**Fecha:** 05/09/2022

**Estudiantes:** Santiago Vargas (202113294) y Damián Cortina (202021134)

**Asignatura:** Métodos Computacionales 1

**Docente:** Manuel Alejandro Segura

**Entrega:** Taller 3

**Ejercicios 1 y 2 de la sección 1.9. Raíces de Polinomios**

1. ¿De qué tipo es el error asociado a la estimación de raíces usando el método de Newton-Raphson?

**Respuesta:** El método de Newton Raphson es de convergencia cuadrática. Por ende, cuando el error es menor o igual a 0.1, a cada iteración siguiente se le duplica (aproximadamente) el número de decimales exactos. Prácticamente se puede usar esta información para hacer una estimación aproximada del error mediante la siguiente fórmula:

$$\epsilon = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$$

Este error relativo por iteración permitirá detener el método cuando el error sea menor a la tolerancia, i.e, $\epsilon < 10^{-6}$.

2. ¿Cómo ajustar la precisión para estimar raíces con el método de Newton-Raphson?

**Respuesta:** En primera instancia, hay que tener en cuenta que el método de Newton-Raphson es un método que no garantiza convergencia absoluta. Para alcanzar dicha convergencia con cierto grado de confianza se requiere un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada, por ende, lo primero sería entender el comportamiento de la función y sus posibles puntos de inflexión, discontinuidad o "con picos" (donde la función no es ''suave'). En segundo lugar, se recomienda detener el algoritmo para cuando el error relativo supere la tolerancia del equipo de procesamiento, en la mayoría de los casos siendo $\epsilon < 10^{-6}$. Finalmente, se debe tener en cuenta el error por división entre cero que pude surgir del hecho de que tanto la función como su derivada (aproximada) se acercan a cero en la raíz, como expresa la siguiente fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Existen dos formas (demostradas) para solucionar dicho problema. La primera siendo la forma de Ralson y Rabinowitz (1978) que, basándose en el hecho de que la función $f(x_n)$ siempre alcanzará un valor cero antes que $f'(x_n)$. Ergo, comparar $f(x_n)$ durante cada iteración permitirá detener el programa antes que el denominador ( $f'(x_n)$) sea cero. Asimismo, la otra forma de evitar el error de truncamiento es reformular la ecuación utilizada por el algoritmo iterativamente. Una forma propuesta por Ralston y Rabinowitz (1978) es el siguiente cambio a la formulación para que se regrese a la convergencia cuadrática:

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Donde m es la multiplicidad de la raíz (es decir, m = 2 para una raíz doble, m = 3 para una raíz triple, etc.); sin embargo, esta alternativa es menos que ideal, pues depende del conocimiento de la multiplicidad de la raíz. Otra alternativa, también desarrollada por Ralston y Rabinowitz (1978), consiste en definir una nueva función u(x) que sea el cociente de la función original entre su derivada:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Se puede demostrar que esta función tiene raíces en las mismas posiciones que la función original. Por lo tanto, la ecuación se sustituye en la ecuación original de Newton-Raphson para desarrollar una forma alternativa del método:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

Se sustituyen las ecuaciones, con lo cual se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{\left[f'(x)\right]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

Estas alternativas ayudan a resolver el problema de truncamiento, es decir, cuando el error está cerca de exceder la tolerancia, lo cual resulta en datos sin valor práctico (errores de cálculo).

## REFERENCIAS

Vargas Cantero, Jose. (2018). *Método de Newton Raphson [PDF]*. Recuperado de: https://bit.ly/3TVzYye.

Segura, A. (2022). *Métodos Computacionales [PDF]*.