1) Sean $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ dos medidas de probabilidad. Definamos $\mathbb{P} = a_1\mathbb{P}_1 + a_2\mathbb{P}_2$, donde $a_1 + a_2 = 1$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$.
¿Es $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad?

Al ser $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ medidas de probabilidad, tanto $\mathbb{P}_1$ como $\mathbb{P}_2$ cumplen que:

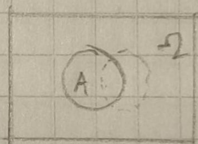
1 $\mathbb{P}(A) \geq 0$

2 Si A y B son compatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3 $P(\Omega) = 1$

Al ser $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ medidas de probabilidad, se pueden sumar al ser lineales, a_1 y a_2 no afectarán debido a que su suma es 1 como dice el enunciado.

3) $P(A \cup \phi) \overset{3}{=} P(\Omega) = 1$

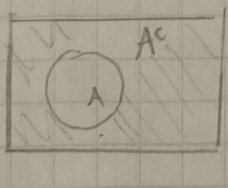


2 $P(A) + P(\phi) = 1$

Sea $P(A) = 1$, $P(\phi) \geq 0$ 1

Eso implica que $P(\phi) = 0$

b) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - P(A)$

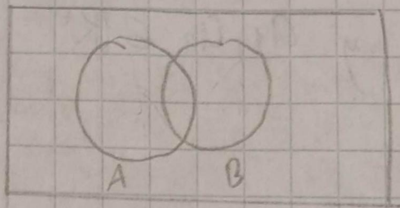


Si $\overbrace{\mathbb{P}(A) + P(A^c)}^{P(\Omega)=1} = 1$ 3

$= P(A \cup A^c) = 1$ 2

$\therefore P(A^c) = 1 - P(A)$

f) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$



$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$

$P(A) + P(B) = P(A \cup B)$?

$P(A-B) + \underline{P(A \cap B)} + P(B-A) + \underline{P(A \cap B)} = P(A \cup B)$

$P(A) + P(B) = \underbrace{P(A-B) + P(A \cap B) + P(B-A)}_{P(A \cup B)} + P(A \cap B)$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$