Innere Geometrie der Flächen

Stefan Volz

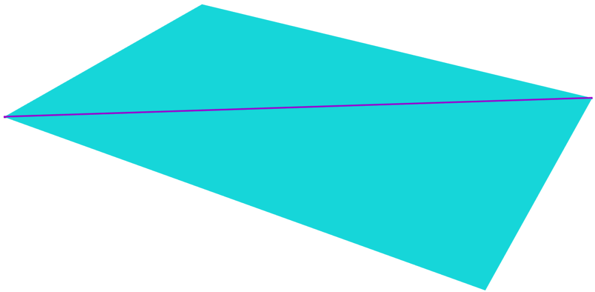
Mathematisches Seminar
23.11.2021

Hochschule für angewandte Wissenschaften Würzburg-Schweinfurt
Fakultät für angewandte Natur- und Geisteswissenschaften
Bachelorstudiengang Technomathematik

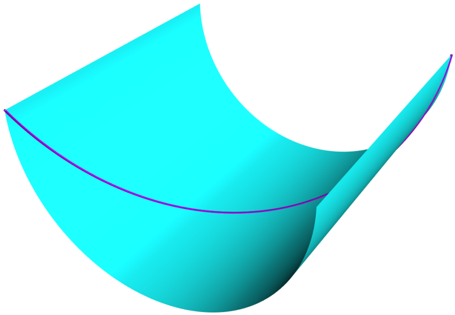
Gliederung

Einführung

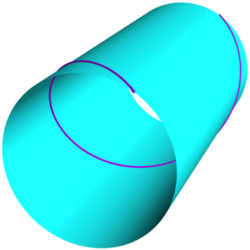
Motivation



Motivation



Motivation



Skript

Skript

Folien

https://stefanvolz.online/seminar-innere-geometrie

Konventionen

- Koordinatenfunktionen $x^1, ..., x^n$: Indizes, keine Potenzen
- Keine Einsteinsche Summenkonvention
- Differential einer Funktion ϕ mit ϕ_* bezeichnet
- Alle Funktionen *glatt*, also C^∞
- Alle Mannigfaltigkeiten differenzierbar

The main object of study in differential geometry is, at least for the moment, the differentiable manifolds, structures on the manifolds (Riemannian, complex, or other), and their admissible mappings.

– Differential Geometry; its past and its future
Shii-Shen Chern [Che70]

Definition (Mannigfaltigkeit)
Lokal euklidischer, topologischer Raum, sodass die euklidische Struktur *glatt* ist.

The main object of study in differential geometry is, at least for the moment, the differentiable manifolds, structures on the manifolds (Riemannian, complex, or other), and their admissible mappings.

– Differential Geometry; its past and its future
Shii-Shen Chern [Che70]

Definition (Mannigfaltigkeit)
Lokal euklidischer, topologischer Raum, sodass die euklidische Struktur *glatt* ist.

Definition (Karte)
Eine Karte ist ein Tupel (U, ϕ) aus einer Menge $U \subseteq M$ und einem Homöomorphismus $\phi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^k$. Sie formalisiert die lokale Euklidizität von M.

Alle Mannigfaltigkeiten über die wir heute Sprechen sind reguläre Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$!

Definition (Tangentialraum)
Lokal beste lineare Näherung einer Mannigfaltigkeit. Ist M Mannigfaltigkeit mit Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, dann ist der Tangentialraum T_pM von M bei $p \in U$ gegeben durch

$$T_pM := \text{Spann}\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \right\} \tag{1}$$

mit $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f := \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_p (f \circ \phi^{-1})$ für $f\colon\, U \to \mathbb{R}$.

Definition (Riemannsche Mannigfaltigkeit)
Mannigfaltigkeit M mit Skalarprodukt $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ auf Tangentialräumen T_pM, sodass g in $p \in M$ glatt ist.

Definition (Riemannsche Mannigfaltigkeit)
Mannigfaltigkeit M mit Skalarprodukt $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ auf Tangentialräumen T_pM, sodass g in $p \in M$ glatt ist.

Beispiel
Der $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt, genannt euklidische Metrik.

Beispiel
Die euklidische Metrik des $\mathbb{R}^k$ induziert auf einer durch $\phi : \mathbb{R}^k \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ parametrisierten Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ eine Metrik. Diese ist für $x \in U, u, v \in T_{\phi(x)}M$ gegeben durch

$$g_{\phi(x)}(u, v) = \langle \phi_* u, \phi_* v \rangle = (J(x)v)^T J(x)u = v^T G(x)u. \tag{2}$$

Geodäten

Das Längenfunktional

Erste Charakterisierung *gerader* Linien der Ebene:

- Kürzeste Verbindungslinien von je zwei Punkten auf der Linie

Erste Charakterisierung *gerader* Linien der Ebene:

- Kürzeste Verbindungslinien von je zwei Punkten auf der Linie

Daher untersuchen wir:

Definition (Längenfunktional)
Das Längenfunktional ist die Abbildung $\mathcal{L} : (\mathbb{R}^n)^{(a,b)} \to \mathbb{R}$, welche einer Kurve $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ ihre Länge

$$\mathcal{L}[\gamma] := \int_a^b \|\mathrm{D}\gamma(t)\|_2 \, dt \tag{3}$$

zuordnet.

Variation des Funktionals

Notwendige Bedingung für Extremität eines Funktionals F ist Stationarität, also Verschwinden der Variation δF des Funktionals:

$$\delta F[\gamma_0, \delta\gamma] = 0. \tag{4}$$

Notwendige Bedingung für Extremität eines Funktionals F ist Stationarität, also Verschwinden der Variation δF des Funktionals:

$$\delta F[\gamma_0, \delta\gamma] = 0. \tag{4}$$

Aus welchen Räumen sind Lösungskurve γ_0 und Richtungskurve $\delta\gamma$? Lösungskurve für Verbindung zwischen $A, B \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ liegt in affinem Raum

$$\mathcal{F} := \{\gamma : [a, b] \to M \,|\gamma \text{ nach Kurvenlänge parametrisiert,} \tag{5}$$

$$\gamma(a) = A, \gamma(b) = B\} \tag{6}$$

mit zugrunde liegendem Vektorraum

$$\delta\mathcal{F} := \{\delta\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \mid \delta\gamma(a) = \delta\gamma(b) = 0\}. \tag{7}$$

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2 \, dt\Big|_{\varepsilon=0} \tag{8}$$

(13)

Berechnung der Variation

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2 \, dt\Big|_{\varepsilon=0} \tag{8}$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|(\mathsf{D}\gamma_0(t) + \varepsilon \mathsf{D}\delta\gamma(t))\|_2\Big|_{\varepsilon=0} dt \tag{9}$$

$$\tag{13}$$

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2 \, dt\Big|_{\varepsilon=0} \tag{8}$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|(\mathsf{D}\gamma_0(t) + \varepsilon \mathsf{D}\delta\gamma(t))\|_2\Big|_{\varepsilon=0} dt \tag{9}$$

$$= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^n \mathsf{D}\delta\gamma_k(t)\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)_k(t)}{\|\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2}\Bigg|_{\varepsilon=0} dt \tag{10}$$

$$\tag{13}$$

Berechnung der Variation

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2 \, dt \Big|_{\varepsilon=0} \tag{8}$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|(\mathsf{D}\gamma_0(t) + \varepsilon \mathsf{D}\delta\gamma(t))\|_2 \Big|_{\varepsilon=0} dt \tag{9}$$

$$= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^n \mathsf{D}\delta\gamma_k(t)\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)_k(t)}{\|\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2}\Bigg|_{\varepsilon=0} dt \tag{10}$$

$$= \int_a^b \frac{\langle \mathsf{D}\gamma_0, \mathsf{D}\delta\gamma\rangle(t)}{\|\mathsf{D}\gamma_0(t)\|_2} \, dt \tag{11}$$

$$\tag{13}$$

Berechnung der Variation

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2 \, dt\Big|_{\varepsilon=0} \tag{8}$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|(\mathsf{D}\gamma_0(t) + \varepsilon \mathsf{D}\delta\gamma(t))\|_2\Big|_{\varepsilon=0} dt \tag{9}$$

$$= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^n \mathsf{D}\delta\gamma_k(t)\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)_k(t)}{\|\mathsf{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2}\Bigg|_{\varepsilon=0} dt \tag{10}$$

$$= \int_a^b \frac{\langle \mathsf{D}\gamma_0, \mathsf{D}\delta\gamma\rangle(t)}{\|\mathsf{D}\gamma_0(t)\|_2} \, dt \tag{11}$$

$$\text{(Param. nach Kurvenlänge)} = \int_a^b \langle \mathsf{D}\gamma_0, \mathsf{D}\delta\gamma\rangle(t) \, dt \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] &= \partial_\varepsilon \int_a^b \|\mathrm{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2 \, dt\Big|_{\varepsilon=0} && (8)\\
&= \int_a^b \partial_\varepsilon \|(\mathrm{D}\gamma_0(t) + \varepsilon \mathrm{D}\delta\gamma(t))\|_2\Big|_{\varepsilon=0} dt && (9)\\
&= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{D}\delta\gamma_k(t)\mathrm{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)_k(t)}{\|\mathrm{D}(\gamma_0 + \varepsilon\delta\gamma)(t)\|_2}\Bigg|_{\varepsilon=0} dt && (10)\\
&= \int_a^b \frac{\langle \mathrm{D}\gamma_0, \mathrm{D}\delta\gamma\rangle(t)}{\|\mathrm{D}\gamma_0(t)\|_2} \, dt && (11)\\
\text{(Param. nach Kurvenlänge)} &= \int_a^b \langle \mathrm{D}\gamma_0, \mathrm{D}\delta\gamma\rangle(t) \, dt && (12)\\
\text{(Part. Integration)} &= \langle \mathrm{D}\gamma_0, \delta\gamma\rangle(t)\Big|_a^b - \int_a^b \langle \mathrm{D}^2\gamma_0, \delta\gamma\rangle(t) \, dt && (13)
\end{aligned}
$$

Definition (Orthogonal- und Tangentialkomponente eines Vektors)

Es sei M eine Fläche im $\mathbb{R}^n$ mit Normaleneinheitsfeld $\nu : M \to S^{n-1}$. Sei weiterhin $v \in \mathbb{R}^n$ und $u \in M$. Wir definieren die Orthogonalkomponente $v^\perp(u)$ sowie die Tangentialkomponente $v^\top(u)$ von v bzgl. ν in u durch

$$v^\perp(u) := \langle v, \nu(u)\rangle \nu(u) \tag{14}$$

$$v^\top(u) := v - v^\perp(u). \tag{15}$$

Weitere Berechnung der Variation

Satz
Ist $\gamma : I := (a, b) \to M$ eine nach Kurvenlänge parametrisierte Kurve auf einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ so gilt für alle Kurven $\delta\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ mit $\delta\gamma(a) = \delta\gamma(b) = 0$

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \langle \mathsf{D}\gamma_0, \delta\gamma\rangle(t)|_a^b - \int_a^b \langle (\mathsf{D}^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma\rangle(t)\, dt. \tag{16}$$

Gerade Kurven als stationäre Kurven des Längenfunktionals

Wir suchen stationäre Punkte von F also:

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \langle \mathsf{D}\gamma_0, \delta\gamma\rangle(t)|_a^b - \int_a^b \langle(\mathsf{D}^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma\rangle(t)\,dt = 0. \qquad (17)$$

Wir suchen stationäre Punkte von F also:

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_0, \delta\gamma] = \langle \mathsf{D}\gamma_0, \delta\gamma\rangle(t)|_a^b - \int_a^b \langle (\mathsf{D}^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma\rangle(t)\,dt = 0. \qquad (17)$$

Wir erinnern uns: $\delta\gamma \in \delta\mathcal{F} := \{\delta\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n \mid \delta\gamma(a) = \delta\gamma(b) = 0\}$, also

$$\int_a^b \langle (\mathsf{D}^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma\rangle(t)\,dt = 0. \qquad (18)$$

Definition (Geodäte, geodätische Krümmung)
Es sei $\gamma : I \to M$ eine Kurve auf einer Fläche M. Gilt

$$(\mathsf{D}^2\gamma)^\top \equiv 0 \text{ auf } I, \tag{19}$$

so nennen wir γ eine *Geodäte*. Für eine allgemeine Kurve $\gamma : I \to M$ nennen wir $(\mathsf{D}^2\gamma)^\top$ den *geodätischen Krümmungsvektor* und $\|(\mathsf{D}^2\gamma)^\top\|_2$ die *geodätische Krümmung*.

Richtungsableitung

- Richtungsableitung aus der Analysis: zu Vektor v und Funktion f ist Richtungsableitung von f in Richtung v gleich $D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv)-f(x)}{h}$.

Richtungsableitung

- Richtungsableitung aus der Analysis: zu Vektor v und Funktion f ist Richtungsableitung von f in Richtung v gleich $D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}$.
- Vektoren als Differentialoperatoren durch Zuordnung $v \mapsto D_v$

- Richtungsableitung aus der Analysis: zu Vektor v und Funktion f ist Richtungsableitung von f in Richtung v gleich $D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv)-f(x)}{h}$.
- Vektoren als Differentialoperatoren durch Zuordnung $v \mapsto D_v$
- Verallgemeinerung 1: Vektorfeld statt Vektor. Zu $X \in \mathfrak{X}(M)$ definiere

$$(Xf)(p) := D_{X_p} f. \tag{20}$$

Richtungsableitung

- Richtungsableitung aus der Analysis: zu Vektor v und Funktion f ist Richtungsableitung von f in Richtung v gleich $D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv)-f(x)}{h}$.
- Vektoren als Differentialoperatoren durch Zuordnung $v \mapsto D_v$
- Verallgemeinerung 1: Vektorfeld statt Vektor. Zu $X \in \mathfrak{X}(M)$ definiere

$$(Xf)(p) := D_{X_p} f. \tag{20}$$

- Verallgemeinerung 2: Vektorfeld statt Funktion.

Definition (Richtungsableitung eines Vektorfelds entlang eines Vektorfelds)

Es sei M eine reguläre Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Weiterhin seien $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld *auf* M und $Y = \sum_k y^k \partial_k \in \Gamma(T\mathbb{R}^n|_M)$ ein Vektorfeld entlang M in $\mathbb{R}^n$. Dann definieren wir die Richtungsableitung von Y entlang X durch

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T\mathbb{R}^n|_M) \to \Gamma(T\mathbb{R}^n|_M) \tag{21}$$

$$(X, Y) \mapsto D_X Y := \sum_k (Xy^k)\partial_k. \tag{22}$$

Definition (Levi-Civita-Ableitung[a])
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Die *Levi-Civita-Ableitung* ∇ auf M ist definiert durch

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T\mathbb{R}^3|_M) \to \mathfrak{X}(M) \tag{23}$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y := (D_X Y)^\top. \tag{24}$$

[a] Tullio Levi-Civita, 1873-1941, italienischer Mathematiker der sich u.a. mit Tensoranalysis und deren Anwendung auf die Einsteinsche Relativitätstheorie beschäftigte.

Definition (Kovariante Ableitung)
Es sei M eine Fläche, $\gamma : [a, b] \to M$ eine Kurve auf M und $V \in \Gamma(TM\big|_{\gamma(t)})$ ein Vektorfeld entlang der Kurve mit einem Vektorfeld $\widetilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$ auf der Mannigfaltigkeit, sodass $V(t) = \widetilde{V}(\gamma(t))$. Dann definieren wir die kovariante Ableitung von V entlang γ auf M durch

$$\frac{\mathrm{D}\,V}{dt}(t) := \nabla_{\mathrm{D}\gamma(t)}\widetilde{V}. \tag{25}$$

Definition (Kovariante Ableitung)
Es sei M eine Fläche, $\gamma : [a, b] \to M$ eine Kurve auf M und $V \in \Gamma(TM|_{\gamma(t)})$ ein Vektorfeld entlang der Kurve mit einem Vektorfeld $\widetilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$ auf der Mannigfaltigkeit, sodass $V(t) = \widetilde{V}(\gamma(t))$. Dann definieren wir die kovariante Ableitung von V entlang γ auf M durch

$$\frac{\mathrm{D}\,V}{dt}(t) := \nabla_{\mathrm{D}\gamma(t)}\widetilde{V}. \tag{25}$$

Für unsere Zwecke wichtig ist:

$$(\mathrm{D}^2\gamma_0)^\top(t) = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{D}\gamma_0)}{dt}(t). \tag{26}$$

Was sind Christoffelsymbole?

Es seien $X = \sum_k a^k \partial_k$, $Y = \sum_k b^k \partial_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt

$$\nabla_X Y \underset{\text{Linearität}}{=} \sum_k a^k \nabla_{\partial_k} Y \underset{\substack{\text{Leibniz}\\ \text{Regel}}}{=} \sum_k a^k \sum_j (\partial_k b^j) \partial_j + b^j \nabla_{\partial_k} \partial_j. \tag{27}$$

Was sind Christoffelsymbole?

Es seien $X = \sum_k a^k \partial_k$, $Y = \sum_k b^k \partial_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt

$$\nabla_X Y \underset{\text{Linearität}}{=} \sum_k a^k \nabla_{\partial_k} Y \underset{\substack{\text{Leibniz}\\\text{Regel}}}{=} \sum_k a^k \sum_j (\partial_k b^j)\partial_j + b^j \nabla_{\partial_k}\partial_j. \tag{27}$$

Also ist ∇ durch Wirkung auf Basiselemente ∂_j eindeutig festgelegt!

Was sind Christoffelsymbole?

Es seien $X = \sum_k a^k \partial_k$, $Y = \sum_k b^k \partial_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt

$$\nabla_X Y \underset{\text{Linearität}}{=} \sum_k a^k \nabla_{\partial_k} Y \underset{\substack{\text{Leibniz}\\ \text{Regel}}}{=} \sum_k a^k \sum_j (\partial_k b^j) \partial_j + b^j \nabla_{\partial_k} \partial_j. \tag{27}$$

Also ist ∇ durch Wirkung auf Basiselemente ∂_j eindeutig festgelegt!

Per Definition ist ∇ eine Abbildung $\mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T\mathbb{R}^3|_M) \to \mathfrak{X}(M)$. Also gilt

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k. \tag{28}$$

für Funktionen Γ_{ij}^k.

Bestimmung der Christoffelsymbole

- Bestimmung ist direkt aus Definition möglich, jedoch eher aufwendig.

Bestimmung der Christoffelsymbole

- Bestimmung ist direkt aus Definition möglich, jedoch eher aufwendig.
- Es lässt sich zeigen (siehe Skript), dass

$$
\begin{aligned}
(\phi_{ij} \circ \phi^{-1})^\top \simeq \nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \simeq \sum_k \Gamma_{ij}^k (\phi_k \circ \phi^{-1}) \qquad (29) \\
\iff \phi_{ij}^\top = \sum_k \Gamma_{ij}^k \phi_k \qquad (30)
\end{aligned}
$$

für eine Fläche mit Parametrisierung $\phi : U \to M$, $\phi_{ij} = \partial_{r^i}\partial_{r^j}\phi$, $i, j = 1, 2$.

Dies ist der Ausgangspunkt für die Entwicklung eines linearen Gleichungssystems für die Christoffelsymbole.

Lineares System der Christoffelsymbole

Betrachte Ableitungen der Metrik in Koordinaten, also Einträge g_{ij} der Gramschen Matrix G:

$$\partial_r g_{ij} = \partial_r(\langle \phi_i, \phi_j \rangle) = \langle \phi_{ir}, \phi_j \rangle + \langle \phi_i, \phi_{jr} \rangle \tag{31}$$

$$\implies \langle \phi_{ij}, \phi_r \rangle = \frac{1}{2}(\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir}). \tag{32}$$

Lineares System der Christoffelsymbole

Betrachte Ableitungen der Metrik in Koordinaten, also Einträge g_{ij} der Gramschen Matrix G:

$$\partial_r g_{ij} = \partial_r(\langle \phi_i, \phi_j \rangle) = \langle \phi_{ir}, \phi_j \rangle + \langle \phi_i, \phi_{jr} \rangle \tag{31}$$

$$\implies \langle \phi_{ij}, \phi_r \rangle = \frac{1}{2}(\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir}). \tag{32}$$

Skalarprodukt von $\phi_{ij}^{\top} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \phi_k$ mit ϕ_r ergibt

$$\langle \phi_{ij}, \phi_r \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k \langle \phi_k, \phi_r \rangle \tag{33}$$

$$\iff \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kr} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir}). \tag{34}$$

Lineares System der Christoffelsymbole

Definiere $\Gamma_i := (\Gamma_{ij}^k)_{j,k=1,2} \in \mathbb{R}^{2,2}$ und
$A_i := \frac{1}{2}(\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir})_{r,j=1,2} \in \mathbb{R}^{2,2}$, dann

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \iff G \begin{pmatrix} \Gamma_1^T & \Gamma_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T & A_2^T \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Da G stets invertierbar (da symmetrisch positiv definit) ist, ist dieses System immer lösbar!

Satz (Geodätengleichung)
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, (U, ϕ) eine Koordinatenumgebung mit zugehörigen Christoffelsymbolen Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2$. Weiterhin sei $\gamma : I := [a, b] \to M$ eine Kurve auf M. Dann ist γ genau dann eine Geodäte, wenn die sogenannte *Geodätengleichung*

$$\mathrm{D}^2 y^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \mathrm{D} y^i \mathrm{D} y^j = 0 \tag{36}$$

für $k = 1, 2$ gilt, wobei $y := \phi \circ \gamma : I \to U$ eine Kurve auf U ist.

Beweisidee:

- Kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes $V(t) := \mathrm{D}y(t) = \sum_j Dy^j(t)\partial_j$ von y als Linearkombination von ∂_k darstellen
- Kovariante Ableitung muss verschwinden, also sind alle Koeffizienten gleich 0
- Die Koeffizienten sind genau die linken Seiten der Geodätengleichung

Charakterisierung und Lösungsverhalten

$$\text{Geodätengleichung: } \mathrm{D}^2 y^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \mathrm{D} y^i \mathrm{D} y^j = 0 \tag{37}$$

$$\text{Geodätengleichung: } \mathrm{D}^2 y^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \mathrm{D} y^i \mathrm{D} y^j = 0 \tag{37}$$

- System aus linearen DGL zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten

Charakterisierung und Lösungsverhalten

$$\text{Geodätengleichung: } \mathrm{D}^2 y^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \mathrm{D} y^i \mathrm{D} y^j = 0 \tag{37}$$

- System aus linearen DGL zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten
- Lösung für AWP existiert immer! (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

$$\text{Geodätengleichung: } \mathrm{D}^2 y^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \mathrm{D} y^i \mathrm{D} y^j = 0 \tag{37}$$

- System aus linearen DGL zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten
- Lösung für AWP existiert immer! (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Hyperbolischer Paraboloid

$$\mathrm{D}^2 u + \frac{u((\mathrm{D}u)^2 - (\mathrm{D}v)^2)}{u^2 + v^2 + 1} = 0 \tag{38}$$

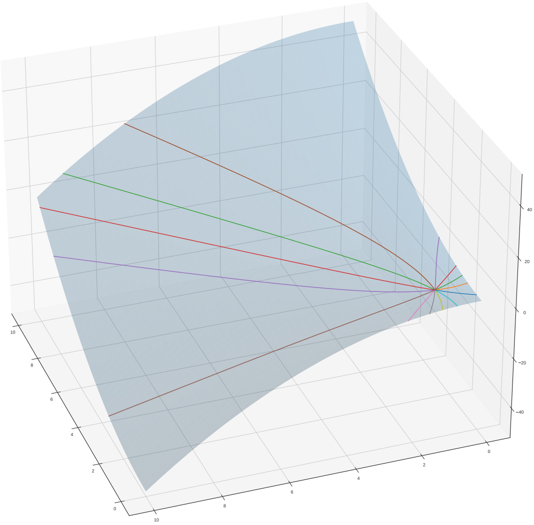
$$\mathrm{D}^2 v + \frac{v((\mathrm{D}v)^2 - (\mathrm{D}u)^2)}{u^2 + v^2 + 1} = 0 \tag{39}$$

Kugeloberfläche

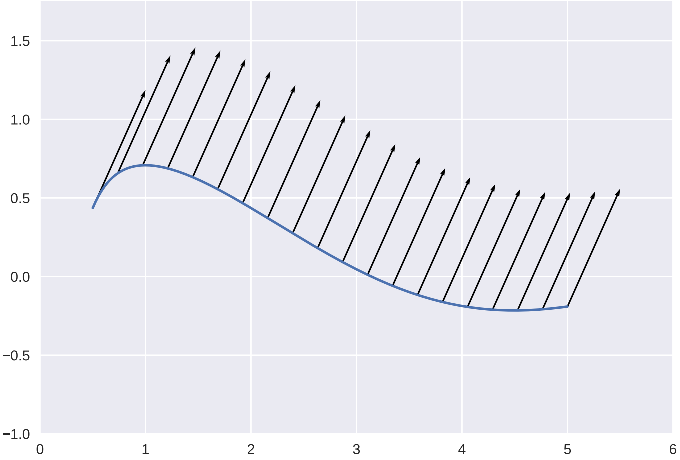
$$\mathrm{D}^2 \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} (\mathrm{D}\varphi)^2 = 0 \tag{40}$$

$$\mathrm{D}^2 \varphi - 2 \tan(\theta) \mathrm{D}\varphi \mathrm{D}\theta = 0 \tag{41}$$

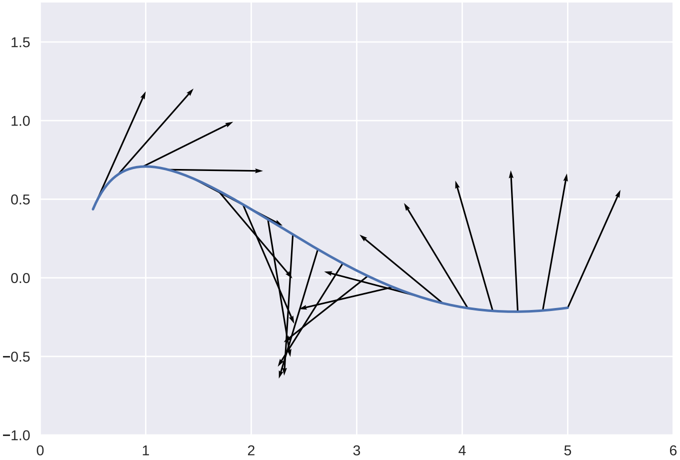
Numerisch bestimmte Geodäten



Parallelität

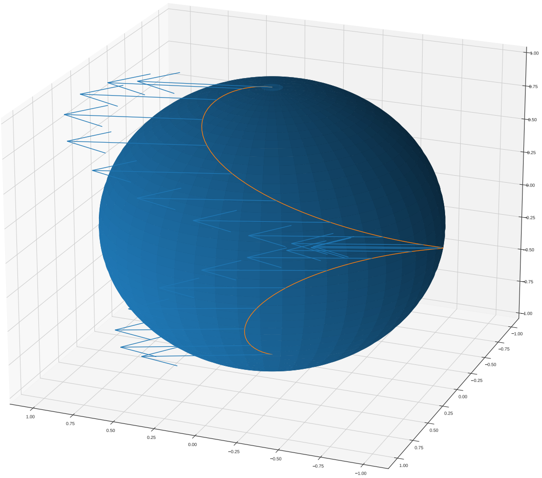


Parallelität



Bemerkung
Parallelität hängt damit zusammen wie konstant ein Vektorfeld verläuft.

Parallelität



Parallelität von Vektorfeldern heißt also ”so konstant wie die Fläche es zulässt”.

Definition (Parallelität)
Wir nennen ein Vektorfeld $V \in \Gamma(TM|_\gamma)$ entlang einer Kurve $\gamma : I \to M$ auf einer Mannigfaltigkeit M genau dann *parallel*, wenn die Kovariante Ableitung konstant 0 ist; es gilt also

$$\frac{\mathrm{D}\,V}{dt} \equiv 0. \tag{42}$$

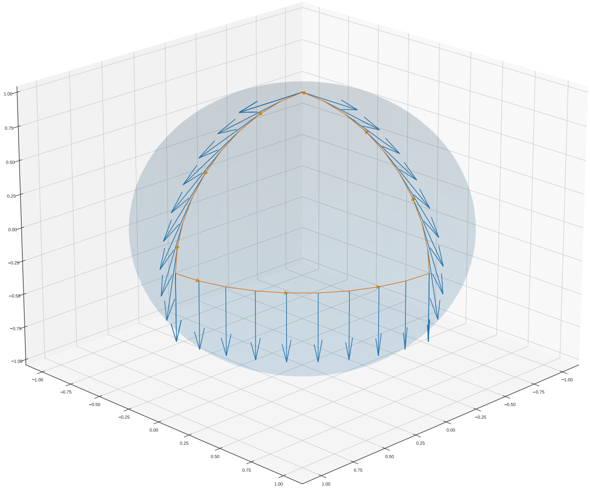
Zur Parallelität

- Eine Kurve ist eine Geodäte, genau dann wenn ihr Geschwindigkeitsfeld parallel ist

Zur Parallelität

- Eine Kurve ist eine Geodäte, genau dann wenn ihr Geschwindigkeitsfeld parallel ist
- Die Metrik ist unter Parallelverschiebung invariant

Holonomie


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

Theorema Egregium

Das Theorema Egregium

Satz (Theorema Egregium)
Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Satz (Theorema Egregium)
Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators

Satz (Theorema Egregium)
Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators
- Formoperator ist Endormorphismus auf Tangentialraum: $L_p \in \mathrm{End}(T_pM)$

Das Theorem Egregium

Satz (Theorema Egregium)
Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators
- Formoperator ist Endormorphismus auf Tangentialraum: $L_p \in \mathrm{End}(T_pM)$
- Karte (U, ϕ) induziert Endormorphismus $\widetilde{L} := \phi_*^{-1} \circ L_p \circ \phi_*$ auf $T_{\phi^{-1}}U$

Satz (Theorema Egregium)
Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators
- Formoperator ist Endormorphismus auf Tangentialraum: $L_p \in \text{End}(T_p M)$
- Karte (U, ϕ) induziert Endormorphismus $\widetilde{L} := \phi_*^{-1} \circ L_p \circ \phi_*$ auf $T_{\phi^{-1}} U$
- $\widetilde{L}$ ist ähnlich zu L

Satz (Theorema Egregium)
Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators
- Formoperator ist Endormorphismus auf Tangentialraum: $L_p \in \text{End}(T_pM)$
- Karte (U, ϕ) induziert Endormorphismus $\widetilde{L} := \phi_*^{-1} \circ L_p \circ \phi_*$ auf $T_{\phi^{-1}}U$
- $\widetilde{L}$ ist ähnlich zu L
- Determinante invariant unter Ähnlichkeitstransformationen
  $\implies$ Gaußsche Krümmung isometrisch invariant

$\square$

Literatur

Shiin-Shen Chern. „Differential Geometry; its past and its future“. In: *Actes du Congrès international des mathématiciens (Proceedings ICM)* 1 (1970), S. 41–53. URL: `https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1970.1/ICM1970.1.ocr.pdf`.

Fragen und Diskussion