\|v\|\Lambda_{\hat{v}}^3)^k \quad (4.7)$$

$$\stackrel{(\Lambda_{\hat{v}}^3 = -\Lambda_{\hat{v}})}{=} (\|v\|\Lambda_{\hat{v}})^k. \quad (4.8)$$

Somit gilt

$$\exp(\Lambda_v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda_v^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|v\|^k}{k!} \Lambda_{\hat{v}}^k = I_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|v\|^k}{k!} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \Lambda_{\hat{v}}^{1+((k-1) \bmod 2)} \quad (4.9)$$

$$= I_3 \quad (4.10)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|v\|^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^{\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor} \Lambda_{\hat{v}}^{1+((2k+1)-1) \bmod 2} \quad (4.11)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|v\|^{2k}}{(2k)!} (-1)^{\lfloor \frac{2k}{2} \rfloor} \Lambda_{\hat{v}}^{1+((2k-1) \bmod 2)} \quad (4.12)$$

$$= I_3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|v\|^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \Lambda_{\hat{v}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|v\|^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \Lambda_{\hat{v}}^2 \quad (4.13)$$

$$= I_3 + \sin(\|v\|) \Lambda_{\hat{v}} + (1 - \cos(\|v\|)) \Lambda_{\hat{v}}^2, \quad (4.14)$$

wobei die Umordnungen der Reihe dadurch gerechtfertigt ist, dass die Matrixexponentialreihe bzgl. $\|\cdot\|_2$ absolut konvergent ist und absolut konvergente Reihen beliebig umgeordnet werden können (vgl. hierzu [AE06a, Satz 8.9]). \square

Bemerkung 4.5.

Auch für $v = 0$ gilt obige Formel indem man in diesem Fall $\hat{v} := 0$ definiert.

Wir wollen nun zeigen, dass sich mittels dieser Matrizen Drehungen um eine feste Achse im \mathbb{R}^3 realisieren lassen. Hierzu untersuchen wir die Abbildung $v \mapsto \exp \Lambda_v$.

Lemma 4.6 (Eigenschaften des Kreuzproduktmatrizenexponentialen).

Es sei $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3,3}$, $v \mapsto \exp \Lambda_v$. Dann gilt

$$R(v)^{-1} = R(-v) = R(v)^T \quad (4.15)$$

$$R(v)v = v. \quad (4.16)$$

Insbesondere ist also $R(v) \in SO(n)$ orthogonal und v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Beweis. Die Gleichung $R(v)^{-1} = R(-v)$ folgt direkt aus der Definition der Funktion mittels der Exponentialfunktion. Die Orthogonalität folgt aus der

Schiefsymmetrie von Λ_v wie folgt

$$R(v)R(v)^T = R(v)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda_v^k}{k!}\right)^T \quad (4.17)$$

$$= R(v) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda_v^k)^T}{k!} \quad (4.18)$$

$$= R(v) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda_v)^k}{k!} \quad (4.19)$$

$$= R(v)R(-v) = I_3 \quad (4.20)$$

und die Eigenvektoreigenschaft von v folgt aus der Rodrigues-Formel durch Einsetzen mit $\Lambda_{\hat{v}}v = 0$. \square

Es lässt sich zeigen, dass Drehungen genau die orthogonalen Abbildungen sind, unter welchen die Orientierung einer Basis invariant ist (für einen Beweis vgl. [Sti08]) - dies ist genau dann der Fall wenn die Determinante größer 0 ist.

Lemma 4.7.

Für $v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\det R(v) = 1. \quad (4.21)$$

Beweis.

$$\det R(v) = \det(\exp \Lambda_v) = \exp(\text{Spur } \Lambda_v) = e^0 = 1 \quad (4.22)$$

\square

Aus der Eigenvektoreigenschaft von v zu $R(v)$ folgt außerdem direkt, dass die Rotationsachse durch v verlaufen muss. Der Winkel der Rotation ist hierbei gegeben durch $\|v\|$.

Die Rodrigues-Formel hat offensichtliche Anwendungen in z.B. Computergrafik und Robotik, aber auch andere interessante Anwendungen sind möglich, siehe z.B. [Car+21].

4.2 Beziehung zu Quaternionen

In den oben genannten Anwendungen werden Rotationen oftmals mittels anderen Methoden realisiert: Quaternionen oder Rotoren einer geometrischen Algebra. Zu den Quaternionen sehen wir den Zusammenhang sehr leicht - von dort aus können wir den Übergang zu geometrischen Algebren machen.

Es sei $q = \cos \frac{\alpha}{2} + \epsilon \sin \frac{\alpha}{2} \in \mathbb{H}$, $q \neq \pm 1$ eine Quaternion in Polardarstellung, also $0 < \alpha < 2\pi$, $\epsilon \in \text{Im}(\mathbb{H}) := \{ai + bj + ck : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ mit Betrag 1. Weiterhin ist für $p \in \text{Im}(\mathbb{H})$ die Konjugation in (\mathbb{H}, \cdot)

$$\text{Im}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{H}), x \mapsto x p x^{-1} = p \bar{x} \quad (4.23)$$

eine Drehung² - genau so wie $c \in S^1 \subset \mathbb{C}$ eine Drehung von \mathbb{C} beschreibt. Betrachten wir diese Abbildung nun von ganz \mathbb{H} ausgehend finden wir, dass q eine Rotation von $x \in \text{Im}(\mathbb{H})$ um die Achse ϵ und den Winkel α beschreibt. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}, v \mapsto \cos \frac{\|v\|}{2} + \mathfrak{I}v \sin \frac{\|v\|}{2} \quad (4.24)$$

mit $\mathfrak{I} = (i, j, k)$ lässt uns nun die Interpretation von $v \in \mathbb{R}^3$ als Drehung auf die Quaternionen übertragen. Es kommutiert also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{H} \\ & \searrow R & \downarrow \zeta \\ & & SO(3) \end{array}$$

wobei $\zeta : \mathbb{H} \rightarrow (\text{Im}\mathbb{H} \rightarrow \text{Im}\mathbb{H}), q \mapsto (x \mapsto qxq^{-1})$. Wir identifizieren hierbei $\text{Im}\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3$.

Es sei noch gesagt, dass man zur Berechnung der \mathbb{R}^3 Variante auch auf die Darstellung mittels Matrizen verzichten kann. Die Rodrigues-Formel, welche einen Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ um die Achse $v \in \mathbb{R}^3$ auf einen Vektor $w' \in \mathbb{R}^3$ abbildet lautet dann

$$w' = w + \sin(\|v\|)(w \times v) + (1 - \cos(\|v\|))(w \times v) \times v \quad (4.25)$$

$$= w + \sin(\|v\|)(w \times v) + (1 - \cos(\|v\|))\langle v, w \rangle v. \quad (4.26)$$

Bemerkung 4.8 (Verbindung zur Lie-Theorie).

Die Rodrigues-Formel bekommt durch die sog. *Lie-Theorie* eine weitere höchst interessante Interpretation, welche sie mit der Differentialgeometrie verbindet. Hierbei stellen wir fest, dass wir $SO(3)$ mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit versehen können, so dass die Gruppenoperation differenzierbar ist. Die resultierende Struktur bezeichnen wir als (Matrix-)Lie-Gruppe. Wir stellen fest, dass die Menge der Kreuzproduktmatrizen einen 3-dimensionalen Vektorraum bilden - dieser ist isomorph zum Tangentialraum $T_I SO(3) \simeq \mathbb{R}^3$. Die Rodrigues-Formel folgt dann aus allgemeineren Aussagen über diese Gruppen: es lassen sich (bestimmte) Gruppenelemente durch das Exponential von Tangentialvektoren ausdrücken. Die Vektoren können hierbei gewissermaßen als "infinitesimale Drehungen" aufgefasst werden. Für eine ausführlichere Behandlung dieses Themas sei auf [Sti08] verwiesen.

²Für Beweise dieser Drehungseigenschaften sei auf [Sti08, S. 10ff] verwiesen. Dass das Bild hier tatsächlich $\text{Im}(\mathbb{H})$ ist folgt daraus, dass die Konjugation einer Gruppe ein Automorphismus ist (vgl. [Gri07, Proposition 3.5]) und somit die die Quaternionen charakterisierenden Hamilton-Regeln $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ unter Konjugation erhalten bleiben.

Anhang A

Ausblick und Anwendungen

Die Theorie der inneren Geometrie bildet den Ausgangspunkt für die Riemannsche Geometrie: Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit hat man keinen Zugriff auf einen "externen Raum" und muss sich somit zwangsweise mit intrinsische Methoden zurechtfinden. Über diese Verbindung wird die Differentialgeometrie ultimativ zur Grundlage von Anwendungen wie der Allgemeinen Relativitätstheorie. Dieser historisch engen Verbindung zwischen Mathematik und Physik wird schon in den gängigen Bezeichnungen Rechnung getragen: das g als Symbol einer Riemannschen Metrik sowie das Γ der Christoffelsymbole erhalten ihren Namen aufgrund der in der Relativitätstheorie zentralen Gravitation¹.

Doch nicht nur in der theoretischen Physik findet die (innere) Differentialgeometrie Anwendungen, so wird sie z.B. über die diskrete Differentialgeometrie auch für Robotik und Computergrafik bzw. generell Informatik interessant. Einen Einblick über verschiedene Themen geben hier z.B. die weiteren Veröffentlichungen der Autoren von [CWW17].

¹Siehe <https://hsm.stackexchange.com/questions/3435/what-is-the-origin-of-the-use-of-g-for-a-riemannian-metric>

Literatur

- [AE06a] Herbert Amann und Joachim Escher. *Analysis 1*. 3. Aufl. Birkhäuser, 2006. ISBN: 978-3-7643-7755-7. DOI: 10.1007/978-3-7643-7756-4.
- [AE06b] Herbert Amann und Joachim Escher. *Analysis 2*. 2. Aufl. Birkhäuser, 2006. ISBN: 978-3-7643-7105-0. DOI: 10.1007/3-7643-7402-0.
- [Car+21] Justus Carlisle u. a. „Skateboard Tricks and Topological Flips“. In: *arXiv* (2021). eprint: 2108.06307 (math-ph). URL: <https://arxiv.org/abs/2108.06307>.
- [Che70] Shiin-Shen Chern. „Differential Geometry; its past and its future“. In: *Actes du Congrès international des mathématiciens (Proceedings ICM)* 1 (1970), S. 41–53. URL: <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1970.1/ICM1970.1.ocr.pdf>.
- [CWW17] Keenan Crane, Clarisse Weischedel und Max Wardetzky. „The Heat Method for Distance Computation“. In: *Commun. ACM* 60.11 (Okt. 2017), S. 90–99. ISSN: 0001-0782. DOI: 10.1145/3131280. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/3131280>.
- [EJ14] Jost-Hinrich Eschenburg und Jürgen Jost. *Differentialgeometrie und Minimalflächen*. 3. Aufl. Springer, 2014. ISBN: 978-3-642-38521-6. DOI: 10.1007/978-3-642-38522-3.
- [For18] Jon Pierre Fortney. *A Visual Introduction to Differential Forms and Calculus on Manifolds*. 1. Aufl. Birkhäuser, 2018. ISBN: 978-3-319-96991-6. DOI: 10.1007/978-3-319-96992-3.
- [Fou21] Wikimedia Foundation. *Differential geometry of surfaces*. Wikipedia. Abgerufen am 05.09.2021. 2021. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry_of_surfaces.
- [Gau28] Carl Friedrich Gauß. „Allgemeine Flächentheorie“. In: *Commentationes Societatis regiae scientiarum gottingensis recentiores* VI (1828). Zu finden im Internet Archive unter <https://archive.org/details/allgemeineflche00gausgoog/page/n8/mode/2up>.

- [GJ16] Lars Grüne und Oliver Junge. *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*. 2. Aufl. Springer, 2016. ISBN: 978-3-658-10240-1. DOI: 10.1007/978-3-658-10241-8.
- [Gri07] Pierre Antoine Grillet. *Abstract Algebra*. Hrsg. von S. Axler und K.A. Ribet. 2. Aufl. Springer, 2007. ISBN: 978-0-387-71567-4. DOI: 10.1007/978-0-387-71568-1.
- [Heu09] Harro Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch*. 6. Aufl. Vieweg+Teubner, 2009. ISBN: 978-3-8348-0705-2.
- [Irg19] Fridtjov Irgens. *Tensor Analysis*. 1. Aufl. Springer, 2019. ISBN: 978-3-030-03411-5. DOI: 10.1007/978-3-030-03412-2.
- [Jän04] Klaus Jänich. *Vektoranalysis*. 5. Aufl. Springer, 2004. ISBN: 978-3-540-23741-9. DOI: 10.1007/b138936.
- [Jän08] Klaus Jänich. *Topologie*. 8. Aufl. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-21393-2. DOI: 10.1007/b138142.
- [Kie10] Hansjörg Kielhöfer. *Variationsrechnung. Eine Einführung in die Theorie einer unabhängigen Variablen mit Beispielen und Aufgaben*. 1. Aufl. Vieweg+Teubner, 2010. ISBN: 978-3-8348-0965-0. DOI: 10.1007/978-3-8348-9670-4.
- [LM14] Jörg Liesen und Volker Mehrmann. *Lineare Algebra. Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis*. 2. Aufl. Springer Spektrum, 2014. ISBN: 978-3-658-06609-3. DOI: 10.1007/978-3-658-06610-9.
- [Mil65] John Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton University Press, 1965. ISBN: 978-0-691-04833-8. URL: <https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691048338/topology-from-the-differentiable-viewpoint>.
- [Nee21] Tristan Needham. *Visual Differential Geometry and Forms. A mathematical drama in five acts*. 1. Aufl. Princeton University Press, 2021. ISBN: 9780691203706.
- [Poi13] Henri Poincaré. *The Foundations of Science*. Forgotten Books, 2012 - original 1913.
- [Rie54] Bernhard Riemann. „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“. In: *Habilitationsvortrag* (1854). posthum veröffentlicht durch Richard Dedekind im Jahr 1868, zu finden transkribiert unter <https://emis.de/classics/Riemann/Geom.pdf> oder abgedruckt in DOI 10.1007/978-3-642-35121-1.
- [Sti08] John Stillwell. *Naive Lie Theory*. Hrsg. von S. Axler und K.A. Ribet. 1. Aufl. Springer, 2008. ISBN: 978-0-387-78214-0. DOI: 10.1007/978-0-387-78214-0.

- [Sti10] John Stillwell. *Mathematics and Its History*. Hrsg. von S. Axler und K.A. Ribet. 3. Aufl. Springer, 2010. ISBN: 978-1-4419-6052-8. DOI: 10.1007/978-1-4419-6053-5.
- [Tu10] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Hrsg. von S. Axler und K.A. Ribet. 2. Aufl. Springer, 2010. ISBN: 978-1-4419-7399-3. DOI: 10.1007/978-1-4419-7400-6.
- [Tu17] Loring W. Tu. *Differential Geometry. Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Hrsg. von S. Axler und K.A. Ribet. 1. Aufl. Springer, 2017. ISBN: 978-3-319-55082-4. DOI: 10.1007/978-3-319-55084-8.
- [WB19] L. M. Woodward und J. Bolton. *A First Course in Differential Geometry. Surfaces in Euclidean Space*. Cambridge University Press, 2019. ISBN: 978-1-108-44102-5. DOI: 10.1017/9781108348072.