

Innere Geometrie der Flächen

Stefan Volz

Mathematisches Seminar

23.11.2021

Hochschule für angewandte Wissenschaften Würzburg-Schweinfurt
Fakultät für angewandte Natur- und Geisteswissenschaften
Bachelorstudiengang Technomathematik

Gliederung

Einführung

Motivation

Konventionen

Grundsätzliche Definitionen

Geodäten

Geodäten als längenminimierende, *gerade* Kurven

Ableitungsbegriffe

Christoffelsymbole

Geodätengleichung

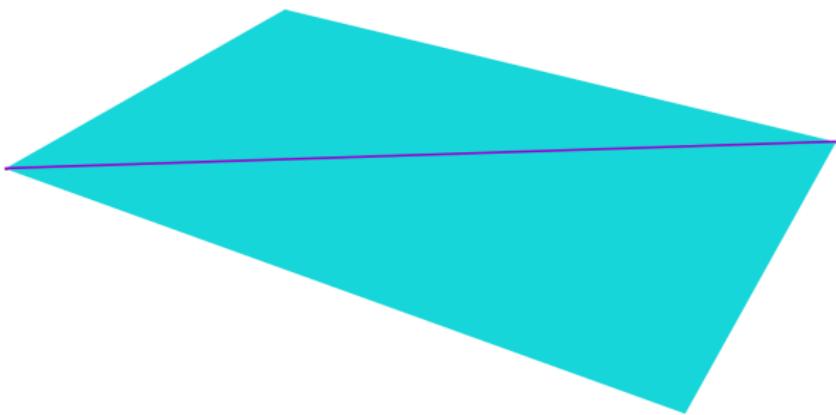
Paralleltransport

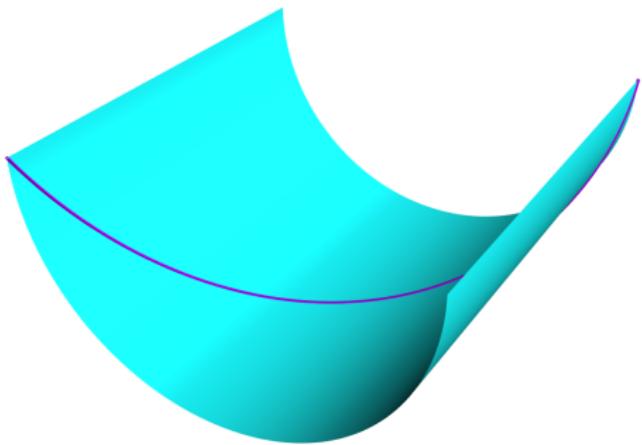
Holonomie

Theorema Egregium

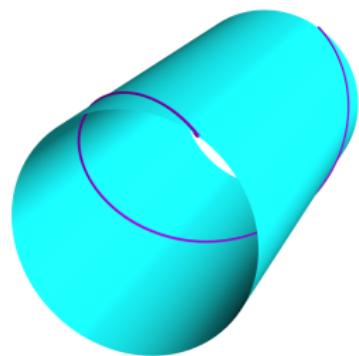
Einführung

Motivation





Motivation



Skript



Folien



- Koordinatenfunktionen x^1, \dots, x^n : Indizes, keine Potenzen
- Keine Einsteinsche Summenkonvention
- Differential einer Funktion ϕ mit ϕ_* bezeichnet
- Alle Funktionen *glatt*, also C^∞
- Alle Mannigfaltigkeiten differenzierbar

Mannigfaltigkeiten

The main object of study in differential geometry is, at least for the moment, the differentiable manifolds, structures on the manifolds (Riemannian, complex, or other), and their admissible mappings.

– *Differential Geometry; its past and its future*
SHII-SHEN CHERN [Che70]

Definition (Mannigfaltigkeit)

Lokal euklidischer, topologischer Raum, sodass die euklidische Struktur glatt ist.

Mannigfaltigkeiten

The main object of study in differential geometry is, at least for the moment, the differentiable manifolds, structures on the manifolds (Riemannian, complex, or other), and their admissible mappings.

– *Differential Geometry; its past and its future*
SHII-SHEN CHERN [Che70]

Definition (Mannigfaltigkeit)

Lokal euklidischer, topologischer Raum, sodass die euklidische Struktur glatt ist.

Definition (Karte)

Eine Karte ist ein Tupel (U, ϕ) aus einer Menge $U \subseteq M$ und einem Homöomorphismus $\phi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^k$. Sie formalisiert die lokale Euklidizität von M .

Alle Mannigfaltigkeiten über die wir heute Sprechen sind reguläre
Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n !

Definition (Tangentialraum)

Lokal beste lineare Näherung einer Mannigfaltigkeit. Ist M Mannigfaltigkeit mit Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, dann ist der Tangentialraum $T_p M$ von M bei $p \in U$ gegeben durch

$$T_p M := \text{Spann} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\} \quad (1)$$

mit $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f := \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_p (f \circ \phi^{-1})$ für $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition (Riemannsche Mannigfaltigkeit)

Mannigfaltigkeit M mit Skalarprodukt $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ auf Tangentialräumen $T_p M$, sodass g in $p \in M$ glatt ist.

Definition (Riemannsche Mannigfaltigkeit)

Mannigfaltigkeit M mit Skalarprodukt $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ auf Tangentialräumen $T_p M$, sodass g in $p \in M$ glatt ist.

Beispiel

Der \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt, genannt euklidische Metrik.

Beispiel

Die euklidische Metrik des \mathbb{R}^k induziert auf einer durch $\phi : M \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$ kartierten Untermannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^n eine Metrik. Diese ist für $x \in M, u, v \in T_x M$ gegeben durch

$$g_x(u, v) = \langle \phi_* u, \phi_* v \rangle = (J(x)v)^T J(x)u = v^T G(x)u. \quad (2)$$

Geodäten

Erste Charakterisierung *gerader* Linien der Ebene:

- Kürzeste Verbindungslien von je zwei Punkten auf der Linie

Erste Charakterisierung *gerader* Linien der Ebene:

- Kürzeste Verbindungslien von je zwei Punkten auf der Linie

Daher untersuchen wir:

Definition (Längenfunktional)

Das Längenfunktional ist die Abbildung $\mathcal{L} : (\mathbb{R}^n)^{(a,b)} \rightarrow \mathbb{R}$, welche einer Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ihre Länge

$$\mathcal{L}[\gamma] := \int_a^b \|\mathsf{D}\gamma(t)\|_2 dt \quad (3)$$

zuordnet.

Variation des Funktionals

Notwendige Bedingung für Extremität eines Funktionals F ist Stationarität, also Verschwinden der Variation δF des Funktionals:

$$\delta \mathcal{L}[\gamma_\epsilon] = 0. \quad (4)$$

Variation des Funktionals

Notwendige Bedingung für Extremität eines Funktionals F ist Stationarität, also Verschwinden der Variation δF des Funktionals:

$$\delta \mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = 0. \quad (4)$$

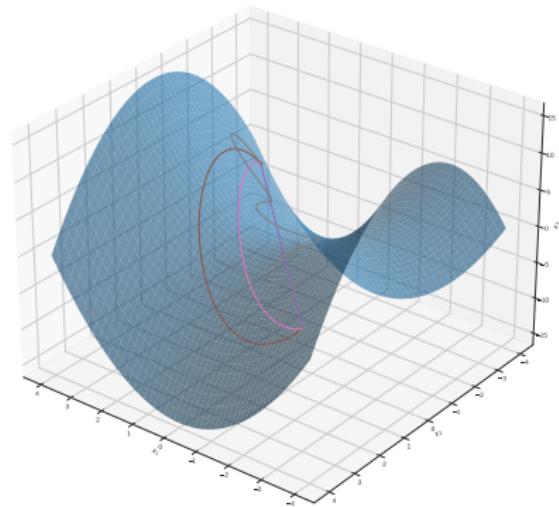
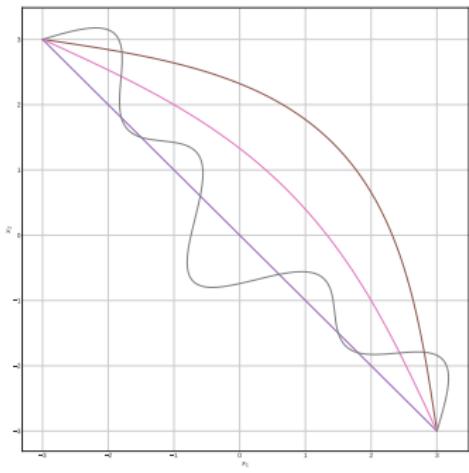
Aus welchen Räumen sind Lösungskurve γ_0 und Variationen γ_ε ?
Lösungskurve für Verbindung zwischen $A, B \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ liegt in affinem Raum

$$\mathcal{F} := \{\gamma : [a, b] \rightarrow M \mid \gamma \text{ nach Kurvenlänge parametrisiert}, \quad (5)$$

$$\gamma(a) = A, \gamma(b) = B\}$$
 (6)

und Variationen ergeben sich durch Variationen α_ε im Parameterbereich (Details → Skript).

Variationen einer Kurve



Berechnung der Variation

$$\delta \mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 dt|_{\varepsilon=0} \quad (7)$$

(12)

Berechnung der Variation

$$\delta \mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 dt \Big|_{\varepsilon=0} \quad (7)$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (8)$$

(12)

Berechnung der Variation

$$\delta \mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 dt \Big|_{\varepsilon=0} \quad (7)$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (8)$$

$$= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^n D\gamma_\varepsilon^k(t) \partial_\varepsilon D\gamma_\varepsilon^k(t)}{\|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2} \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (9)$$

(12)

Berechnung der Variation

$$\delta \mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 dt \Big|_{\varepsilon=0} \quad (7)$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (8)$$

$$= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^n D\gamma_\varepsilon^k(t) \partial_\varepsilon D\gamma_\varepsilon^k(t)}{\|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2} \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (9)$$

$$= \int_a^b \frac{\langle D\gamma_0, \partial_\varepsilon D\gamma_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} \rangle(t)}{\|D\gamma_0(t)\|_2} dt \quad (10)$$

(12)

Berechnung der Variation

$$\delta \mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 dt \Big|_{\varepsilon=0} \quad (7)$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (8)$$

$$= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^n D\gamma_\varepsilon^k(t) \partial_\varepsilon D\gamma_\varepsilon^k(t)}{\|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2} \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (9)$$

$$= \int_a^b \frac{\langle D\gamma_0, \partial_\varepsilon D\gamma_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} \rangle(t)}{\|D\gamma_0(t)\|_2} dt \quad (10)$$

$$\text{(Param. nach Kurvenlänge)} = \int_a^b \langle D\gamma_0, \partial_\varepsilon D\gamma_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} \rangle(t) dt \quad (11)$$

(12)

Berechnung der Variation

$$\delta \mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = \partial_\varepsilon \int_a^b \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 dt \Big|_{\varepsilon=0} \quad (7)$$

$$= \int_a^b \partial_\varepsilon \|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2 \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (8)$$

$$= \int_a^b \frac{\sum_{k=1}^n D\gamma_\varepsilon^k(t) \partial_\varepsilon D\gamma_\varepsilon^k(t)}{\|D\gamma_\varepsilon(t)\|_2} \Big|_{\varepsilon=0} dt \quad (9)$$

$$= \int_a^b \frac{\langle D\gamma_0, \partial_\varepsilon D\gamma_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} \rangle(t)}{\|D\gamma_0(t)\|_2} dt \quad (10)$$

$$\text{(Param. nach Kurvenlänge)} = \int_a^b \langle D\gamma_0, \partial_\varepsilon D\gamma_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} \rangle(t) dt \quad (11)$$

$$\text{(Part. Integration)} = \langle D\gamma_0, \partial_\varepsilon \gamma_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} \rangle(t) \Big|_a^b - \int_a^b \langle D^2 \gamma_0, \partial_\varepsilon \gamma_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} \rangle(t) dt \quad (12)$$

Berechnung der Variation

Es gilt

$$\gamma_\varepsilon = \phi \circ \alpha_\varepsilon \text{ mit } \alpha_\varepsilon := \alpha + \varepsilon \delta \alpha. \quad (13)$$

Berechnung der Variation

Es gilt

$$\gamma_\varepsilon = \phi \circ \alpha_\varepsilon \text{ mit } \alpha_\varepsilon := \alpha + \varepsilon \delta \alpha. \quad (13)$$

Somit folgt

$$\partial_\varepsilon \gamma_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} = \phi_{*, \alpha_\varepsilon} \partial_\varepsilon \alpha_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} \quad (14)$$

$$= \phi_{*, \alpha_\varepsilon} \partial_\varepsilon (\alpha + \varepsilon \delta \alpha) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (15)$$

$$= \phi_{*, \alpha} \delta \alpha =: \delta \gamma. \quad (16)$$

Definition (Orthogonal- und Tangentialkomponente eines Vektors)

Es sei M eine Fläche im \mathbb{R}^n mit Normaleneinheitsfeld $\nu : M \rightarrow S^{n-1}$. Sei weiterhin $v \in \mathbb{R}^n$ und $u \in M$. Wir definieren die Orthogonalkomponente $v^\perp(u)$ sowie die Tangentialkomponente $v^\top(u)$ von v bzgl. ν in u durch

$$v^\perp(u) := \langle v, \nu(u) \rangle \nu(u) \tag{17}$$

$$v^\top(u) := v - v^\perp(u). \tag{18}$$

Satz

Ist $\gamma : I := (a, b) \rightarrow M$ eine nach Kurvenlänge parametrisierte Kurve auf einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, so gilt

$$\delta \mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = \langle D\gamma_0, \delta\gamma \rangle(t) \Big|_a^b - \int_a^b \langle (D^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma \rangle(t) dt, \quad (19)$$

wobei $(D^2\gamma_0)^\top$ die Tangentialkomponente von $D^2\gamma_0$ bezeichnet.

Wir suchen stationäre Punkte von \mathcal{L} also:

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = \langle D\gamma_0, \delta\gamma \rangle(t)|_a^b - \int_a^b \langle (D^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma \rangle(t) dt = 0. \quad (20)$$

Wir suchen stationäre Punkte von \mathcal{L} also:

$$\delta\mathcal{L}[\gamma_\varepsilon] = \langle D\gamma_0, \delta\gamma \rangle(t)|_a^b - \int_a^b \langle (D^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma \rangle(t) dt = 0. \quad (20)$$

Es lässt sich zeigen, dass $\delta\gamma \in \{\delta\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \delta\gamma(a) = \delta\gamma(b) = 0\}$,
also

$$\int_a^b \langle (D^2\gamma_0)^\top, \delta\gamma \rangle(t) dt = 0. \quad (21)$$

Definition (Geodäte, geodätische Krümmung)

Es sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve auf einer Fläche M . Gilt

$$(D^2\gamma)^\top \equiv 0 \text{ auf } I, \quad (22)$$

so nennen wir γ eine *Geodäte*. Für eine allgemeine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ nennen wir $(D^2\gamma)^\top$ den *geodätischen Krümmungsvektor* und $\|(D^2\gamma)^\top\|_2$ die *geodätische Krümmung*.

Richtungsableitung

- Richtungsableitung aus der Analysis: zu Vektor v und Funktion f ist Richtungsableitung von f in Richtung v gleich

$$D_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$

Richtungsableitung

- Richtungsableitung aus der Analysis: zu Vektor v und Funktion f ist Richtungsableitung von f in Richtung v gleich
$$D_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$
- Vektoren als Differentialoperatoren durch Zuordnung $v \mapsto D_v$

Richtungsableitung

- Richtungsableitung aus der Analysis: zu Vektor v und Funktion f ist Richtungsableitung von f in Richtung v gleich

$$D_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$

- Vektoren als Differentialoperatoren durch Zuordnung $v \mapsto D_v$
- Verallgemeinerung 1: Vektorfeld statt Vektor. Zu $X \in \mathfrak{X}(M)$ definiere

$$(Xf)(p) := D_{X_p} f. \tag{23}$$

Richtungsableitung

- Richtungsableitung aus der Analysis: zu Vektor v und Funktion f ist Richtungsableitung von f in Richtung v gleich

$$D_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$

- Vektoren als Differentialoperatoren durch Zuordnung $v \mapsto D_v$
- Verallgemeinerung 1: Vektorfeld statt Vektor. Zu $X \in \mathfrak{X}(M)$ definiere

$$(Xf)(p) := D_{X_p} f. \tag{23}$$

- Verallgemeinerung 2: Vektorfeld statt Funktion.

Definition (Richtungsableitung eines Vektorfelds entlang eines Vektorfelds)

Es sei M eine reguläre Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Weiterhin seien $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M und $Y = \sum_k y^k \partial_k \in \Gamma(T\mathbb{R}^n|_M)$ ein Vektorfeld entlang M in \mathbb{R}^n . Dann definieren wir die Richtungsableitung von Y entlang X durch

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T\mathbb{R}^n|_M) \rightarrow \Gamma(T\mathbb{R}^n|_M) \quad (24)$$

$$(X, Y) \mapsto D_X Y := \sum_k (Xy^k) \partial_k. \quad (25)$$

Definition (Levi-Civita-Ableitung^{a)})

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Die Levi-Civita-Ableitung ∇ auf M ist definiert durch

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T\mathbb{R}^3|_M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \quad (26)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y := (D_X Y)^\top. \quad (27)$$

^aTULLIO LEVI-CIVITA, 1873-1941, italienischer Mathematiker der sich u.a. mit Tensoranalysis und deren Anwendung auf die Einsteinsche Relativitätstheorie beschäftigte.

Definition (Kovariante Ableitung)

Es sei M eine Fläche, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve auf M und $V \in \Gamma(TM|_{\gamma(t)})$ ein Vektorfeld entlang der Kurve mit einem Vektorfeld $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$ auf der Mannigfaltigkeit, sodass $V(t) = \tilde{V}(\gamma(t))$. Dann definieren wir die kovariante Ableitung von V entlang γ auf M durch

$$\frac{D}{dt} V(t) := \nabla_{D\gamma(t)} \tilde{V}. \quad (28)$$

Definition (Kovariante Ableitung)

Es sei M eine Fläche, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve auf M und $V \in \Gamma(TM|_{\gamma(t)})$ ein Vektorfeld entlang der Kurve mit einem Vektorfeld $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$ auf der Mannigfaltigkeit, sodass $V(t) = \tilde{V}(\gamma(t))$. Dann definieren wir die kovariante Ableitung von V entlang γ auf M durch

$$\frac{D}{dt} V(t) := \nabla_{D\gamma(t)} \tilde{V}. \quad (28)$$

Für unsere Zwecke wichtig ist:

$$(D^2 \gamma_0)^\top(t) = \frac{D(D\gamma_0)}{dt}(t). \quad (29)$$

Was sind Christoffelsymbole?

Es seien $X = \sum_k a^k \partial_k$, $Y = \sum_k b^k \partial_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt

$$\nabla_X Y \stackrel{\text{Linearität}}{=} \sum_k a^k \nabla_{\partial_k} Y \stackrel{\substack{\text{Leibniz} \\ \text{Regel}}}{=} \sum_k a^k \sum_j (\partial_k b^j) \partial_j + b^j \nabla_{\partial_k} \partial_j. \quad (30)$$

Was sind Christoffelsymbole?

Es seien $X = \sum_k a^k \partial_k$, $Y = \sum_k b^k \partial_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt

$$\nabla_X Y \stackrel{\text{Linearität}}{=} \sum_k a^k \nabla_{\partial_k} Y \stackrel{\substack{\text{Leibniz} \\ \text{Regel}}}{=} \sum_k a^k \sum_j (\partial_k b^j) \partial_j + b^j \nabla_{\partial_k} \partial_j. \quad (30)$$

Also ist ∇ durch Wirkung auf Basiselemente ∂_j eindeutig festgelegt!

Was sind Christoffelsymbole?

Es seien $X = \sum_k a^k \partial_k$, $Y = \sum_k b^k \partial_k \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt

$$\nabla_X Y = \sum_k a^k \nabla_{\partial_k} Y \stackrel{\text{Linearität}}{=} \sum_k a^k \sum_j (\partial_k b^j) \partial_j + b^j \nabla_{\partial_k} \partial_j. \quad (30)$$

Also ist ∇ durch Wirkung auf Basiselemente ∂_j eindeutig festgelegt!

Per Definition ist ∇ eine Abbildung $\mathfrak{X}(M) \times \Gamma(T\mathbb{R}^3|_M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Also gilt

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (31)$$

für Funktionen Γ_{ij}^k .

Bestimmung der Christoffelsymbole

- Bestimmung ist direkt aus Definition möglich, jedoch eher aufwendig.

Bestimmung der Christoffelsymbole

- Bestimmung ist direkt aus Definition möglich, jedoch eher aufwendig.
- Es lässt sich zeigen (siehe Skript), dass

$$(\phi_{ij} \circ \phi^{-1})^\top \simeq \nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \simeq \sum_k \Gamma_{ij}^k (\phi_k \circ \phi^{-1}) \quad (32)$$

$$\iff \phi_{ij}^\top = \sum_k \Gamma_{ij}^k \phi_k \quad (33)$$

für eine Fläche mit Parametrisierung $\phi : U \rightarrow M$, $\phi_{ij} = \partial_{r^i} \partial_{r^j} \phi$, $i, j = 1, 2$.

Dies ist der Ausgangspunkt für die Entwicklung eines linearen Gleichungssystems für die Christoffelsymbole.

Lineares System der Christoffelsymbole

Betrachte Ableitungen der Metrik in Koordinaten, also Einträge g_{ij} der Gramschen Matrix G :

$$\partial_r g_{ij} = \partial_r(\langle \phi_i, \phi_j \rangle) = \langle \phi_{ir}, \phi_j \rangle + \langle \phi_i, \phi_{jr} \rangle \quad (34)$$

$$\implies \langle \phi_{ij}, \phi_r \rangle = \frac{1}{2}(\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir}). \quad (35)$$

Lineares System der Christoffelsymbole

Betrachte Ableitungen der Metrik in Koordinaten, also Einträge g_{ij} der Gramschen Matrix G :

$$\partial_r g_{ij} = \partial_r(\langle \phi_i, \phi_j \rangle) = \langle \phi_{ir}, \phi_j \rangle + \langle \phi_i, \phi_{jr} \rangle \quad (34)$$

$$\implies \langle \phi_{ij}, \phi_r \rangle = \frac{1}{2}(\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir}). \quad (35)$$

Skalarprodukt von $\phi_{ij}^\top = \sum_k \Gamma_{ij}^k \phi_k$ mit ϕ_r ergibt

$$\langle \phi_{ij}, \phi_r \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k \langle \phi_k, \phi_r \rangle \quad (36)$$

$$\iff \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kr} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir}). \quad (37)$$

Definiere $\Gamma_i := (\Gamma_{ij}^k)_{j,k=1,2} \in \mathbb{R}^{2,2}$ und
 $A_i := \frac{1}{2}(\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ir})_{r,j=1,2} \in \mathbb{R}^{2,2}$, dann

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \iff G \begin{pmatrix} \Gamma_1^T & \Gamma_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T & A_2^T \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Da G stets invertierbar (da symmetrisch positiv definit) ist, ist dieses System immer lösbar!

Satz (Geodätengleichung)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, (U, ϕ) eine Koordinatenumgebung mit zugehörigen Christoffelsymbolen Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$. Weiterhin sei $\gamma : I := [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve auf M . Dann ist γ genau dann eine Geodäte, wenn die sogenannte *Geodätengleichung*

$$D^2 y^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k D y^i D y^j = 0 \quad (39)$$

für $k = 1, 2$ gilt, wobei $y := \phi \circ \gamma : I \rightarrow U$ eine Kurve auf U ist.

Beweisidee:

- Kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes
 $V(t) := Dy(t) = \sum_j Dy^j(t) \partial_j$ von y als Linearkombination von ∂_k darstellen
- Kovariante Ableitung muss verschwinden, also sind alle Koeffizienten gleich 0
- Die Koeffizienten sind genau die linken Seiten der Geodätengleichung

$$\text{Geodätengleichung: } D^2y^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Dy^i Dy^j = 0 \quad (40)$$

$$\text{Geodätengleichung: } D^2y^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Dy^i Dy^j = 0 \quad (40)$$

- System aus linearen DGL zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten

$$\text{Geodätengleichung: } D^2y^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Dy^i Dy^j = 0 \quad (40)$$

- System aus linearen DGL zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten
- Lösung für AWP existiert immer! (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

$$\text{Geodätengleichung: } D^2y^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Dy^i Dy^j = 0 \quad (40)$$

- System aus linearen DGL zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten
- Lösung für AWP existiert immer! (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Hyperbolischer Paraboloid

$$D^2u + \frac{u((Du)^2 - (Dv)^2)}{u^2 + v^2 + 1} = 0 \quad (41)$$

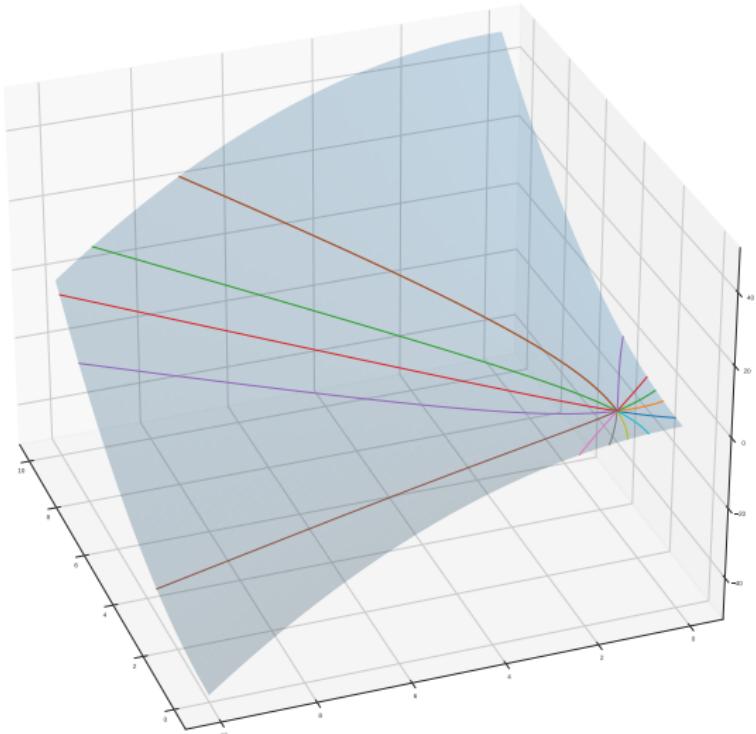
$$D^2v + \frac{v((Dv)^2 - (Du)^2)}{u^2 + v^2 + 1} = 0 \quad (42)$$

Kugeloberfläche

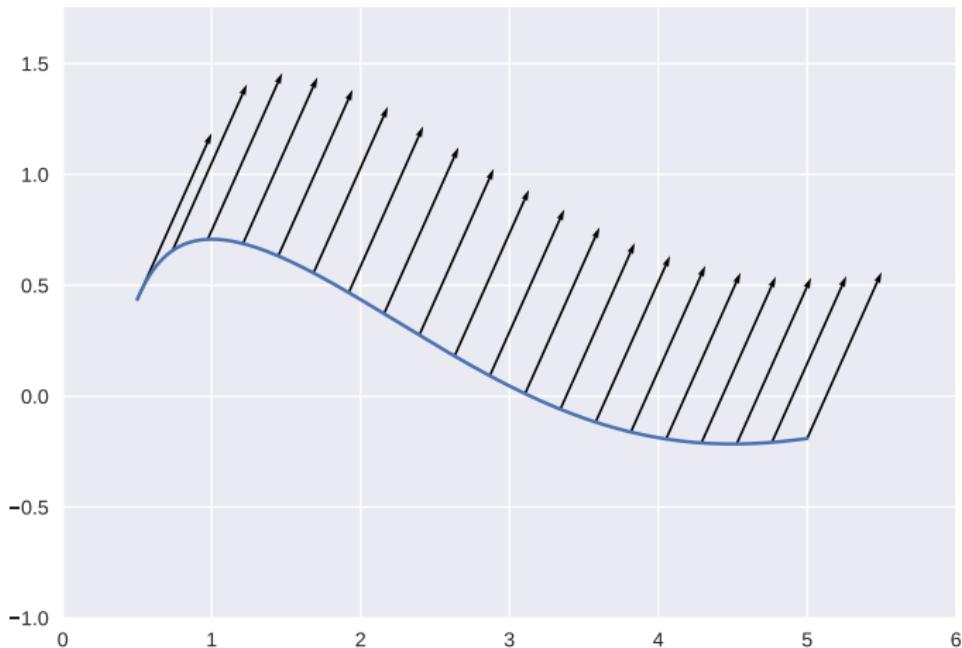
$$D^2\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} (D\varphi)^2 = 0 \quad (43)$$

$$D^2\varphi - 2\tan(\theta)D\varphi D\theta = 0 \quad (44)$$

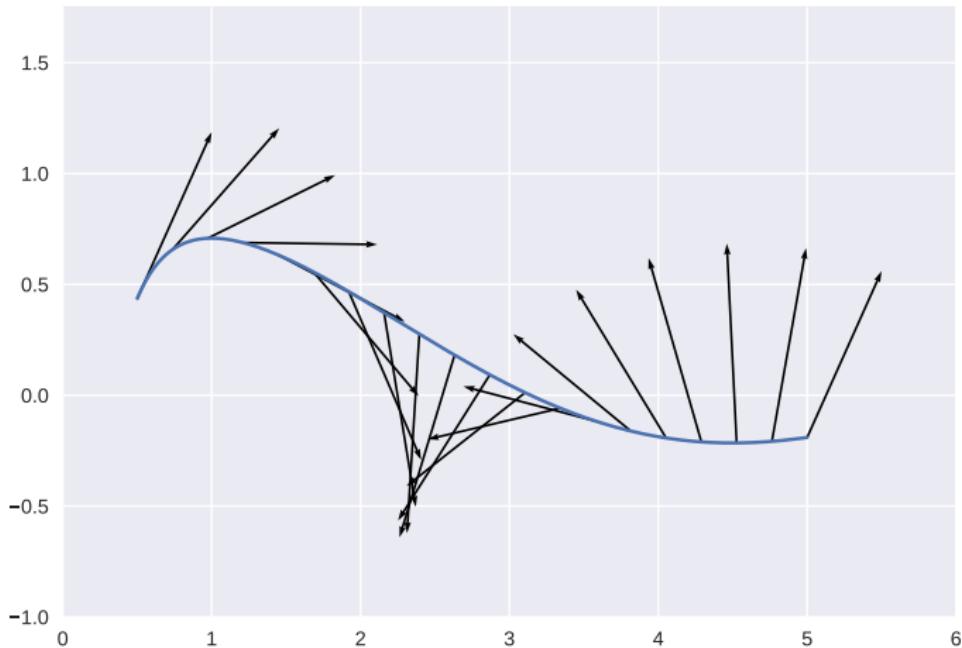
Numerisch bestimmte Geodäten



Parallelität

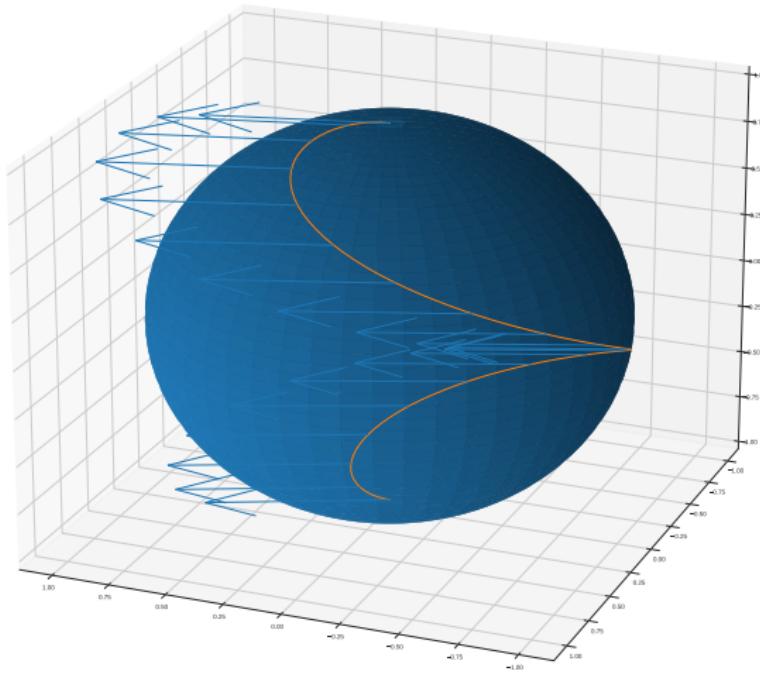


Parallelität



Bemerkung

Parallelität hängt damit zusammen wie konstant ein Vektorfeld verläuft.



Parallelität von Vektorfeldern heißt also "so konstant wie die Fläche es zulässt".

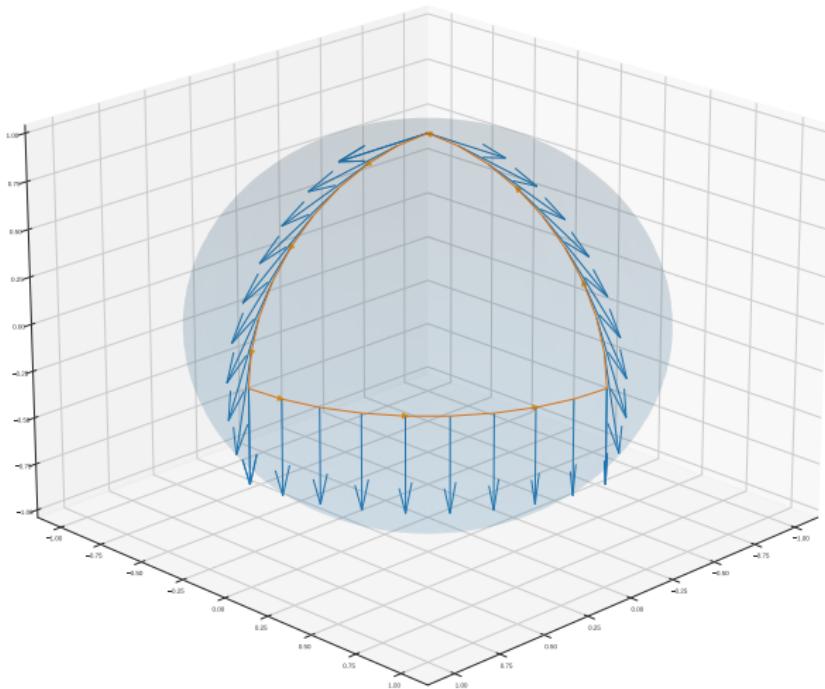
Definition (Parallelität)

Wir nennen ein Vektorfeld $V \in \Gamma(TM|_{\gamma})$ entlang einer Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ auf einer Mannigfaltigkeit M genau dann *parallel*, wenn die Kovariante Ableitung konstant 0 ist; es gilt also

$$\frac{D V}{dt} \equiv 0. \tag{45}$$

- Eine Kurve ist eine Geodäte, genau dann wenn ihr Geschwindigkeitsfeld parallel ist

- Eine Kurve ist eine Geodäte, genau dann wenn ihr Geschwindigkeitsfeld parallel ist
- Die Metrik ist unter Parallelverschiebung invariant



Theorema Egregium

Das Theorema Egregium

Satz (Theorema Egregium)

Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Das Theorema Egregium

Satz (Theorema Egregium)

Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators

Satz (Theorema Egregium)

Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators
- Formoperator ist Endomorphismus auf Tangentialraum:
 $L_p \in \text{End}(T_p M)$

Satz (Theorema Egregium)

Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators
- Formoperator ist Endomorphismus auf Tangentialraum:
 $L_p \in \text{End}(T_p M)$
- Isometrie $\phi : M \rightarrow N$ induziert Endomorphismus
 $\tilde{L} := \phi_* \circ L_p \circ \phi_*^{-1}$ auf Tangentialraum der verbogenen Fläche N

Satz (Theorema Egregium)

Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators
- Formoperator ist Endomorphismus auf Tangentialraum:
 $L_p \in \text{End}(T_p M)$
- Isometrie $\phi : M \rightarrow N$ induziert Endomorphismus
 $\tilde{L} := \phi_* \circ L_p \circ \phi_*^{-1}$ auf Tangentialraum der verbogenen Fläche N
- \tilde{L} stimmt mit dem Formoperator von N überein

Das Theorema Egregium

Satz (Theorema Egregium)

Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators
- Formoperator ist Endomorphismus auf Tangentialraum:
 $L_p \in \text{End}(T_p M)$
- Isometrie $\phi : M \rightarrow N$ induziert Endomorphismus
 $\tilde{L} := \phi_* \circ L_p \circ \phi_*^{-1}$ auf Tangentialraum der verbogenen Fläche N
- \tilde{L} stimmt mit dem Formoperator von N überein
- \tilde{L} ist ähnlich zu L

Satz (Theorema Egregium)

Die Gaußsche Krümmung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis.

- Gaußsche Krümmung ist Determinante des Formoperators
- Formoperator ist Endomorphismus auf Tangentialraum:
 $L_p \in \text{End}(T_p M)$
- Isometrie $\phi : M \rightarrow N$ induziert Endomorphismus
 $\tilde{L} := \phi_* \circ L_p \circ \phi_*^{-1}$ auf Tangentialraum der verbogenen Fläche N
- \tilde{L} stimmt mit dem Formoperator von N überein
- \tilde{L} ist ähnlich zu L
- Determinante invariant unter Ähnlichkeitstransformationen
 \implies Gaußsche Krümmung isometrisch invariant



Literatur



Shiin-Shen Chern. „Differential Geometry; its past and its future“. In: *Actes du Congrès international des mathématiciens (Proceedings ICM)* 1 (1970), S. 41–53. URL:
<https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1970.1/ICM1970.1.ocr.pdf>.

Fragen und Diskussion