Rechtfertigung für Gramsche Determinante in Definition des k-Flächeninhalts

Stefan Volz

27. September 2021

1 Test

Definition 1.1 (k-Fläche)**.**
Sei $k \leq n \in \mathbb{N}$. Wir nennen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-Fläche wenn

- M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit ist und
- S eine globale Parametrisierung besitzt.

Sei nun $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-Fläche mit Parametrisierung $\varphi : K \to S$.
Für $k = n$ wissen wir bereits, dass durch

$$\mathrm{vol}_n(S) = \int_K |\det J_\varphi(x)| d^n x$$

ein Volumenbegriff definiert wird. Intuitiv misst hierbei die Funktionaldeterminante in jedem Punkt $x \in K$ wie sehr die Abbildung φ den Raum K ausdehnt um ihn zu S zu verformen.
Für $k < n$ ist allerdings $J_\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n,m}$ keine quadratische Matrix und somit können wir nicht die Determinante nutzen um diese Ausdehnung zu bestimmen, wir wollen daher eine allgemeinere Definition finden. Betrachten wir nun $J_\varphi(x)$ als lineare Abbildung $\ell : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ welche unsere Fläche verformt und in den höherdimensionalen Raum legt. Intuitiv könnten wir uns vorstellen dass wir diese Abbildung in zwei Teilabbildungen zerlegen können:

- eine (lineare) Abbildung $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ welche den Verformungsanteil enthält und
- eine (lineare) Abbildung $\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ welche unsere Fläche im $\mathbb{R}^n$ ablegt.

Sind $A_\psi \in \mathbb{R}^{k,k}$ und $A_\pi \in \mathbb{R}^{n,k}$ darstellende Matrizen dieser Abbildungen sollte also

$$\ell = \pi \circ \psi \iff J_\varphi(x) = A_\pi A_\psi$$

gelten. Welche Eigenschaften sollten diese Matrizen haben? Da S eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, gilt $\mathrm{Rang}(J_\varphi(x)) = k$. Die Rangungleich von Sylvester besagt, dass für $A \in \mathbb{R}^{n,k}, B \in \mathbb{R}^{k,m}$ folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B) - k \leq \mathrm{Rang}(AB) \leq \min \mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B).$$

Wir finden in unserem Fall also

$$\mathrm{Rang}(A_\pi) + \mathrm{Rang}(A_\psi) - k \leq \mathrm{Rang}(J_\varphi(x)) = k \leq \min(\mathrm{Rang}(A_\pi), \mathrm{Rang}(A_\psi)),$$

woraus wir $\mathrm{Rang}(A_\pi) = \mathrm{Rang}(A_\psi) = k$ schließen. Wenden wir uns nun A_π im Detail zu. Wie bereits erwähnt fordern wir, dass es unsere Fläche nicht weiter verformt, sondern nur im R^n ablegt - wie lässt sich dies mathematisch präzisieren? Wir könnten uns z.B. vorstellen, dass die Form sich nicht verändert wenn alle Längen und Winkel bei der Abbildung erhielten blieben. Der Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^k$ ist definiert durch

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_2 \|w\|_2},$$

unsere Längen- und Winkeltreue bedeutet also, dass für alle $v, w \in \mathbb{R}^k$

$$\|A_\pi v\|_2 = \|v\|_2 \text{ und}$$
$$\frac{\langle A_\pi v, A_\pi w \rangle}{\|A_\pi v\|_2 \|A_\pi w\|_2} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_2 \|w\|_2}$$

gelten soll. Wir sehen schnell ein, dass dies äquivalent zu

$$\langle A_\pi v, A_\pi w \rangle = \langle v, w \rangle$$

ist. Dies ist die definierende Eigenschaft von orthogonalen Abbildungen.

Definition 1.2.
(Orthogonale Abbildung)
Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. Dann nennen wir $f \in L(V, W)$ orthogonal wenn für alle $v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle_V = \langle f(v), f(w) \rangle_W \tag{1}$$

gilt.

Die darstellenden Matrizen orthogonaler Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als orthogonale Matrizen und die Menge all dieser Matrizen mit $O(n)$. Diese Menge wird auch die orthogonale Gruppe genannt. Allgemeiner bezeichnen wir die Menge aller $n \times k$ Matrizen mit orthonormalen Spalten durch $O(n, k)$. Analog definieren wir $U(n)$ als unitäre Gruppe für Abbildungen $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, bzw. die Notation $U(n, k)$ für nichtquadratische unitäre Matrizen.

Bemerkung 1.3.
Orthogonale Abbildungen auf euklidischen Räumen beschreiben Drehungen, Spiegelungen und deren Kompositionen.

Aus der linearen Algebra ergibt sich zudem der folgende Satz.

Satz 1.4.
(QR-Zerlegung)
Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,m}$ mit Rang m existieren eine spaltenorthogonale Matrix $Q \in O(n,m)$ bzw. $U(n,m)$ sowie eine obere Dreiecksmatrix $R \in GL_m(\mathbb{K})$ mit

$$A = QR. \tag{2}$$

Wir sehen, dass wir also eine QR-Zerlegung von $J_\varphi(x)$ suchen. Seien nun A_π, A_ψ so eine QR-Zerlegung, dann finden wir analog zum Fall $n = k$ dass A_ψ die Fläche mit ihrer Determinante, also dem Produkt ihrere Eigenwerte streckt und intuitiv wird diese gestreckte Fläche durch A_π nichtmehr verändert. Es verbleibt die Frage wie wir diesen Streckungsfaktor bestimmen und ob er überhaupt wohldefiniert ist: wenn Q, R und Q', R' jeweils eine QR-Zerlegung von $J_\varphi(x)$ bilden, gilt dann stets $|\det Q| = |\det Q'|$? Die Antwort hierauf liefert wieder die lineare Algebra mittels der Singulärwertzerlegung.

Satz 1.5.
(Singulärwertzerlegung - SVD)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n,m}, m \leq n$. Dann existieren $V \in U(n), W \in U(m)$, so dass

$$A = V\Sigma W^H \text{ mit } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,m} \tag{3}$$

wobei $\Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0), r = \operatorname{Rang}(A)$. Wir bezeichnen die Werte σ_i als Singulärwerte von A.

Ein analoger Satz gilt für reelle Matrizen, hierbei sind V und W orthogonal und die hermitesch Transponierte kann mit einer regulär Transponierten ersetzt werden. Für unsere Zwecke wichtig ist, dass die Singulärwerte eindeutig sind.
Wir wollen nun die Singulärwertzerlegung nutzen um eine QR-Zerlegung zu bestimmen. Sei daher $J_\varphi(x) = V\Sigma W^T$ wie im Satz 1.5, dann können wir $\Sigma \in \mathbb{R}^{n,k}$ wie folgt zerlegen

$$\Sigma = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} \Sigma_r.$$

Dann ist mit $Q := V \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}, R := \Sigma_r W^T$ eine QR-Zerlegung von $J_\varphi(x)$

gegeben. Da $W^T \in O(k)$ gilt $|\det W^T| = 1$ und somit

$$|\det R| = \left|\prod_{i=1}^{k} \sigma_i\right|.$$

Bemerkung 1.6.
Für quadratische Matrizen stimmen die Singulärwerte mit den Eigenwerten überein. Wir führen also eine strikte Verallgemeinerung unserer Volumensdefinition durch.

Wir würden nun gerne vermeiden, immer die SVD bestimmen zu müssen. Hierzu benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 1.7.
$Q \in O(n)$ ist genau dann orthogonal wenn $Q^T Q = I_n$.

Wir bemerken

$$J_\varphi(x)^T J_\varphi(x) = (V\Sigma W^T)^T V\Sigma W^T = W\Sigma V^T V\Sigma W^T = W\Sigma^2 W^T$$

$$\underset{|\det W|=1}{\Longrightarrow} \det(J_\varphi(x)^T J_\varphi(x)) = \det \Sigma^2 = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i^2.$$

Definition 1.8.
(Maßtensor, Gram'sche Matrix / Determinante)
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-Fläche mit globaler Parametrisierung $\varphi : K \to S$. Für alle $x \in K$ nennen wir

$$G^\varphi(x) := J_\varphi(x)^T J_\varphi(x)$$

Gram'sche Matrix von φ. Die Abbildung

$$g^\varphi : K \to \mathbb{R}^{k,k}, x \mapsto G^\varphi(x)$$

nennen wir Maßtensor über S und $\det G^\varphi(x)$ die Gram'sche Determinante von φ bei $x \in K$.

Schlussendlich definieren wir damit unseren Flächeninhalt

Definition 1.9.
(k-Flächeninhalt)
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-Fläche mit globaler Parametrisierung $\varphi : K \to S$. Dann ist der k-Flächeninhalt bzw. das k-Volumen von S definiert durch

$$\mathrm{vol}_k(S) := \int_K \sqrt{\det g^\varphi(x)} d^k x. \tag{4}$$

Beispiel 1.10.
(Oberfläche einer Kugel)
Betrachten wir die Oberfläche der Kugel $B_r(0)$ mit Radius $r > 0$ als 2-Fläche im $\mathbb{R}^3$. Diese besitzt die globale Parametrisierung (abgesehen von einer Nullmenge)

$$\sigma : (0,\pi) \times (0,2\pi), (\vartheta,\varphi) \mapsto r \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Die Jacobimatrix bei $x := (\vartheta, \varphi)$ ist

$$J_\sigma(x) = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

und die Gram'sche Matrix somit

$$G^\sigma(x) = J_\sigma(x)^T J_\sigma(x) = r^2 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\sin^2\vartheta \end{smallmatrix}\right).$$

Wir erhalten daher für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(B_r(0)) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{r^4(1-\sin^2\vartheta)}d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\pi |\cos\vartheta| d\vartheta \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$