

TECHNICAL UNIVERSITY OF APPLIED
SCIENCES WÜRZBURG-SCHWEINFURT

B. SC. INDUSTRIAL MATHEMATICS

THESIS

A title

Author

Author NAME

Supervisor

Prof. Dr. Supervisor NAME

Preprint / WIP

February 22, 2024



Matriculation Number

1234567

Primary Examiner

Prof. Dr. Supervisor NAME

Technical University of Applied Sciences Würzburg-Schweinfurt

Secondary Examiner

Prof. Dr. Jemand ANDERES

Darmstadt University of Applied Sciences

The title

The authors

February 22, 2024

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Contents

Preface	3
0 Table of Contents	3
0.1 List of Notation	4
0.2 Basic definitions	5
1 Some section	6
Bibliography	11

0.1 List of Notation

Symbol	Definition
s. t.	Abbreviation for <i>such that</i> .
resp.	Abbreviation for <i>respectively</i> .
w. r. t.	Abbreviation for <i>with respect to</i> .
$m : n$	Discrete interval $(m, m + 1, \dots, n - 1, n)$ for integers $m \leq n$.
$[m : n]$	Alternative notation for discrete intervals that we use whenever the other one may lead to ambiguity or confusion.
$f \in \mathcal{O}(g(x))$	Landau symbol denoting asymptotic boundedness of $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ by $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ from above; so $f \in \mathcal{O}(g(x)) : \Longleftrightarrow \limsup_{x \rightarrow a} \left \frac{f(x)}{g(x)} \right < \infty$ for $a \in D$ s. t. the limit is well defined. The limiting point is usually omitted since it's clear from context
$f \in \Omega(g(x))$	Landau symbol denoting asymptotic boundedness of $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ by $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ from below; $g \in \mathcal{O}(f(x))$
$f \in \Theta(g(x))$	Landau symbol denoting asymptotic equality of $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ and $g: D \rightarrow \mathbb{R}$; $f \in \mathcal{O}(g(x))$ and $g \in \mathcal{O}(f(x))$
$(f(i))_{i \in I}$	Sequence with elements $\{f(i) : i \in I\}$ ordered by a strict total order on I
$(f(i))_{i=1, \dots, n}$	Finite sequence indexed by integers; so $(f(i))_{i \in m:n}$
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Nonnegative real numbers; so $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$\bigsqcup_{i \in I} A_i$	Disjoint union of sets A_i ; so the set $\{(i, a) : a \in A_i\}$. If the all the A_i are already disjoint we identify this set (through the obvious isomorphism) with $\bigcup_{i \in I} A_i$ and merely use the new notation to emphasize disjointness.
$\text{Part}(A)$	Set of all partitions of a set A ; so the set of all sets P s. t. $A = \bigsqcup_{S \in P} S$.
$ A $	Cardinality of a set A .
$\#I$	Number of elements of a tuple I ; so $\#I = k : \Longleftrightarrow I = (i_1, \dots, i_k)$ for some i_1, \dots, i_k .
$(a_c^r)_{\substack{r=1, \dots, n \\ c=1, \dots, m}}$	$n \times m$ matrix where the r -th row has value a_c^r in the c -th column. If n resp. m equals 1 we may omit the corresponding index r resp. c .
$B_r(x)$	An open ball of radius $r > 0$ around a point x of some metric space.
\mathbb{Z}	The set of integers.
\mathbb{N}	The set of natural numbers starting at 1; so the positive integers.
\mathbb{N}_0	The set of natural numbers starting at 0; so the nonnegative integers.
$\mathcal{P}(A)$	The powerset of a set A ; so the set of all subsets.
∂A	The topological boundary of a set.
$D[f] \big _x$	The derivative of a function f evaluated at some point x .

0.2 Basic definitions

Definition 0.1 (Ordered partition).

Let A be a set and $<$ a strict partial order on A such that every subset of A contains both a minimal and a maximal element. Define the partial order \prec on $\mathcal{P}(A)$ by $P_1 \prec P_2 :\iff \max P_1 < \min P_2$ for all $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(A)$. We call a set $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ an $<$ -ordered setpartition of A if

- P is a partition of A
- $<$ is a total order on all elements of P
- and \prec is a total order on P .

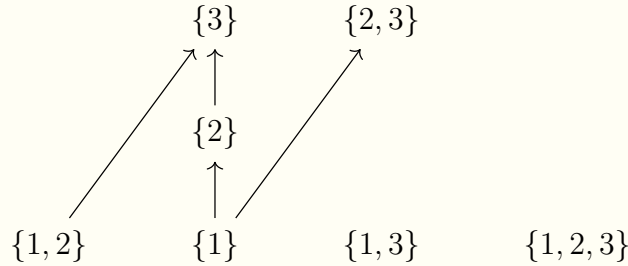
We identify any such ordered partition with the sequence $(T_i)_i$ obtained by ordering all elements of P by $<$ to obtain tuples $\{T_i\}_i$ which are then ordered by \prec to obtain $(T_i)_i$.

Remark 0.2 (Abuse of notation).

It's often-times convenient to identify a tuple or sequence $(f(i))_{i \in I}$ with the corresponding set $\{f(i)\}_{i \in I}$ as described in the previous definition. We will do so implicitly in particular for (ordered) partitions of discrete intervals $m : n$.

Example 0.3.

Let $A = 1 : 3$ with the standard order on integers then \prec on $\mathcal{P}(A)$ corresponds to the Hasse diagram



where we can clearly see the ordered partitions

$$\text{OPart}(A) = \{(1, 2, 3), (1, (2, 3)), ((1, 2), 3), ((1, 2, 3))\}. \quad (1)$$

We note that $\text{Part}(A) \setminus \text{OPart}(A)$ only contains $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$.

1 Some section

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa. Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent

sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetur at, consectetur sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetur a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetur. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetur tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor

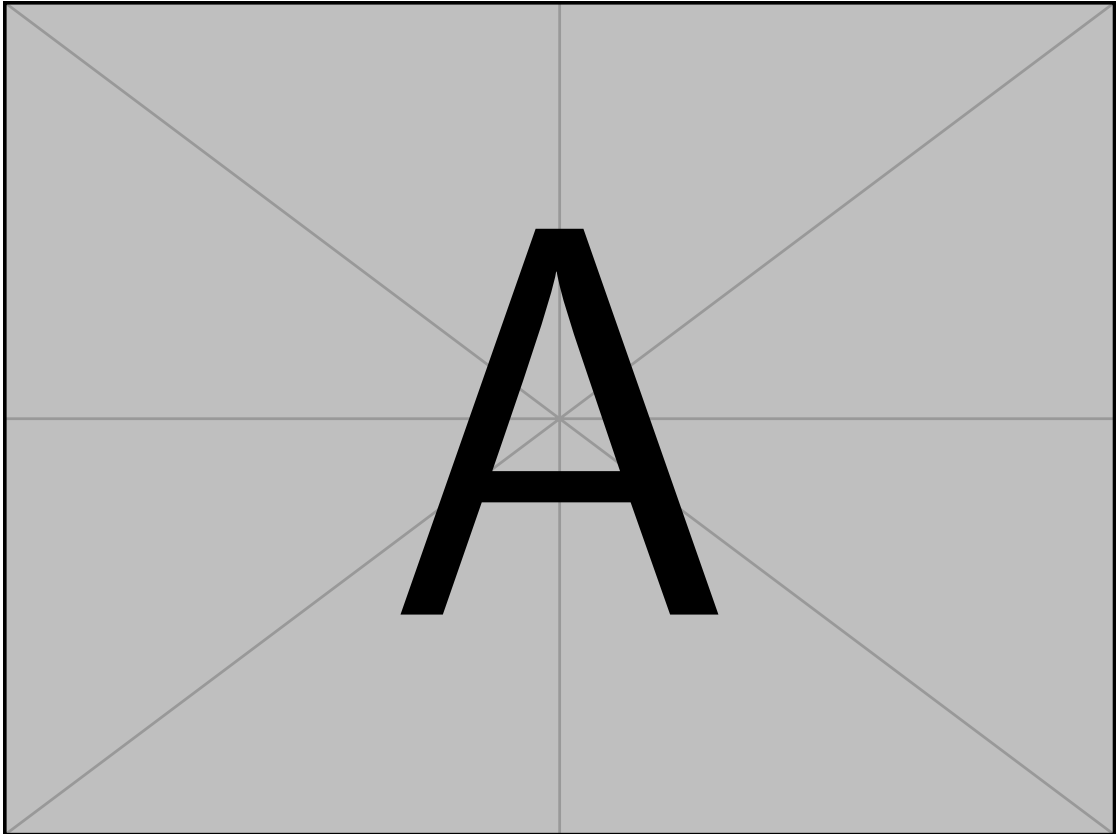


Figure 1: A figure

orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien. Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec

```
1     def some_function(x):  
2         return x  
3  
4  
5     print(some_function(1+2))
```

Listing 1: Some python code

rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis. Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque. Vivamus eu dolor.

Nulla in ipsum. Praesent eros nulla, congue vitae, euismod ut, commodo a, wisi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nonummy magna non leo. Sed felis erat, ullamcorper in, dictum non, ultricies ut, lectus. Proin vel arcu a odio lobortis euismod. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Proin ut est. Aliquam odio. Pellentesque massa turpis, cursus eu, euismod nec, tempor congue, nulla. Duis viverra gravida mauris. Cras tincidunt. Curabitur eros ligula, varius ut, pulvinar in, cursus faucibus, augue.

Nulla mattis luctus nulla. Duis commodo velit at leo. Aliquam vulputate magna et leo. Nam vestibulum ullamcorper leo. Vestibulum condimentum rutrum mauris. Donec id mauris. Morbi molestie justo et pede. Vivamus eget turpis sed nisl cursus tempor. Curabitur mollis sapien condimentum nunc. In wisi nisl, malesuada at, dignissim sit amet, lobortis in, odio. Aenean consequat arcu a ante. Pellentesque porta elit sit amet orci. Etiam at turpis nec elit ultricies imperdiet. Nulla facilisi. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse viverra aliquam risus. Nullam pede justo, molestie nonummy, scelerisque eu, facilisis vel, arcu.

Curabitur tellus magna, porttitor a, commodo a, commodo in, tortor. Donec interdum. Praesent scelerisque. Maecenas posuere sodales odio. Vivamus metus lacus, varius quis, imperdiet quis, rhoncus a, turpis. Etiam ligula arcu, elementum a, venenatis quis, sollicitudin sed, metus. Donec nunc pede, tincidunt in, venenatis vitae, faucibus vel, nibh. Pellentesque wisi. Nullam malesuada. Morbi ut tellus ut pede tincidunt porta. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam congue neque id dolor.

Donec et nisl at wisi luctus bibendum. Nam interdum tellus ac libero. Sed sem justo, laoreet vitae, fringilla at, adipiscing ut, nibh. Maecenas non sem quis tortor eleifend fermentum. Etiam id tortor ac mauris porta vulputate. Integer porta neque vitae massa. Maecenas tempus libero a libero posuere dictum. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aenean

quis mauris sed elit commodo placerat. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vivamus rhoncus tincidunt libero. Etiam elementum pretium justo. Vivamus est. Morbi a tellus eget pede tristique commodo. Nulla nisl. Vestibulum sed nisl eu sapien cursus rutrum.

Nulla non mauris vitae wisi posuere convallis. Sed eu nulla nec eros scelerisque pharetra. Nullam varius. Etiam dignissim elementum metus. Vestibulum faucibus, metus sit amet mattis rhoncus, sapien dui laoreet odio, nec ultricies nibh augue a enim. Fusce in ligula. Quisque at magna et nulla commodo consequat. Proin accumsan imperdiet sem. Nunc porta. Donec feugiat mi at justo. Phasellus facilisis ipsum quis ante. In ac elit eget ipsum pharetra faucibus. Maecenas viverra nulla in massa.

Nulla ac nisl. Nullam urna nulla, ullamcorper in, interdum sit amet, gravida ut, risus. Aenean ac enim. In luctus. Phasellus eu quam vitae turpis viverra pellentesque. Duis feugiat felis ut enim. Phasellus pharetra, sem id porttitor sodales, magna nunc aliquet nibh, nec blandit nisl mauris at pede. Suspendisse risus risus, lobortis eget, semper at, imperdiet sit amet, quam. Quisque scelerisque dapibus nibh. Nam enim. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nunc ut metus. Ut metus justo, auctor at, ultrices eu, sagittis ut, purus. Aliquam aliquam.

References

- [AC10] Sylvain Arlot and Alain Celisse. “Segmentation of the mean of heteroscedastic data via cross-validation”. In: *Statistics and Computing* 21 (2010), pp. 613–632. DOI: [10.1007/s11222-010-9196-x](https://doi.org/10.1007/s11222-010-9196-x). URL: <https://doi.org/10.1007/s11222-010-9196-x>.
- [AE06a] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis 1*. 3rd ed. Birkhäuser, 2006. ISBN: 978-3-7643-7755-7. DOI: [10.1007/978-3-7643-7756-4](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7756-4).
- [AE06b] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis 2*. 2nd ed. Birkhäuser, 2006. ISBN: 978-3-7643-7105-0. DOI: [10.1007/3-7643-7402-0](https://doi.org/10.1007/3-7643-7402-0).
- [Bra19] Peter Brass. *Advanced Data Structures*. 1st ed. Cambridge University Press, 2019. ISBN: 978-1-108-73551-3.
- [Fri+08] F. Friedrich et al. “Complexity Penalized M-Estimation. Fast Computation”. In: *Journal of Computational and Graphical Statistics* 17.1 (2008), pp. 201–224. DOI: [10.1198/106186008X285591](https://doi.org/10.1198/106186008X285591). eprint: <https://doi.org/10.1198/106186008X285591>. URL: <https://doi.org/10.1198/106186008X285591>.
- [GKP94] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*. 2nd ed. Pearson, 1994. ISBN: 978-0-201-55802-9.
- [HEF17] Kaylea Haynes, Idris A. Eckley, and Paul Fearnhead. “Computationally Efficient Changepoint Detection for a Range of Penalties”. In: *Journal of Computational and Graphical Statistics* 26.1 (2017), pp. 134–143. DOI: [10.1080/10618600.2015.1116445](https://doi.org/10.1080/10618600.2015.1116445). eprint: <https://doi.org/10.1080/10618600.2015.1116445>. URL: <https://doi.org/10.1080/10618600.2015.1116445>.
- [HSW15] Kilian Hohm, Martin Storath, and Andreas Weinmann. “An algorithmic framework for Mumford–Shah regularization of inverse problems in imaging”. In: *Inverse Problems* 31.11 (Oct. 2015), p. 115011. DOI: [10.1088/0266-5611/31/11/115011](https://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/31/11/115011). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/31/11/115011>.
- [Kir04] Donald E. Kirk. *Optimal Control Theory. An Introduction*. 13th ed. Dover Publications, 2004. ISBN: 978-0-486-43484-1.
- [Lan93] Serge Lang. *Real and Functional Analysis*. Ed. by S. Axler, F.W. Gehring, and P.R. Halmos. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1993. ISBN: 0-387-94001-4. DOI: [10.1007/978-1-4612-0897-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0897-6).

-
- [SKW19] Martin Storath, Lukas Kiefer, and Andreas Weinmann. “Smoothing for signals with discontinuities using higher order Mumford–Shah models”. In: *Numerische Mathematik* 143 (2019), pp. 423–460. DOI: [10.1007/s00211-019-01052-8](https://doi.org/10.1007/s00211-019-01052-8). URL: <https://doi.org/10.1007/s00211-019-01052-8>.
- [SWU17] Martin Storath, Andreas Weinmann, and Michael Unser. “Jump-penalized least absolute values estimation of scalar or circle-valued signals”. In: *Information and Inference: A Journal of the IMA* 6.3 (Jan. 2017), pp. 225–245. ISSN: 2049-8764. DOI: [10.1093/imaiai/iaw022](https://doi.org/10.1093/imaiai/iaw022). eprint: <https://academic.oup.com/imaiai/article-pdf/6/3/225/19686622/iaw022.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/imaiai/iaw022>.