ОБРАБОТКА И РАСПОЗНАВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Леонид Моисеевич Местецкий
профессор
кафедра математических методов прогнозирования ВМК МГУ
кафедра интеллектуальных систем МФТИ

Идея генерации признаков на основе линейных преобразований

1) Представить исходный образ в виде линейной комбинации базисных образов

2) Составить вектор признаков из коэффициентов разложения $(y_0,\ldots,y_{N-1})$

$$\boxed{\text{Исходный образ}} = \sum y_i \times \boxed{i\text{-й базисный образ}}$$

Представление базисных векторов

$A = [a(0), a(1), ..., a(N-1)]$ - представление матрицы в виде столбцов.

Вектора-столбцы $a(i)$ называются *базисными векторами.*

$$y = A^H x = \begin{pmatrix} a_0^H \\ a_1^H \\ \vdots \\ a_{N-1}^H \end{pmatrix} \cdot x$$

где $a^H(0), a^H(1), ..., a^H(N-1)]$ – строки из транспонированных столбцов $a(i)$.

$$x = \sum_{i=0}^{N-1} y(i) \cdot a_i$$

Преобразование Карунена-Лоева

1. Рассматриваем вектор измерений $\boldsymbol{x}$ как вектор случайных величин
2. Тогда полученный вектор признаков также является случайным.
3. Целью преобразования $y = A^T x$ является такой выбор матрицы базисных векторов A, чтобы вектор y имел некоррелированные компоненты: математическое ожидание $E[y(i) \cdot y(j)] = 0$ для всех $i \neq j$.
4. Такое свойство признаков характеризует их «минимальность», поскольку нет «избыточности описания»: каждый признак не дублирует остальные признаки.

Альтернатива – генерация признаков на основе преобразования Фурье

1. Преобразование Карунена-Лоева требует построения вероятностной модели для описания вектора измерений.
2. Вычисление базисных векторов требует больших вычислительных затрат.
3. Преобразование Фурье – это разложение по универсальному базису. Оно позволяет обойтись без вероятностной модели и снизить вычислительные затраты.

Непрерывное преобразование Фурье (примерно 1807-1822)

Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier) 1768-1830, Париж, французский математик и физик.

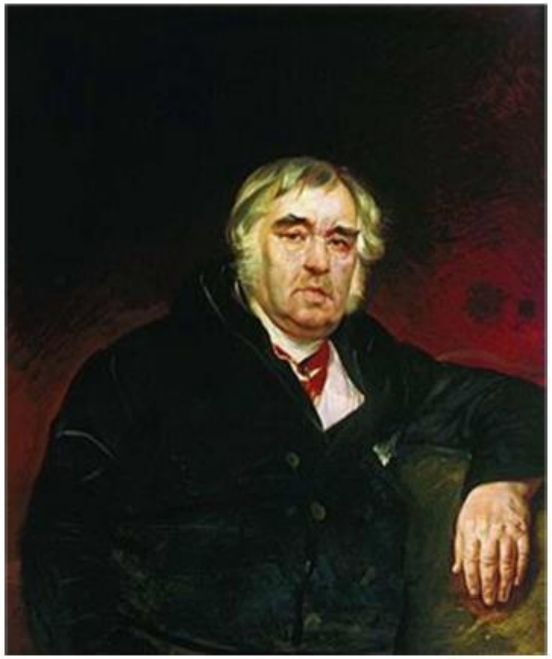
Прямое преобразование

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\, 2\pi f t)\, dt \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Обратное преобразование

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j\, 2\pi f t)\, df \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$$

А что в России в это время?



Иван Андреевич Крылов (1769 – 1844)

Водолазы (басня 1813 год)

Какой-то древний царь впал в страшное сомненье:
Не более ль вреда, чем пользы, от наук?
Не расслабляет ли сердец и рук ученье?
И не разумнее ль поступит он,
Когда ученых всех из царства вышлет вон?
....
Хотя в ученье зрим мы многих благ причину,
Но дерзкий ум находит в нем пучину
И свой погибельный конец,
Лишь с разницею тою,
Что часто в гибель он других влечет с собою.

Одномерное ДПФ

x(0), x(1),...,x(N-1) – вектор исходных измерений.

ДПФ определяется следующим образом:

$$y(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\exp\{\alpha\} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha),$$

i - мнимая единица.

Обратное преобразование есть:

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y(k) \cdot \exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Базисные вектора ДПФ

Определим

$$W_N = exp\left(-i \cdot \frac{2\pi}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - i \cdot sin\left(\frac{2\pi}{N}\right).$$

Тогда

$$exp\left(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot kn\right) = \left(exp\left(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot\right)\right)^{kn} = W_N{}^{kn}.$$

Пусть

$$y = W^H x,$$

тогда

$$x = Wy$$

Матрица базисных векторов:

$$W^H = \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{kn} \right\|,\ k, n = 0, \dots, N-1$$

Матрица базисных векторов

$$W^H = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Утверждается, что W – унитарная симметрическая матрица. Пусть W^* – сопряженная матрица: $W^* = W^H = W^{-1}$. Тогда базисные вектора – это столбцы матрицы W.

Таким образом, имеет место разложение $x = \sum_{i=0}^{N-1} y(i) \cdot w_i$ по базису $w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}$ векторов-столбцов матрицы W.

Пример

$$N = 4 \quad \Rightarrow \quad W_N = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$W_4 = \exp\left(-i\frac{2\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -i$$

$$W_4^2 = \exp(-i \cdot \pi) = \cos(-\pi) - i \cdot \sin(-\pi) = -1$$

$$W_4^3 = \exp\left(-i\frac{2\pi}{4} \cdot 3\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = i$$

$$W_4^4 = \exp(-i \cdot 2\pi) = 1$$

Базисные вектора

$$W^H = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \qquad W = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

$$w_0 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_1 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \quad w_2 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

$W = (w_0, w_1, w_2, w_3)$ - матрица из базисных векторов

Унитарная матрица

$$W^H \cdot W = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = W \cdot W^{-1}$$

ДПФ – разложение по базисным последовательностям

$x(n)$ – последовательность,

$h_k(n)$ – множество базисных последовательностей.

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k) \cdot h_k(n)$$

$$h_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right), & n = 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\left(h_k(n), h_l(n)\right) = \sum_n h_k(n) \cdot h_l(n) = \delta_{kl}$$ – ортонормальные последовательности

Двумерное ДПФ

Пусть $X(m,n), \quad m,n = 0,1,\ldots,N-1$ – двумерные измерения. Тогда двумерное ДПФ есть:

$$Y(k,l) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} X(m,n) W_N^{k\times m} W_N^{l\times n}.$$

Обратное преобразование:

$$X(m,n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} Y(k,l) W_N^{-k\times m} W_N^{-l\times n}.$$

Данную запись компактно можно переписать в следующем виде:

$Y = W^H X W^H$, $X = WYW$.

Дискретное косинусное преобразование

$$y(k) = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \;\; k = 0,1, \dots, N-1,$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) \cdot y(k) \cdot cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \;\; n = 0,1, \dots, N-1$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$y = C^T x,$$

C – ортогональная матрица, $C^{-1} = C^T$.

$$C(n,k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \;, \quad k = 0, \qquad 0 \le n \le N-1,$$

$$C(n,k) = \sqrt{\frac{2}{N}} cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad 1 \le k \le N-1, \;\; 0 \le n \le N-1.$$

Двумерное косинусное преобразование

$X(m,n), \quad m,n = 0,1,\ldots,N-1$ – двумерные измерения

$$Y = C^T X \, C$$

$$X = C \, Y C^T$$

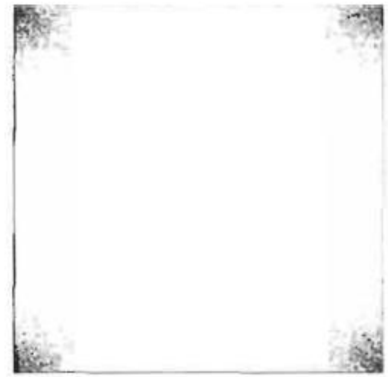
Дискретное синусное преобразование

$$y = S^T x$$

$$S(k,n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} sin\left(\frac{\pi(n+1)(k+1)}{N+1}\right), \quad k,n = 0,1,\dots,N-1.$$

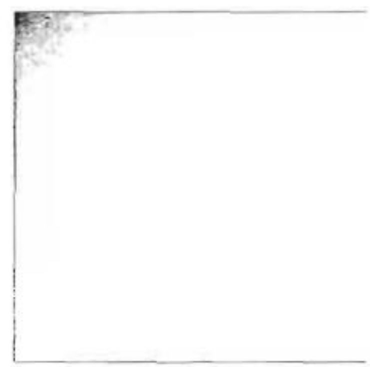
Пример ДПФ, ДКП, ДСП преобразований

Исходное изображение



Коэффициенты ДПФ

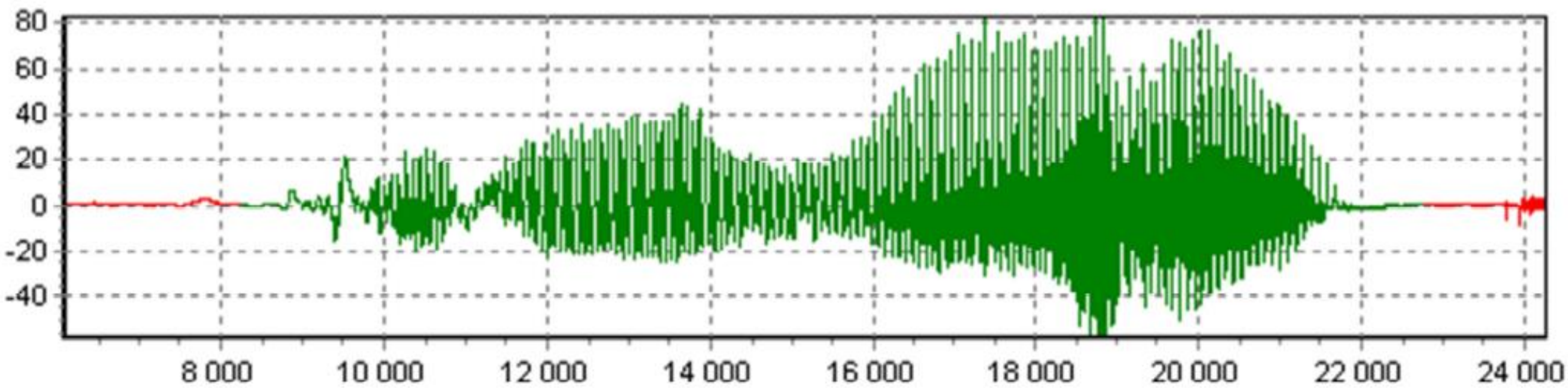
Коэффициенты ДСП



Коэффициенты ДКП

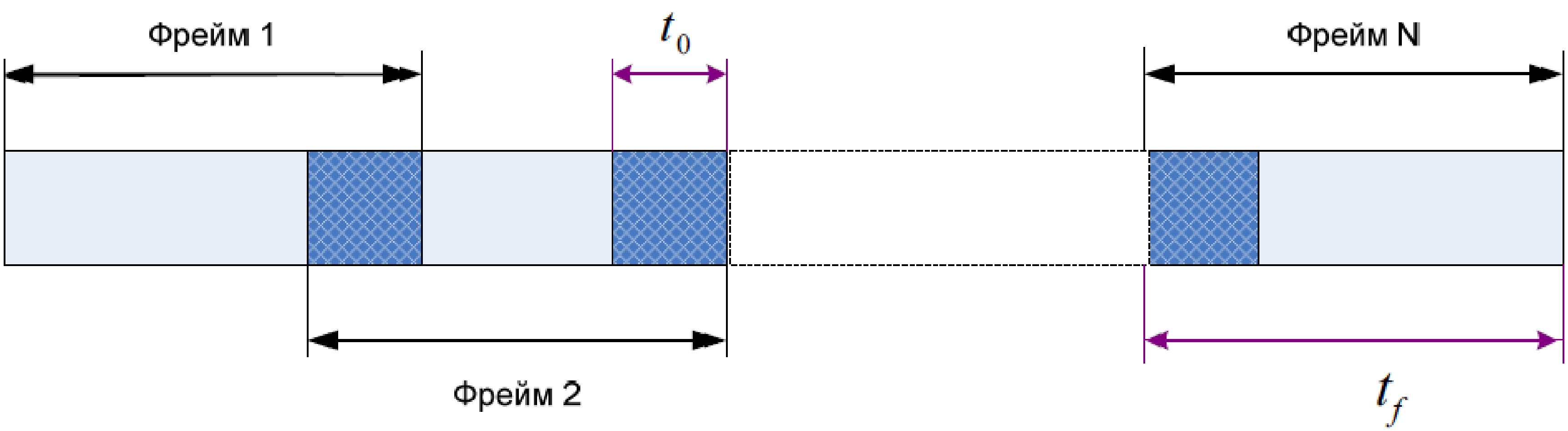
Яркость точек: чем больше модуль коэффициента, тем темнее точка

Задача сравнения речевых команд



Звуковой сигнал с микрофона для слова «привет»

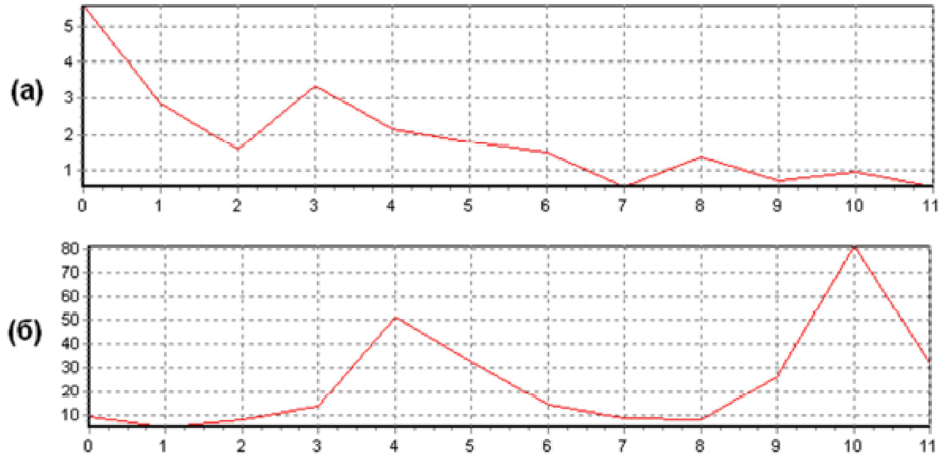
Разделение сигнала на фреймы с перекрытием



Спектральные коэффициенты

В качестве вектора признаков для отдельного фрейма выбираются коэффициенты ДПФ для сигнала $x_k(n),\ n = 0,\dots,t_f - 1$ этого фрейма:

$$y_k(m) = \frac{1}{\sqrt{t_f}} \sum_{n=0}^{t_f - 1} x_k(n) \exp(-i \frac{2\pi}{t_f} mn), \quad m = 0,\dots,t_f.$$



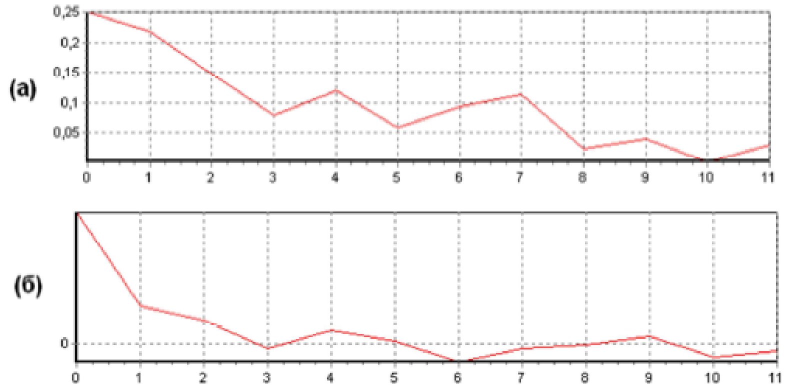
Модули спектральных коэффициентов для (а) 1-ого и (б) 30-ого фрейма

Кепстральные коэффициенты

Второй вариант признакового описания фрейма – с помощью кепстральных коэффициентов, вычисляемых по формуле:

$$y_k(n) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{t_f}\sum_{l=0}^{t_f-1}\exp\left(i\frac{2\pi l\, n}{t_f}\right)\ln\left\{\left|\sum_{j=0}^{t_f-1}x_k(j)\exp\left(-i\frac{2\pi lj}{t_f}\right)\right|+1\right\}\right],$$

$$n = 0,\ldots,t_f.$$



Кепстральные коэффициенты для (а) 1-ого и (б) 30-ого фрейма.

Метрика в пространстве признаков

Расстояние между i-ым и j-ым фреймами, описываемых векторами признаков

$$\vec{y}_i = (y_i(1), \ldots, y_i(12))$$

и

$$\vec{y}_j = (y_j(1), \ldots, y_j(12))$$

соответственно, определяется как обычное Евклидово расстояние:

$$d(i, j) = \sum_{k=1}^{12} (y_i(k) - y_j(k))^2 .$$

Мера различия речевых команд

$r_i\,,\ \ i = 0, \dots, p$ – фреймы в команде $R = \{r_0, r_1, \dots, r_p\}$

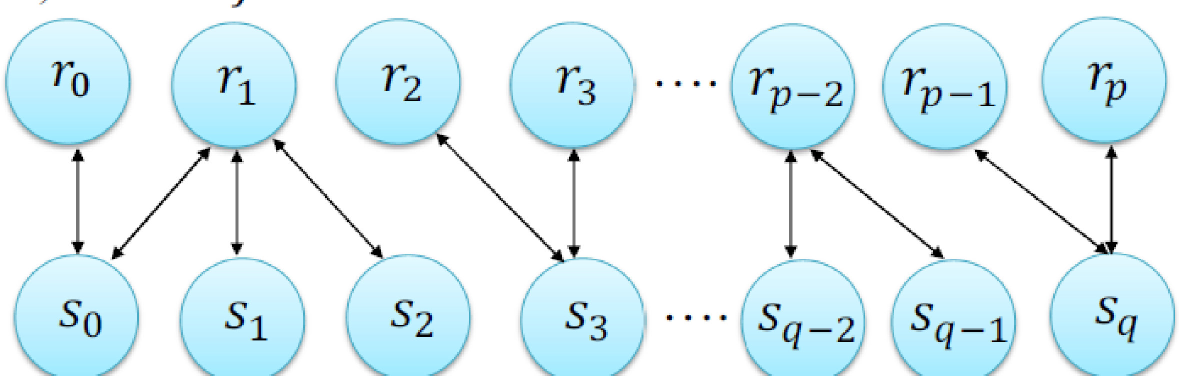
$s_j,\ \ j = 0, \dots, q$ – фреймы в команде $S = \{s_0, s_1, \dots, s_q\}$

$D(R, S)$ – мера различия команд R и S

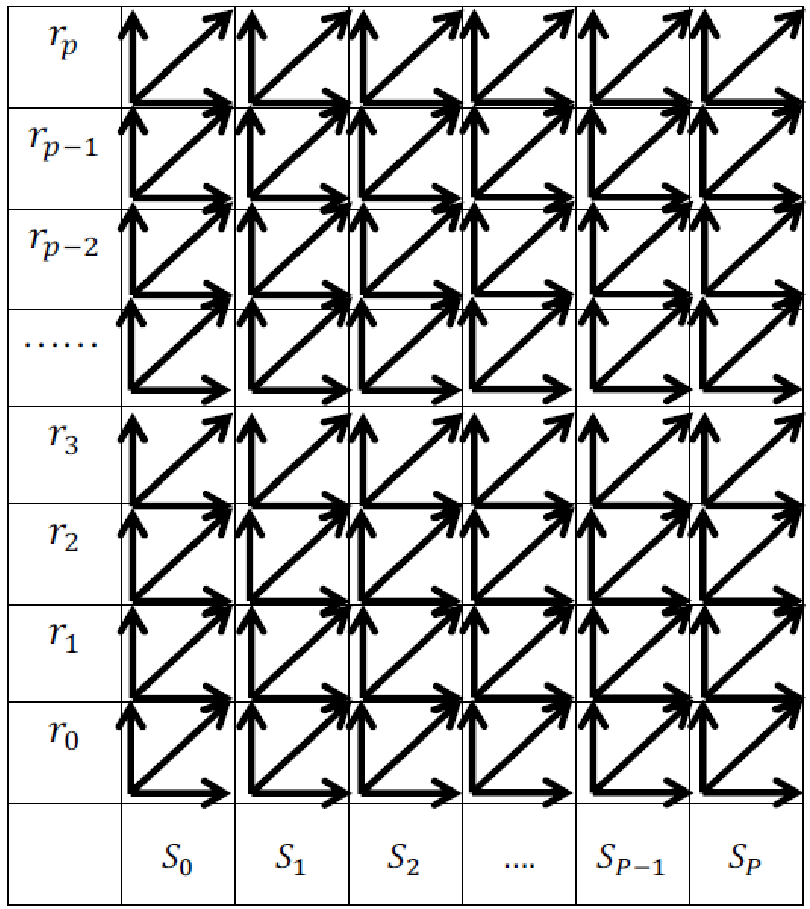
$$D(R,S) = \min_{Z} \sum_{(i,j)\in Z} d(r_i\,, s_j)$$

Z – множество вариантов соответствия фреймов:

- каждому фрейму из R соответствует хотя бы один фрейм из S
- каждому фрейму из S соответствует хотя бы один фрейм из R
- соответствие монотонное: если есть пары $(r_i\,, s_j)$ и $(r_k\,, s_m)$ и $k \geq i$, то $m \geq j$.



Выбор оптимального соответствия



Задача построения кратчайшего пути на плоском графе.
Решается алгоритмом Дийкстра