1) a) Con la información dada sabemos que:

$$f_{X_i}(x_i \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

* Como los x_i son disyuntos, su unión será la suma:

$$f(x_1, \dots, x_n \mid \mu, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

* Por ende, si se busca la verosimilitud logarítmica:

$$\ln(f(x_1, \dots, x_n \mid \mu, \sigma)) = -n \ln(\sqrt{2\pi}) - n\ln(\sigma) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

* Como $\ln(f(x_1, \dots, x_n \mid \mu, \sigma))$ es una función doble variada:

$$\frac{\partial \ln(f(x_1, \dots, x_n \mid \mu, \sigma))}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)}{\sigma}$$

* Igualamos a cero para hallar el máximo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)}{\sigma} = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mu \longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ es la ecuación para un promedio.

R/ $\mu = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

b) Para hallar el MLE de σ:

* Como $\ln(f(x_1, \dots, x_n | \mu, \sigma))$ es una función doble variada:

$$\frac{\partial \ln(f(x_1, \dots, x_n | \mu, \sigma))}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} - \frac{n}{\sigma}$$

* Igualamos a cero para hallar el máximo:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} - \frac{n}{\sigma} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} = \frac{n}{\sigma} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = n\,\sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

* De a) se sabe que $\mu = \bar{x}$:

R/ $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$