



Пробный региональный этап
Всероссийской Олимпиады Школьников
по экономике
Ответы и решения.

9–10 декабря 2023 года

Максимальное количество баллов за олимпиаду — **100**.

Чтобы не пропускать новости о предстоящих событиях, подписывайтесь на [телеграмм-канал ВЭШ](#), а также сообщества [ВЭШ](#) и [Олимпиа](#) ВК! Присоединяйтесь к [интенсиву](#) для подготовки к региональному этапу ВсОШ и заключительным этапам перечневых олимпиад.

Часть 1

Первая часть олимпиады включает **5 вопросов**, в каждом из которых среди четырех вариантов нужно выбрать единственный верный или наиболее полный ответ. Правильный ответ на каждый вопрос оценивается в **2 балла**.

1. Выберите верное утверждение в рамках модели AD-AS:

- 1) Монетарная экспансия центрального банка всегда приводит к инфляции;
- 2) Уменьшение налогов приводит к возникновению рецессионного разрыва выпуска;
- 3) В случае рецессионного разрыва выпуска увеличение центральным банком денежной массы может привести экономику в долгосрочное равновесие;
- 4) Изменение ключевой ставки ЦБ не влияет на кривую AD.

Ответ: 3

Комментарий. В случае снижения совокупного спроса, центральный банк, расширяя денежную массу, может вновь повысить его, из-за чего экономика может вернуться в долгосрочное равновесие.

2. Страна Абандидя состоит из двух регионов: А и Б. В регионе А кривая Лоренца задается функцией $Y = X^2$. В регионе Б из-за последних изменений в системе налогообложения сложилось абсолютное равенство. Численность населения и суммарные доходы в двух регионах равны. Определите, какую долю от дохода всех жителей страны получают 30% богатейших людей Абандидии.

- 1) 0,175; 2) 0,425; 3) 0,575; 4) 0,58.

Ответ: 2

Комментарий. В силу того, доходы и численности населения в регионах равны, кривая Лоренца всей страны будет состоять из трёх участков, средний из которых (на участке $X \in [0,25; 0,75]$) является отрезком с наклоном 1, а два крайних — частью параболы. Пусть $Y(X)$ — функция, описывающая кривую Лоренца страны. Кроме стандартных, должны выполняться следующие условия: $Y'(0) = 0, Y'(0,25) = Y'(0,75) = 1, Y(0,75) - Y(0,25) = 0,5$. Подходящая функция имеет вид

$$Y = \begin{cases} 2X^2, & X \in (0; 0,25) \\ X - 0,125, & X \in [0,25; 0,75] \\ 2X^2 - 2X + 1, & X \in (0,75; 1) \end{cases}$$

Для получения ответа $1 - Y(0,7) = 0,425$ достаточно было найти выражение для второго участка, подобрав коэффициент для первого участка.

3. На монопольном рынке спрос предъявляют две группы потребителей, обратные функции спроса которых имеют вид $P_1^d = 360 - 4Q_1$ и $P_2^d = 320 - 2Q_2$. Монополист осуществляет дискриминацию третьего рода

(может назначать разные цены для разных групп потребителей). Цены, которые назначит монополист для двух групп, могут быть равны соответственно:

1) $P_1 = 50, P_2 = 30$;

2) $P_1 = 230, P_2 = 242$;

3) $P_1 = 240, P_2 = 220$;

4) $P_1 = 318, P_2 = 204$.

Ответ: 3

Комментарий. Так как в каждом из предложенных вариантов обе группы покупают положительное количество товаров, должно выполняться равенство $MR_1(Q_1) = MR_2(Q_2)$, иначе монополист может перераспределить объём продаж между группами и увеличить выручку при неизменных издержках. Приравнявая функции MR и подставляя зависимость количеств в цены, получаем $P_1 = P_2 + 20$. Подходят варианты 1 и 3, но в первом варианте спрос каждой из групп неэластичен, а монополист не работает на неэластичных участках спроса.

4. Численность рабочей силы в экономике неизменна. Ежегодно каждый десятый работник теряет рабочее место, а $X\%$ безработных находят работу. Естественный уровень безработицы равен 10%. Определите значение X

1) 90;

2) 70;

3) 60;

4) 40.

Ответ: 1

Комментарий. В долгосрочном равновесии уровень безработицы равен естественному, а количество безработных неизменно от года к году.

$$0,1E - \frac{X}{100}U = 0, \frac{U}{U(1+\frac{X}{100})} = \frac{1}{10} \Rightarrow X = 90$$

5. КПВ страны описывается уравнением $y = 4 - x^2$, а отношение цен товаров на мировом рынке сложилось на уровне $\frac{P_y}{P_x} = \frac{1}{2}$; страна воспринимает мировые цены как заданные. Государство запретило импортировать более 2 единиц товара x . Определите максимальный объём товара y , доступный стране в ходе производства и торговли.

1) 4;

2) 3;

3) 5;

4) 7.

Ответ: 3

Комментарий. КТВ страны касается КПВ в точке x_0 , где $-y'(x_0) = \frac{P_x}{P_y}$, откуда $x_0 = 1$. Так как ограничений на экспорт x и импорт y нет, то ответом является координата пересечения КТВ и оси y .

Часть 2

Вторая часть олимпиады включает **5 вопросов**, в каждом из которых среди четырех вариантов нужно выбрать все верные. Правильным ответом считается полное совпадение выбранного множества вариантов с ключом. Правильный ответ на каждый вопрос оценивается в **3 балла**.

6. К каким областям экономической науки можно отнести исследование, за которое Клаудии Голдин была присуждена Нобелевская премия по экономике (Премия Шведского государственного банка по экономическим наукам памяти Альфреда Нобеля) в 2023 году?

- 1) Влияние санкций на экономическое развитие стран;
- 2) Экономическая история;
- 3) Причины гендерного неравенства на рынке труда;
- 4) Оптимальные схемы налогообложения.

Ответ: 23

Комментарий. Клаудия Голдин — лауреат Нобелевской премии по экономике за исследование проблематики гендерного неравенства на рынке труда, тем не менее, её работы можно также отнести к области экономической истории.

7. Какие из следующих показателей характеризуют уровень неравенства распределения доходов в стране?

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| 1) Децильный коэффициент; | 2) Индекс Джини; |
| 3) ВВП на душу населения; | 4) Индекс Робин Гуда. |

Ответ: 124

Комментарий. Все показатели, кроме ВВП на душу населения напрямую измеряют уровень неравенства. ВВП на душу населения может быть использован для сравнения разных регионов и измерения неравенства между ними, но не измеряет неравенство напрямую.

8. Предельные издержки производства некоторого товара постоянны и равны 1, но для производства положительного объёма продукции необходимо оплатить лицензионный сбор в размере $C > 0$. Спрос на данный товар задаётся функцией $Q = 10 - P$. На этом рынке две фирмы, стремясь максимизировать прибыль, одновременно и независимо выбирают цену своей продукции, по которой потребители смогут купить у них неограниченное количество товара. Все покупатели покупают товар у той фирмы, которая назначила меньшую цену. В случае равенства цен покупатели делятся между фирмами поровну. Выберите верные утверждения о данном рынке:

- 1) Если $C = 0$, то ситуация, при которой обе фирмы назначают одинаковые цены, равные 1, и получают нулевую прибыль, является равновесной;
- 2) Если $C = 4$, то ситуация, при которой обе фирмы назначают одинаковые цены, равные 2, и получают нулевую прибыль, является равновесной;
- 3) Если $C > 40,5$, то ситуации, при которых обе фирмы производят положительный объём продукции, не являются равновесными;
- 4) При любом значении C , если первая фирма назначила цену, равную единице, а вторая фирма назначила цену $p_2 > 5,5$, то первой фирме выгоднее назначить цену $p_1 = 5,5$.

Ответ: 134

Комментарий. Первый вариант ответа является классическим примером равновесия в модели Бертрана.

В случае, если $C = 4$, и фирмы назначают цены 2, одной фирме выгодно отклониться, назначив цену ниже 2, но выше 1, тогда все покупатели переключатся на её товар, и она получит большую прибыль, поэтому данная ситуация не является равновесной.

Суммарная прибыль фирм на рынке без учёта лицензионного сбора

не может превышать максимальный размер излишка потребителей, равный 40,5. Если $C > 40,5$, и фирмы назначили цены меньше 10, то они будут получать отрицательную прибыль. Но они могут отклониться, назначив цены больше 10 и получать нулевую прибыль.

Так как цена $p = 5,5$ является монопольной, то прибыль при данной цене выше, чем при цене, равной 1.

9. На монопольном рынке государство максимизирует налоговые сборы, используя либо налог в процентах от цены покупателя, либо налог в процентах от цены производителя, либо потоварный налог. Известно также, что $MC'(q) > 0$, $MR'(q) < 0$, $P'(q) < 0$, при этом в отсутствие вмешательства монополист получает положительную прибыль. Выберите верные утверждения о данной ситуации:

- 1) Равновесный объём не зависит от того, какой вид налога выберет государство;
- 2) Если спрос описывается функцией $Q = \frac{15}{p^2}$, то налоговые сборы при введении процентного налога в процентах от цены производителя равны налоговым сборам в процентах от цены покупателя и в два раза больше налоговых сборов при потоварном налоге;
- 3) Утверждение из предыдущего варианта может быть как верным, так и неверным, в зависимости от функции издержек;
- 4) Наибольшие налоговые сборы достигаются при потоварном налоге.

Ответ: 2

Комментарий. На монопольном рынке оптимальный объём и максимальные налоговые сборы зависят от того, какой вид налога выберет государство. В отличие от рынка совершенной конкуренции, где выполняется принцип эквивалентности налогов, в монополии в общем случае он не выполняется. В случае, если спрос обладает постоянной эластичностью, то эквивалентность выполняется частично: оптимальные объёмы производства при максимизации налоговых сборов не зависят от вида налога, а максимальная величина налоговых сборов при процентных налогах больше максимальных налоговых сборов при потоварном налоге

в $\frac{P}{MR} = \frac{E_p^d}{E_p^d + 1}$ раз. Данный факт не зависит от вида функции издержек, его можно показать, выписав функцию налоговых сборов в зависимости от объёма производства для разных видов налога.

10. На финансовом рынке торгуется облигация с ежегодными фиксированными купонными выплатами в виде доли от номинала облигации и определенным сроком погашения. Выберите все верные утверждения относительно рыночной стоимости данной облигации:

- 1) Цена облигации станет выше в случае понижения ставки процента.
- 2) Предположим, Вы приобрели акцию за 3 года до срока погашения. Если Вы решите продать имеющуюся облигацию через год, получив одну купонную выплату, то стоимость облигации через год будет ниже.
- 3) При прочих равных, в случае увеличения купонных выплат, цена облигации вырастет.
- 4) Цена данной облигации может оказаться ниже её номинала.

Ответ: 134

Комментарий. Стоимость облигации равна приведенной стоимости всех денежных потоков. В данном случае $PV = \frac{cF}{1+r} + \frac{cF}{(1+r)^2} + \frac{cF}{(1+r)^3} + \dots + \frac{cF+F}{(1+r)^n}$, где F - номинал, c - доля от номинала, n - количество лет до момента выплаты номинала.

- 1) Верно, так как в PV для каждого слагаемого знаменатель уменьшается.
- 2) Неверно. Цена в момент 3 лет до погашения равна $\frac{cF}{1+r} + \frac{cF}{(1+r)^2} + \frac{cF+F}{(1+r)^3}$. Через год цена станет $\frac{cF}{1+r} + \frac{cF+F}{(1+r)^2}$. Цена могла как вырасти, так и упасть, так как слагаемых стало меньше, но степень в знаменателях понизилась на 1.
- 3) Верно, см. формулу для подсчета цены.
- 4) Верно. Цена облигации зависит от купонных выплат и срока погашения. При маленьких купонных выплатах и большом сроке погашения цена облигации может быть ниже номинала.

Часть 3

Третья часть олимпиады включает **5 вопросов** с открытым ответом. Если задание предполагает численный ответ, нужно записать его **без указания единиц измерения**. Правильный ответ на каждый вопрос оценивается в **3 балла**.

11. На валютном рынке торгуются рубли и доллары. Спрос на доллары описывается функцией $D = 21 - E$, где E — цена доллара в рублях, D — объём долларов; а функция спроса на рубли имеет вид $R = 10 - \varepsilon$, где ε — цена рубля в долларах, R — объём рублей. Определите цену доллара в рублях в равновесии.

Ответ: –

Комментарий. Так как $\varepsilon = \frac{1}{E}$, то предложение долларов имеет вид $\frac{1}{E} \cdot R(\frac{1}{E})$. Равновесие находится из уравнения $21 - E = \frac{1}{E}(10 - \frac{1}{E})$. Данное уравнение имеет несколько иррациональных корней, в связи с чем жюри приняли решение о выставлении за это задание 3 баллов всем участникам олимпиады.

От многих участников мы получили ответ 2, получаемый путём домножения спроса на рубли на E для получения предложения долларов, но для получения количества долларов из количества рублей необходимо разделить количество рублей на обратный курс рубля.

12. Спрос и предложение мандаринов внутри страны линейны. Страна импортирует мандарины из-за рубежа. Страна настолько мала, что не может повлиять на мировую цену мандаринов. Известно, что в отсутствие международной торговли внутренняя равновесная цена мандаринов в стране была бы на 40 выше мировой цены. Объём импорта без вмешательства государства составляет 100. Без вмешательства внутренние производители предлагают положительное количество товара. Определите максимальные налоговые сборы при введении потоварного налога на импорт.

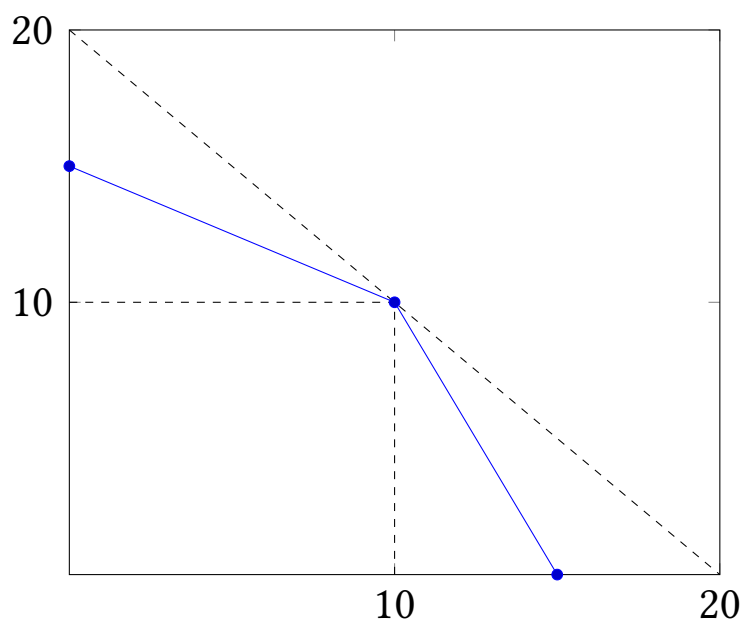
Ответ: 1000

Комментарий. В данной ситуации налоговые сборы равны площади прямоугольника, вписанного в треугольник с основанием, равным объёму импорта без вмешательства, и высотой, равной разнице между ценой в закрытой экономике и мировой ценой. Известно, что площадь прямоугольника, вписанного в треугольник максимальна, если прямоугольник опирается на среднюю линию треугольника. В таком случае объём импорта составит 50, а величина налога составит 20.

13. В некоторой прикольной стране производятся всего два товара: анекдоты и шутейки, причём производить их умеют только два приколиста. КПВ первого из приколистов задается функцией $y = 10 - \alpha x$, а второго: $y = \frac{10-x}{\alpha}$. В стране всё потребляется в пропорции 1 : 1, в том числе и анекдоты с шутейками. Найдите значение точечной эластичности количества потребленных комплектов из одной шутейки и одного анекдота по α при $\alpha = 4$.

Ответ: 0

Комментарий. Суммарная КПВ при случае, когда $\alpha \geq 1$ будет иметь вид:



где точка пересечения с двумя осями координат одинакова и равна $10 + \frac{10}{a}$, поэтому при любом a количество комплектов будет одинаковым и равным 10, а следовательно эластичность равна 0.

14. Некая компания умных и крутых студентов рассматривает создание двух разных проектов. В первый необходимо инвестировать сумму X на протяжении 3 лет, то есть сейчас, потом через год и еще через год, а со следующего года проект будет каждый год до бесконечности приносить одинаковую сумму X . Во второй нужно сейчас вложить 3641 рубля, и через 3 года друзья получат сумму в целых 14641 рубль. Найдите при каком наименьшем X друзья выберут первый проект, если ставка дисконтирования составляет 10%.

Ответ: 1331

Комментарий. Рассчитаем приведенную стоимость второго проекта:

$$NPV_2 = -3241 + \frac{14641}{1.1^3} = 7759$$

тогда NPV_1 должна быть больше или равна данному числу, следовательно:

$$NPV_1 = -X - \frac{X}{1.1} - \frac{X}{1.21} + \frac{X}{1.331} \dots,$$

заметим, что можно свести к красивой геометрической прогрессии:

$$NPV_1 = 2(-X - \frac{X}{1.1} - \frac{X}{1.21}) + X + \frac{X}{1.1} + \frac{X}{1.21} + \frac{X}{1.331} = 2(-X - \frac{X}{1.1} - \frac{X}{1.21}) + \frac{X}{1 - \frac{1}{1.1}}$$

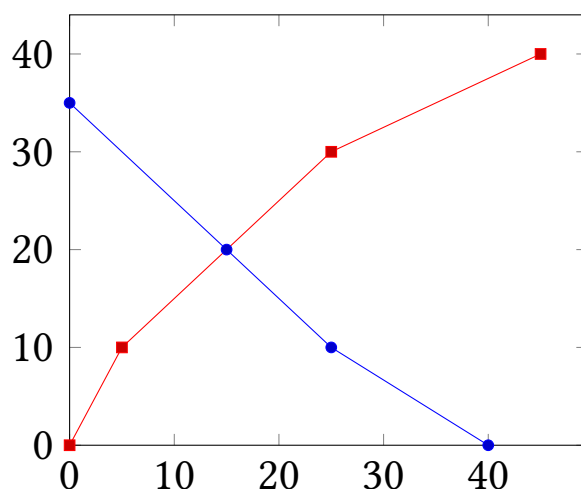
и, используя данное выражение, подставленное в $NPV_1 \geq NPV_2$, получим значение $X = 1331$

15. Один чудной монополист решил, что ему слишком просто жить на свете и решил завести себе 3 завода и 3 группы спроса, которые он может дискриминировать между собой по ценам. На первом заводе издержки имеют вид $TC_1 = Q_1^2$, на втором $TC_2 = Q_2^2$, но за каждую произведенную единицу на данном заводе надо отдавать штраф в размере 10 бублей, на третьем же – $TC_3 = 0.5 \cdot Q^2$, но за каждую единицу тоже нужно платить

штраф, но теперь 30 бублей. Спросы групп имеют следующий вид: $Q_1^d = 50 - P$, $Q_2^d = 20 - P$, $Q_3^d = 10 - P$. Найдите максимальную прибыль, которую может получить монополист в таких условиях.

Ответ: 350

Комментарий. Самый быстрый способ решения здесь – это горизонтальное сложение и MC и MR , как спрос и предложение, здесь все MC возрастают, и MR убывают, поэтому суммарная картина будет иметь вид:



получаем, что пересечение будет ровно в переломе MR , и для нахождения прибыли можно рассчитать площадь фигуры слева между MC и MR , она равна 350.

Часть 4

Четвёртая часть олимпиады включает **3 задачи**, предполагающих развёрнутый ответ. Полное решение каждой задачи оценивается в **20 баллов**.

Излагайте свои мысли четко, пишите разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта **а)** можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения в вашем решении должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все не общеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное. Прежде чем задать вопрос по условию, перечитайте его ещё раз.

Задача 1. «Налоги».

(20 баллов)

Фирмы «Сава» и «Ступак» работают на совершенно конкурентном рынке, цена на котором установилась на уровне $P = 18$. Известно, что функция издержек «Савы» имеет вид $ТС_1 = q_1^2 + 4q_1$, а функция издержек «Ступака» — $ТС_2 = 2q_2^2 + 2q_2$. Государство может облагать налогами только эти две фирмы.

а) (2 балла) Выведите функцию предложения каждой из фирм. Сколько продукции они хотят продавать при сложившейся цене?

б) (4 балла) Государство решило ввести единый аккордный налог

на обе фирмы: каждая фирма, производящая положительное количество товара, должна выплатить государству T денежных единиц вне зависимости от объёма производства. Какую ставку аккордного налога T выберет государство, если оно максимизирует сумму налоговых сборов?

в) (4 балла) Государство решило обложить каждую из фирм единым потоварным налогом, максимизирующим налоговые сборы. Найдите, какую ставку t выберет государство.

г) (10 баллов) Государство решило ввести одновременно два единых налога: потоварный и аккордный. Какой набор (t, T) будет максимизировать налоговые сборы?

Илья Антонов

Решение.

а) Выпишем функцию прибыли первой фирмы: $\pi_1 = 18q_1 - q_1^2 - 4q_1 \rightarrow \max_{q_1}$. Парабола ветвями вниз - максимум в вершине. Получаем отсюда, что $q_1 = 7$ (**+1 балл за верное количество**). Аналогично со второй фирмой: $\pi_2 = 18q_2 - 2q_2^2 - 2q_2 \rightarrow \max_{q_2}$ (**+1 балл за верное количество**). Парабола ветвями вниз - максимум в вершине. Отсюда получаем, что $q_2 = 4$.

б) Заметим, что подставив в прибыли оптимальные количества из пункта (а), получим, что $\pi_1^* = 49$ и $\pi_2 = 32$ (**+1 балл за значение прибылей**). Очевидно, что государству выгоднее забирать с фирм максимальную прибыль (**+1 балл за идею**). Тогда доступны две опции: а) собрать аккордный налог в размере 49 единиц с первой фирмы, а вторая фирма просто не сможет выйти на рынок ; б) собрать аккордный налог в размере 32 единиц с двух фирм. Понятно, что установив ставку в 32 единицы суммарные налоговые сборы будут равны 64, что больше 49. Ответ: $T^* = 32$ и $Tx = 64$ (**+1 балл за верный ответ**).

в) Теперь нужно найти предложение фирм в случае введения пото-

варного налога по ставке t .

Для первой фирмы: $\pi_1 = 18q_1 - q_1^2 - 4q_1 - tq_1 \rightarrow \max$. Парабола ветвями вниз - максимум в вершине. Отсюда $q_1^*(t) = \frac{14-t}{2}$. **(+1 балл за зависимость количества от налога)**

Для второй фирмы: $\pi_2 = 18q_2 - 2q_2^2 - 2q_2 - tq_2 \rightarrow \max$. Парабола ветвями вниз - максимум в вершине. Отсюда $q_2(t)^* = \frac{16-t}{4}$. **(+1 балл за зависимость количества от налога)**

Очевидно, первая фирма будет производить нулевое количество при $t \geq 14$, а вторая - при $t \geq 16$. Тогда получаем два случая **(+1 балл за оптимизационную задачу)**:

$$Tx(t) = \begin{cases} t \left(\frac{14-t}{2} + \frac{16-t}{4} \right); & 0 \leq t \leq 14 \\ t \left(\frac{16-t}{2} \right); & 14 \leq t \leq 16; \end{cases}$$

В двух случаях имеем параболу ветвями вниз. Получаем два оптимума: $t = 22/3$ и $t = 8$. Замечаем, что случай $t = 8$ не удовлетворяет условию $t \in [14, 16]$. Получаем, что $t^* = 22/3$ **(+1 балл за верную ставку налога)**.

г) Заметим, что теперь государство может вводить аккордный налог в дополнение к потоварному. Теперь прибыли фирм зависят от потоварного налога. Вспомним количества из пункта (В), подставим их в прибыль и найдем зависимости прибылей от потоварного налога:

$$\begin{cases} \pi_1(t) = \frac{(14-t)^2}{4} \\ \pi_2(t) = \frac{(16-t)^2}{8} \end{cases}$$

Равенство прибылей выполняется при $t = \frac{14\sqrt{2}-16}{\sqrt{2}-1} = t_p$. Пока что запомним это число. Очевидно, что при $t < t_p$ получаем $\pi_1(t) > \pi_2(t)$ и наоборот. Вспомним, что в оптимуме $T^* = \pi(t)$. **(+1 балл за идею и пере-**

ходную точку) Теперь запишем функцию совокупных налоговых сборов, но не будем обращать внимание на ограничения - просто без ограничения общности рассмотрим все возможные случаи (**+2 балла за идею оптимизационной задачи**):

1. два случая, когда на рынке остается две фирмы, а аккордный налог взимается по прибыли фирмы с меньшей прибылью;
2. еще два случая, когда на рынке остается только одна фирма, а аккордный налог равен прибыли этой фирмы

$$Tx = \begin{cases} t \left(\frac{14-t}{2} + \frac{16-t}{4} \right) + \frac{(14-t)^2}{2} \\ t \left(\frac{14-t}{2} + \frac{16-t}{4} \right) + \frac{(16-t)^2}{4} \\ t \frac{14-t}{2} + \frac{(14-t)^2}{4} \\ t \frac{16-t}{4} + \frac{(16-t)^2}{8} \end{cases}$$

(**+2 балла за оптимизационную задачу**). Теперь заметим, что нижние функции - это сумма потоварных сборов и аккордных для одной только фирмы. Так как потоварный налог — искажающий, то PS для одной фирмы существенно падает с ростом t , а значит, достаточно поставить $t = 0$ и $T = \pi(t)$. Тогда мы получаем случаи из предыдущего пункта - налоговые сборы 32 и 49, а в оптимуме 64 и 49.

Тогда необходимо смотреть лишь на верхние две функции. Промаксимизировав верхнюю функцию — получаем, что ее оптимум находится в $t = -6$, а значит, мы фактически платим субсидию. Теперь вспомним про t_p и получим, что мы находимся вне ограничения (мы собираем такой аккордный налог, который не может себе позволить вторая фирма). Значит оптимальный налог для первого случая — это $t = t_p$.

Промаксимизировав вторую функцию получим $t = 3$ и $Tx = 68,5$. Аккордная налоговая ставка доступна для всех фирм ($t < t_p$ на верном про-

межутке). Заметим, что ставка $t = t_p$ нам тоже доступна в таком случае, но у нас есть другая более оптимальная. Значит, на самом деле, $t^* = 3$ (**+4 балла за разбор случаев**). Тогда $T = 21,25$ и общие налоговые сборы $Tx = 68,5$. Это и есть наш ответ (**+1 балл за верный ответ**).

Задача 2. Песнь Ланистеров и Старков

Многие из вас слышали про вселенную, которую создал Джордж Мартин в своей книге «Песнь Льда и Пламени». Сегодня мы предлагаем посмотреть на экономическое устройство данного мира - Вестероса. Пусть существуют лишь две страны - Утес Кастерли, в котором проживают Ланнистеры, и Королевство Севера, в котором проживают Старки. Помимо двух правящих семей в Вестеросе проживают самые обычные рабочие, которые могут путешествовать между странами и переезжают жить в то государство, в **котором средний доход больше** в надежде на лучшую жизнь (*при этом их не волнует, какую заработную плату они будут получать, средний доход страны превышает всего*). Каждый рабочий в Королевстве Севера зарабатывает 20 золотых драконов, а в Утесе Кастерли - 10.

В семье Старков всего 10 человек и кривая дохода среди них имеет вид:

$$w(n) = 50 + 8n,$$

где n - номер жителя, а w - его заработок, выраженный в золотых драконах

Семья Ланнистеров в свою очередь побогаче и побольше, она состоит из 20-ти человек и её кривая дохода имеет вид:

$$w(n) = 50 + 16n$$

Обычных рабочих в Вестеросе проживает 120 человек. Для простоты будем считать, что все люди в этой задаче бесконечно делимы

а) (7 баллов) В Вестеросе сложилась такая ситуация, что никакой

рабочий не хочет переезжать из страны, в которой он сейчас живет. Сколько обычных рабочих проживает в каждой стране?

б) (13 баллов) Одному миротворцу Тириону надоело, что страны враждуют, и он решил наладить их отношения. В одной книге по экономике он прочитал, что значительное неравенство в распределении доходов в стране может быть причиной социального расслоения и последующих конфликтов. Для борьбы с неравенством он решил объединить две страны и распределить в них доход равномерно между всеми жителями. Какую минимальную долю дохода ему необходимо перераспределить, чтобы достичь своей цели?

Иван Ступак

Решение.

а) Так как никакой рабочий не хочет переезжать из страны, в которой он сейчас живет, то средние доходы в этих странах равны. **(+2 балла)**

Суммарный доход всей семьи Старков - площадь фигуры под графиком их кривой дохода, она представляет из себя трапецию, следовательно

$$I_s = \frac{50 + (50 + 8 \cdot 10)}{2} \cdot 10 = 900 \text{ (+2 балла)}$$

Суммарный доход всей семьи Ланнистеров - площадь под фигуры графиком их кривой дохода, она представляет из себя трапецию, следовательно

$$I_s = \frac{50 + (50 + 16 \cdot 20)}{2} \cdot 20 = 4200 \text{ (+2 балла)}$$

Предположим, что на Север приехало N_1 обычных рабочих, а в Утес Кастерли - N_2 . Заметим, что имеет место система:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = 120 \\ \frac{900 + 20N_1}{10 + N_1} = \frac{4200 + 10N_2}{20 + N_2} \end{cases} \Rightarrow N_1 = 20, N_2 = 100 \text{ (+1 балл)}$$

Многие участники допустили следующую ошибку: посчитали людей

целочисленными и смотрели доход в точке. Когда кривая дохода непрерывная - это является ошибкой. За такое решение ставилось 3 балла.

б) Суммарный доход в двух странах: $I = 4200 + 900 + 100 \cdot 10 + 20 \cdot 10 = 6500$

Так как необходимо, чтобы каждый человек получал одинаковую заработную плату, то $w = \frac{I}{N} = \frac{6500}{150} = \frac{130}{3}$. Заметим, что $20 < w < 50 \Rightarrow$ надо забирать деньги у семьи Старков и Ланнистеров и отдавать обычным рабочим. **(+7 баллов)**

Чтобы у обычных рабочих на Севере зарплата стала равна $\frac{130}{3}$, для этого нужно забрать у правящих семей $20(\frac{130}{3} - 20) = \frac{1400}{3}$ **(+2 балла)**

Чтобы у обычных рабочих в Утесе зарплата стала равна $\frac{130}{3}$, для этого нужно забрать у правящих семей $100(\frac{130}{3} - 10) = \frac{10000}{3}$ **(+2 балла)**

Соответственно суммарно необходимо перераспределить $\frac{10000}{3} + \frac{1400}{3} = 3800 \Rightarrow$ необходимая доля для перераспределения доходов: $\frac{3800}{6500} = \frac{38}{65}$ **(+2 балла)**

Задача 3. Дайте четыре!

Страна NES занимается производством биологически активных элементов (БАЭ) и магически активных элементов (МАЭ). У NES есть доступ к мировому рынку, где можно покупать и продавать БАЭ и МАЭ; страна воспринимает мировые цены как заданные. Известно, что БАЭ в 10 раз дороже МАЭ. КПВ страны задается как $y = 64 - x^2$, где x - БАЭ, y - МАЭ.

а) (4 балла) Постройте КТВ страны NES и запишите её функцию аналитически.

б) (8 баллов) Правительство питает необъяснимую любовь к БАЭ, поэтому решает простимулировать импорт БАЭ при помощи следующей акции: при покупке любого количества БАЭ государство из запасов выделяет импортерам дополнительно четверть приобретенного количества БАЭ бесплатно. Единственное условие акции – дополни-

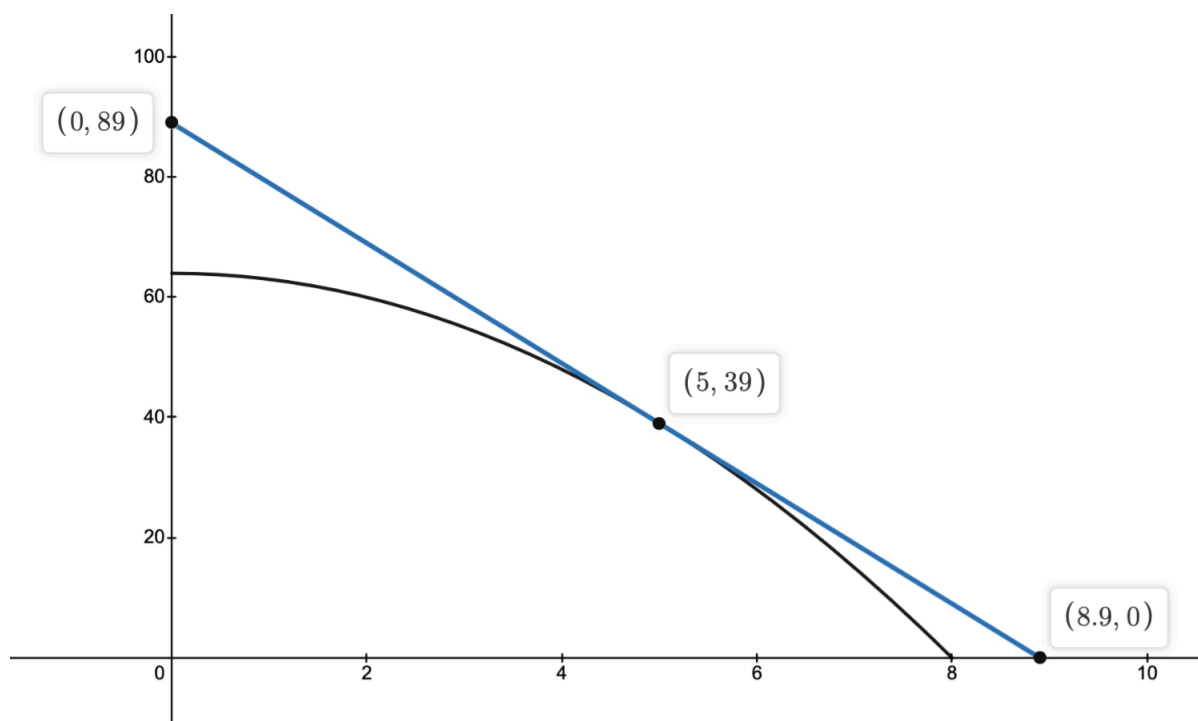
тельные единицы БАЭ нельзя продать на внешнем рынке. Постройте новую КТВ страны и запишите ее функцию аналитически.

в) (8 баллов) Жители страны коллективно потребляют БАЭ и МАЭ. Их общая функция полезности задается как $U(x,y) = x^4 \cdot y$. Определите, какое количество БАЭ и МАЭ будет потреблено в стране в условиях акции.

Вова Лаврентьев

Решение.

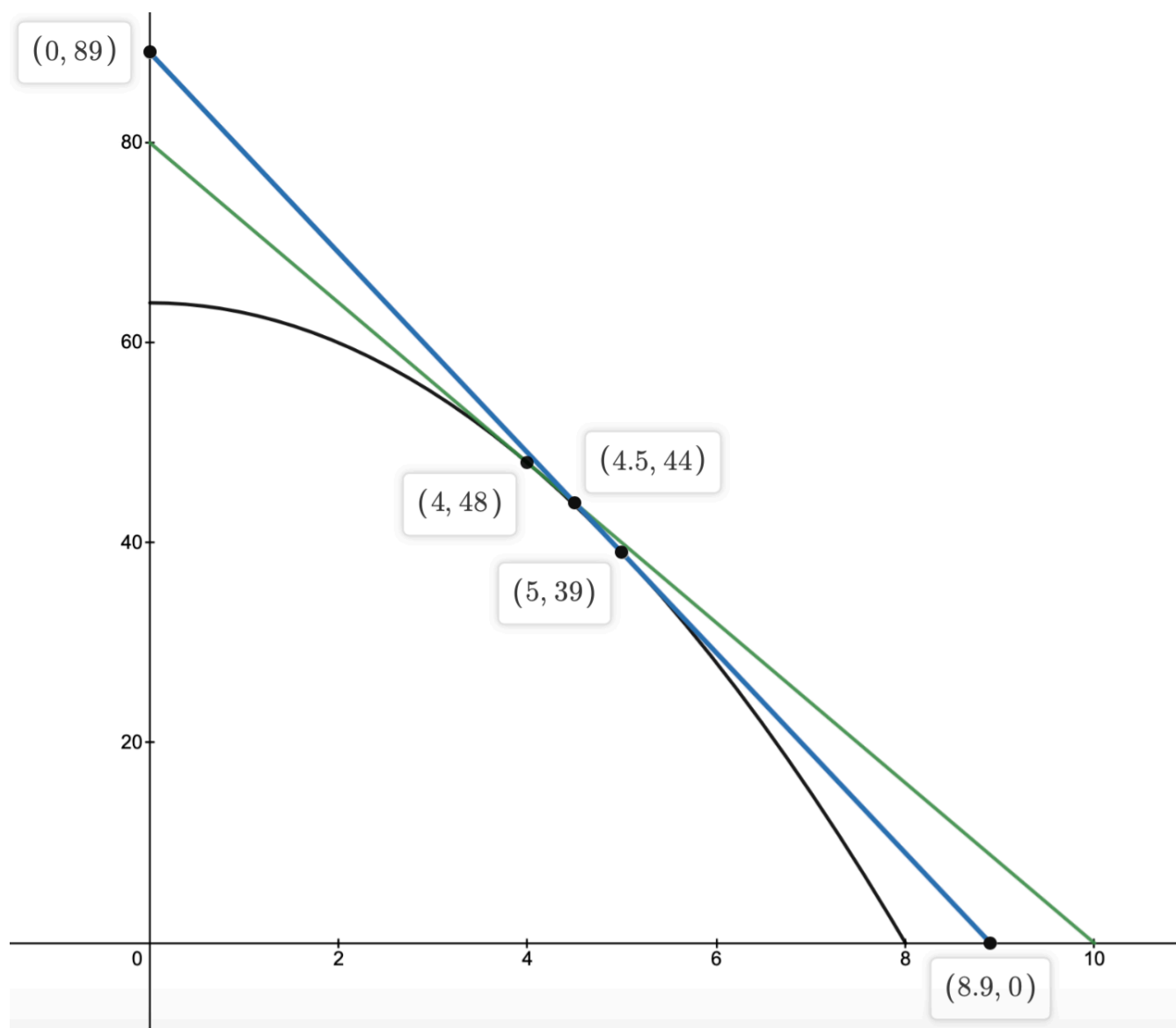
а) Необходимо найти точку на КПВ, дающую максимальную выручку при торговле, а значит наибольшее множество доступных точек при торговле. Прямую с наклоном $\frac{P_x}{P_y}$ будем двигать как можно дальше от начала координат, увеличивая таким образом выручку. КПВ выпукла вверх, в оптимуме NES будет производить объемы товаров, соответствующие координатам точки касания КПВ и прямой с наклоном $\frac{P_x}{P_y}$. Наклон касательной к КПВ в точке x_0 равен $-OC_x(x_0) = y'(x) = -2x_0$. В искомой точке $OC_x(x_0) = \frac{P_x}{P_y}$. **(+1 балл за обоснование).** $\frac{P_x}{P_y} = 10 = 2x_0 \Rightarrow x = 5, y = 64 - 25 = 39$ — оптимальный объем внутреннего производства **(+1 балл)**.
Уравнение КТВ: $y = 89 - 10x$ **(+1 балл)**



(+1 балл за график)

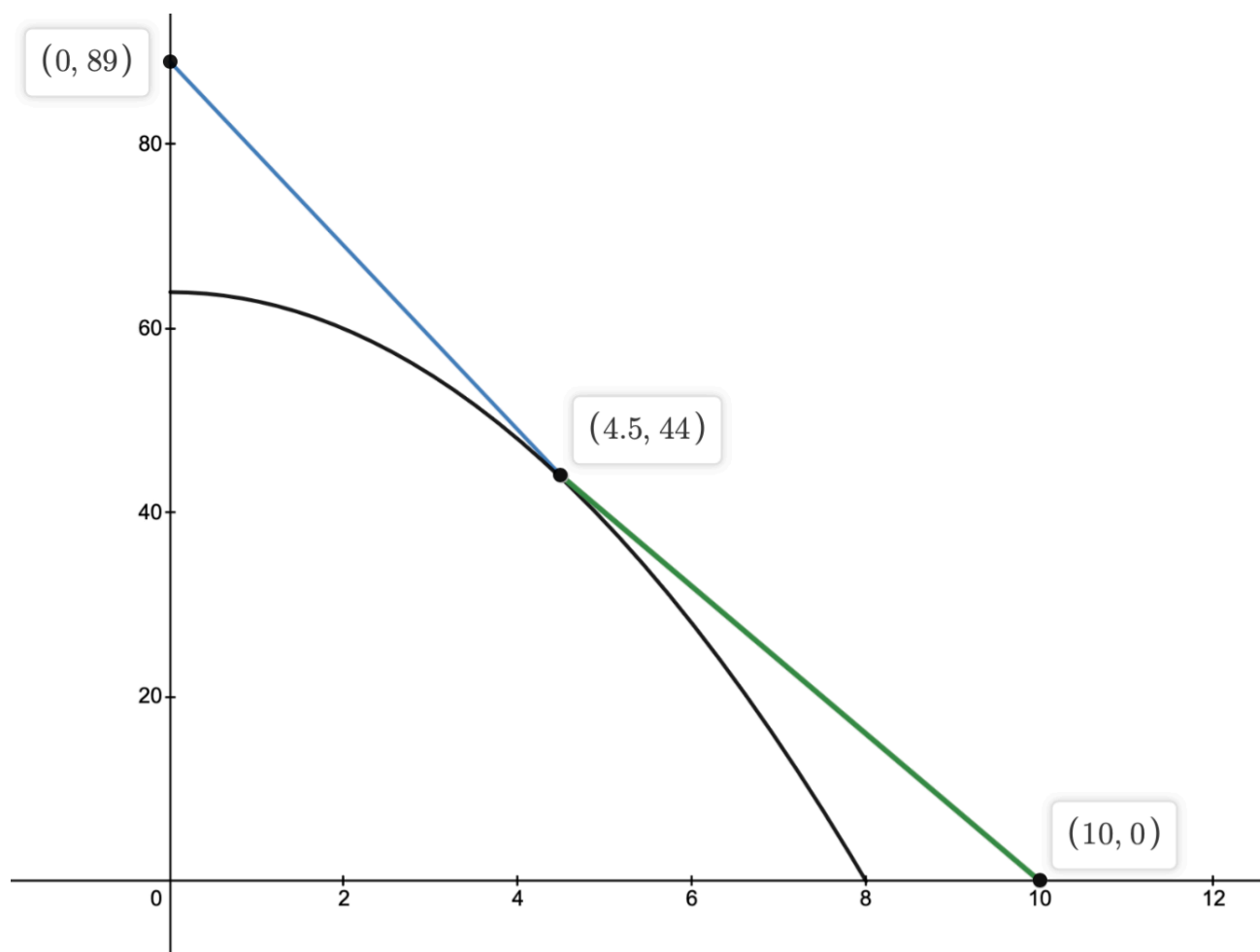
Комментарий: если на графике не были отмечены крайние точки, за график ставилось 0 баллов.

б) Фактическая относительная цена при импорте БАЭ изменилась. Найдем ее. Раньше страна NES продавала 10α единиц y и обменивала их на α единиц x . Теперь NES получаем дополнительно $\frac{1}{4}\alpha$ единиц x . Суммарно она получит $\frac{5}{4}\alpha$ единиц x . Относительная цена при импорте БАЭ равна $\frac{10\alpha}{\frac{5}{4}\alpha} = 8$ (**1 балл за указание цены, 1 балл за объяснение**). При этом относительная цена при экспорте x не изменилась. Найдем новый оптимальный объем производства при импорте x . $\frac{P_x}{P_y} = 8 = 2x \Rightarrow x = 4, y = 64 - 16 = 48$ (**+1 балла**). Уравнение прямой, проходящей через точку $(4, 48)$ с наклоном 8: $y = 80 - 8x$ (**+1 балл**). При экспорте x уравнение прямой остается $y = 89 - 10x$. Изобразим на графике:



Экспортируя БАЭ страна стремится производить $x = 5$. При импорте БАЭ мы хотим производить $x = 4$. Так как по определению КТВ показывает все возможные наборы (x, y) , достижимые при торговле, в данном случае КТВ — верхняя огибающая двух прямых. Их точка пересечения: $(4, 5; 44)$.
Уравнение КТВ:

$$y = \begin{cases} 89 - 10x, & x \leq 4,5 \\ 80 - 8x, & x \in [4, 5; 10] \end{cases} \quad (+3 \text{ балла})$$



(+1 балл за график)

в) Будем решать пункт, используя график (при аналитическом решении баллы выставлялись на усмотрение жюри в соответствии с логикой решения и отсутствием/наличием арифметических ошибок).

Кривые безразличия (КБ) $y = \frac{U}{x^4}$ выпуклы вниз. Максимизируя полезность, найдем КБ, наиболее удаленную от начала координат и имеющую с КТВ хотя бы одну общую точку. В оптимуме КБ касается КТВ (**+1 балл за обоснование**).

В оптимуме наклон касательной к КБ в точке $(-MRS_{xy} = -\frac{MU_x}{MU_y})$ равен наклону КТВ. Предположим, что касание на втором участке КТВ. $MRS_{xy} = \frac{4x^3y}{x^4} = \frac{4y}{x} = 8 \Rightarrow y = 2x$. $80 - 8x = 2x \Rightarrow$ оптимальный объем потребления $x^* = 8$, подходит под ограничение $x \geq 4,5$, $y^* = 80 - 8 \cdot 8 = 16$. (**+5 баллов**)

Так как КТВ выпукла вниз, подходящее ограничение на правом участ-

ке не гарантирует, что на левом участке не может быть другого касания, подходящего под ограничение. Проверим это: $\frac{4y}{x} = 10 \Rightarrow y = 2.5x$, $2.5x = 89 - 10x \Rightarrow x = 7.12$, не подходит под ограничение $x \leq 4.5$. Поэтому оптимум в точке $(8; 16)$. (+2 балла за проверку второго случая)

