

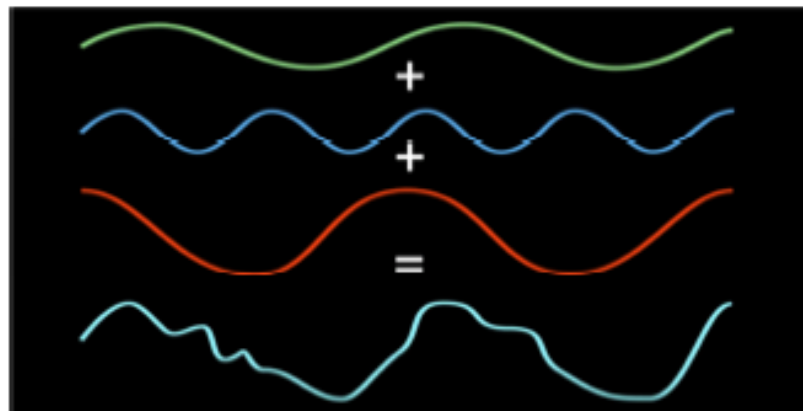
ОБРАБОТКА И РАСПОЗНАВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Леонид Моисеевич Местецкий
профессор

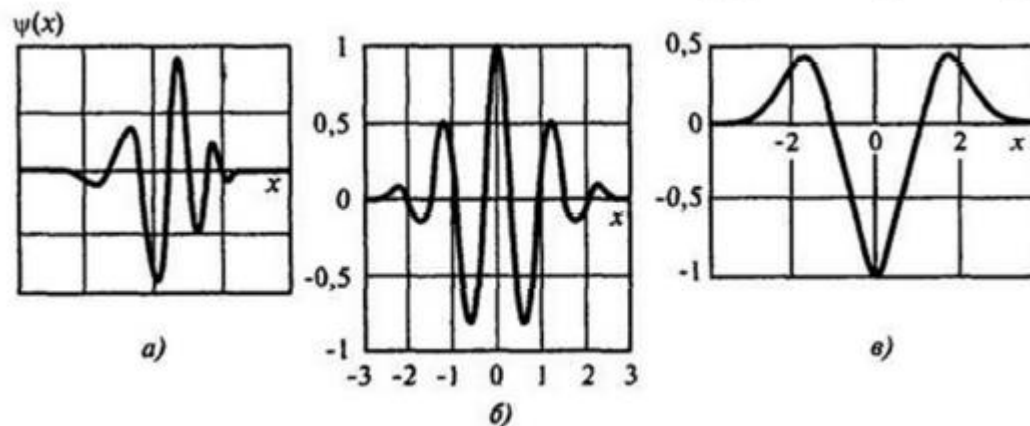
кафедра математических методов
прогнозирования ВМК МГУ

кафедра интеллектуальных систем МФТИ

Генерация признаков на основе вейвлет-преобразования



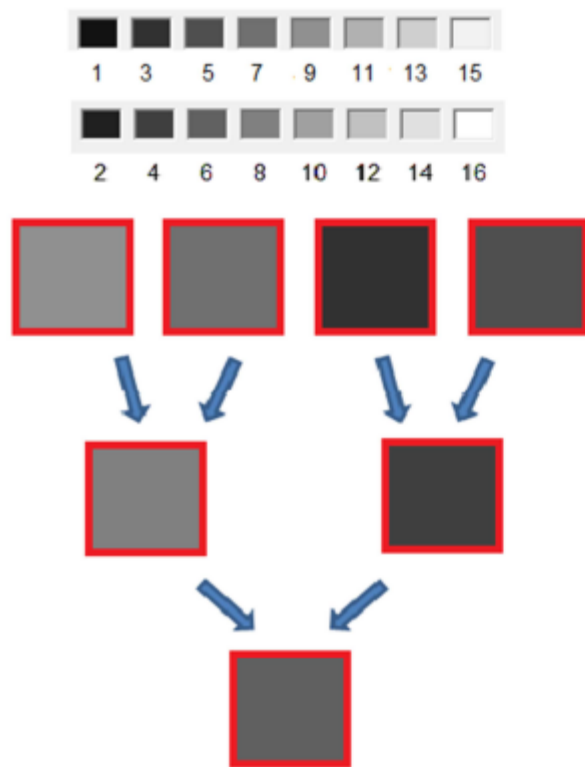
Синусоидальная волна – основа Фурье-преобразования



Wavelet - короткая волна, волнишка, всплеск

Преобразование Хаара на основе попарного усреднения

Пример изображения из одной строки в 4 пиксела



9	7	3	5
---	---	---	---

8	4	1	-1
---	---	---	----

6	2	1	-1
---	---	---	----

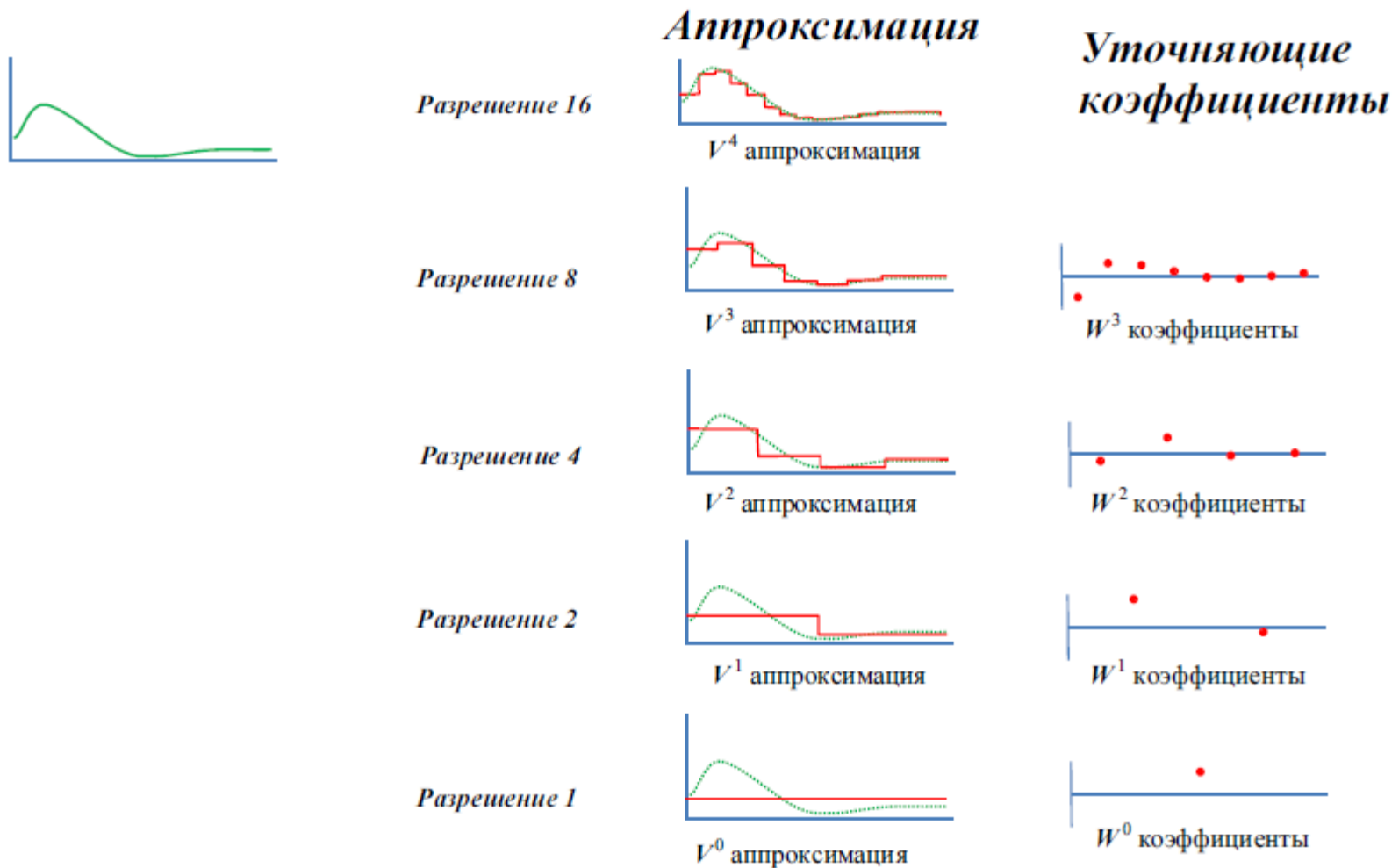
Черный квадрат Малевича



Последовательное уменьшение разрешения

Разрешение	Средние значения	Уточняющие коэффициенты
4	9 7 3 5	
2	8 4	1 -1
1	6	2

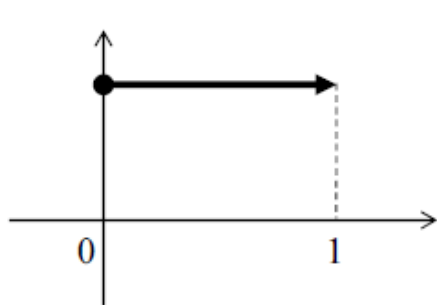
Аппроксимация сигнала кусочно-постоянными функциями



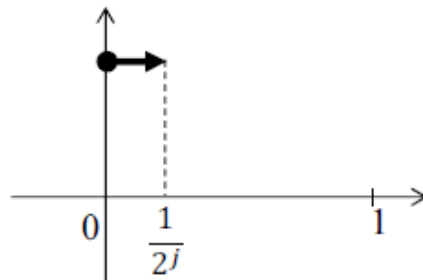
Функции одномерного базиса Хаара

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

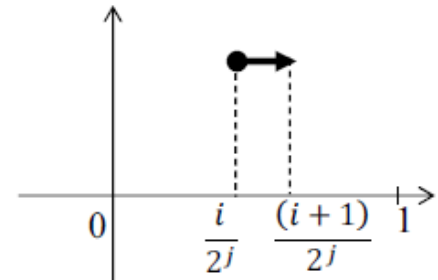
$$\phi_i^j(x) = \phi(2^j x - i) = \phi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$



$\phi(x)$



$\phi(2^j x)$



$\phi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right)$

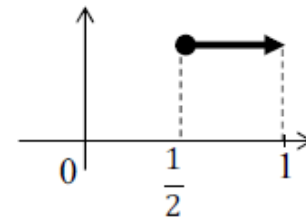
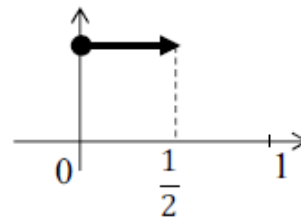
Пространство функций

V^j - пространство всех кусочно-постоянных функций на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{2^j}$

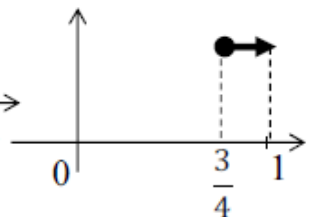
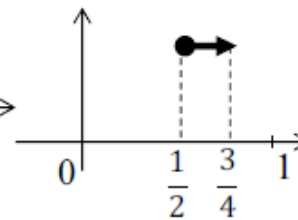
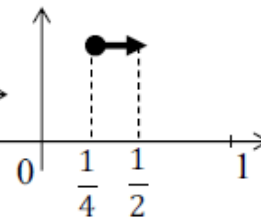
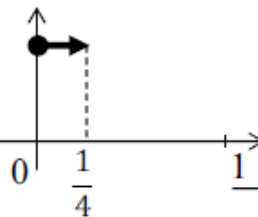
$$\phi_i^j(x) \in V^j, \quad i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$

$$\phi_0^0(x) = \phi(x) \in V^0,$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_0^1(x) &= \phi(2x) \\ \phi_1^1(x) &= \phi(2x - 1) \end{aligned} \right\} \in V^1$$



$$\left. \begin{aligned} \phi_0^2(x) &= \phi(4x) \\ \phi_1^2(x) &= \phi(4x - 1) \\ \phi_2^2(x) &= \phi(4x - 2) \\ \phi_3^2(x) &= \phi(4x - 3) \end{aligned} \right\} \in V^2$$



Скалярное произведение в пространстве функций

$$f(x), g(x) \in V^j,$$

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Ортогональное дополнение в пространстве функций

V^j - пространство всех кусочно-постоянных функций
на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{2^j}$

V^{j+1} - пространство всех кусочно-постоянных функций
на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{2^{j+1}}$

$$V^j \subset V^{j+1}$$

W^j – ортодополнение для V^j в V^{j+1} – это множество всех функций в V^{j+1} , ортогональных всем функциям из V^j .

Множество вейвлетов

Функции $\phi_i^j(x)$ образуют базис в пространстве V^j .

Определение. Совокупность всех линейно независимых функций $\psi_i^j(x)$, на которые натянуто W^j (базис), называется множеством вейвлетов.

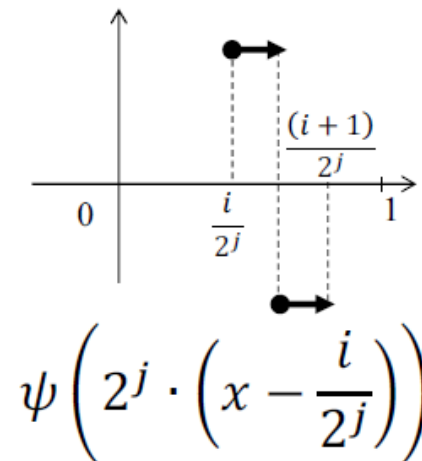
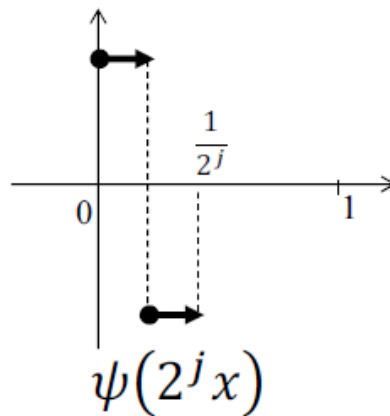
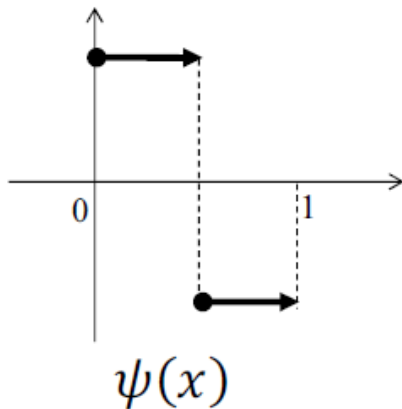
Свойства.

1. Базисные функции ψ_i^j из W^j вместе с базисными функциями ϕ_i^j из V^j образуют базис V^{j+1}
2. Любая базисная функция ψ_i^j из W^j ортогональна любой базисной функции ϕ_i^j из V^j .

Базис Хаара в ортодополнении

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\psi_i^j(x) = \psi(2^j x - i) = \psi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$



Пример разложения Хаара

$$\tau(x) = [9 \ 7 \ 3 \ 5],$$

$$\tau(x) \in V^j, j = 2.$$

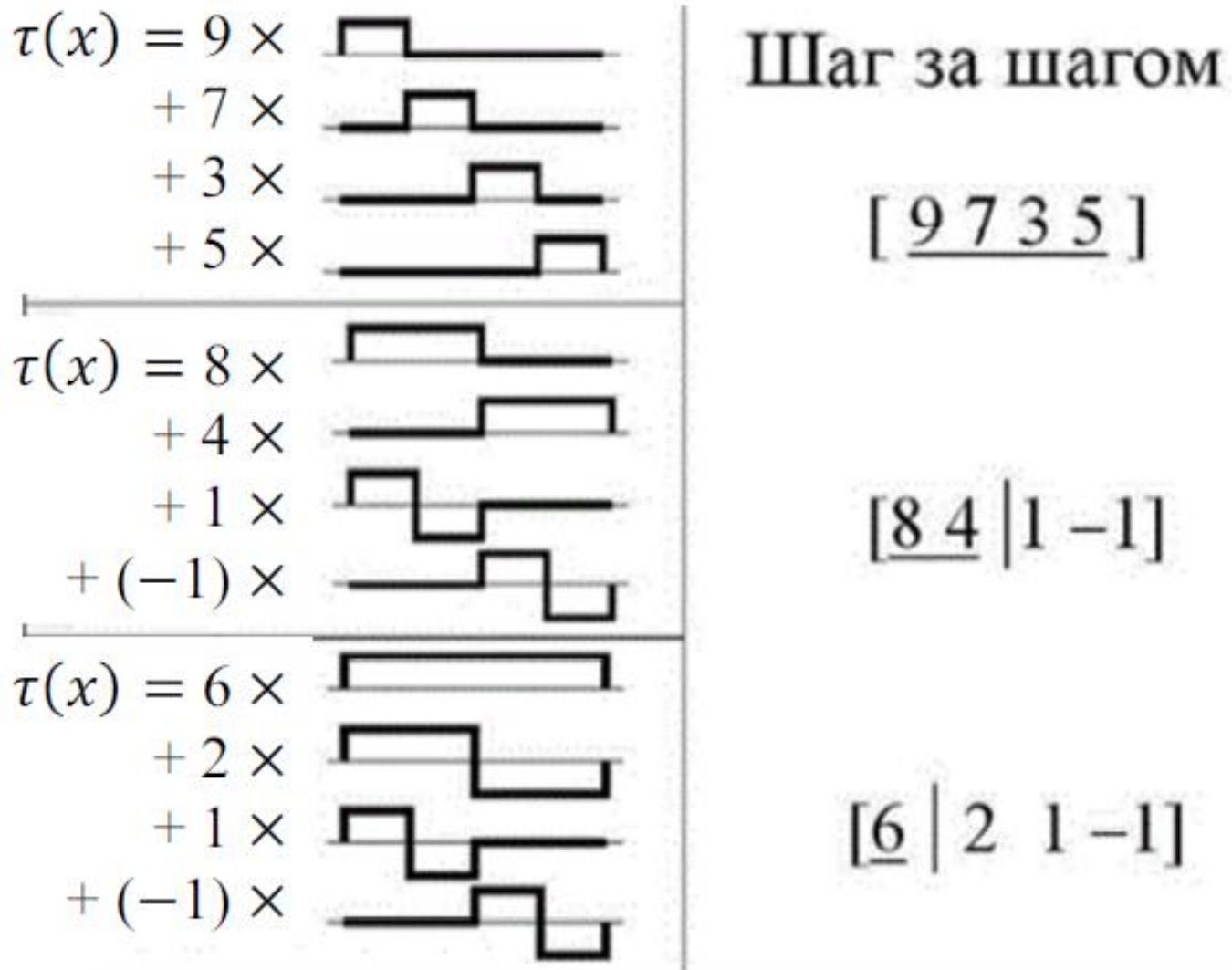
$\tau(x)$ — кусочно-постоянная функция на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{4}$.

$$V^2 = V^1 \oplus W^1 = (V^0 \oplus W^0) \oplus W^1$$

$$\begin{aligned}\tau(x) &= c_0^2 \cdot \phi_0^2(x) + c_1^2 \cdot \phi_1^2(x) + c_2^2 \cdot \phi_2^2(x) + c_3^2 \cdot \phi_3^2(x) = \\ &= c_0^1 \cdot \phi_0^1(x) + c_1^1 \cdot \phi_1^1(x) + d_0^1 \cdot \psi_0^1(x) + d_1^1 \cdot \psi_1^1(x) = \\ &= c_0^0 \cdot \phi_0^0(x) + d_0^0 \cdot \psi_0^0(x) + d_0^1 \cdot \psi_0^1(x) + d_1^1 \cdot \psi_1^1(x)\end{aligned}$$

$\phi_0^0(x), \psi_0^0(x), \psi_0^1(x), \psi_1^1(x)$ — базис Хаара для V^2

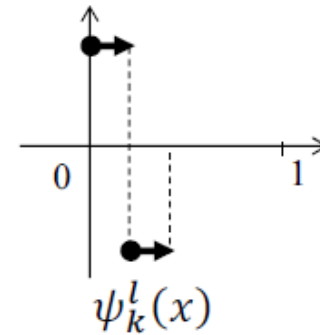
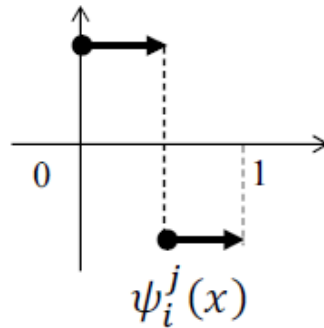
Пример разложения Хаара



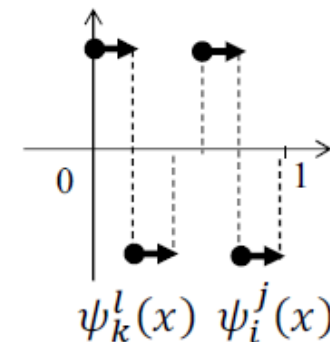
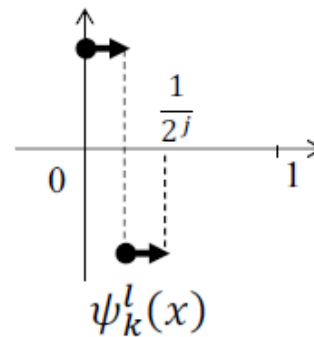
Ортогональность базиса Хаара

$$(\psi_i^j(x), \psi_k^l(x)) = 0$$

Случай $l \neq j$



Случай $l = j$ и $i \neq k$



Нормирование базиса Хаара

$$\phi_i^j(x) = \sqrt{2^j} \cdot \phi(2^j x - i)$$

$$\psi_i^j(x) = \sqrt{2^j} \cdot \psi(2^j x - i)$$

Тогда

$$\left(\phi_i^j(x), \phi_i^j(x) \right) = 1$$

$$\left(\psi_i^j(x), \psi_i^j(x) \right) = 1$$

Разложение

$$[6 \quad 2 \quad 1 \quad -1]$$

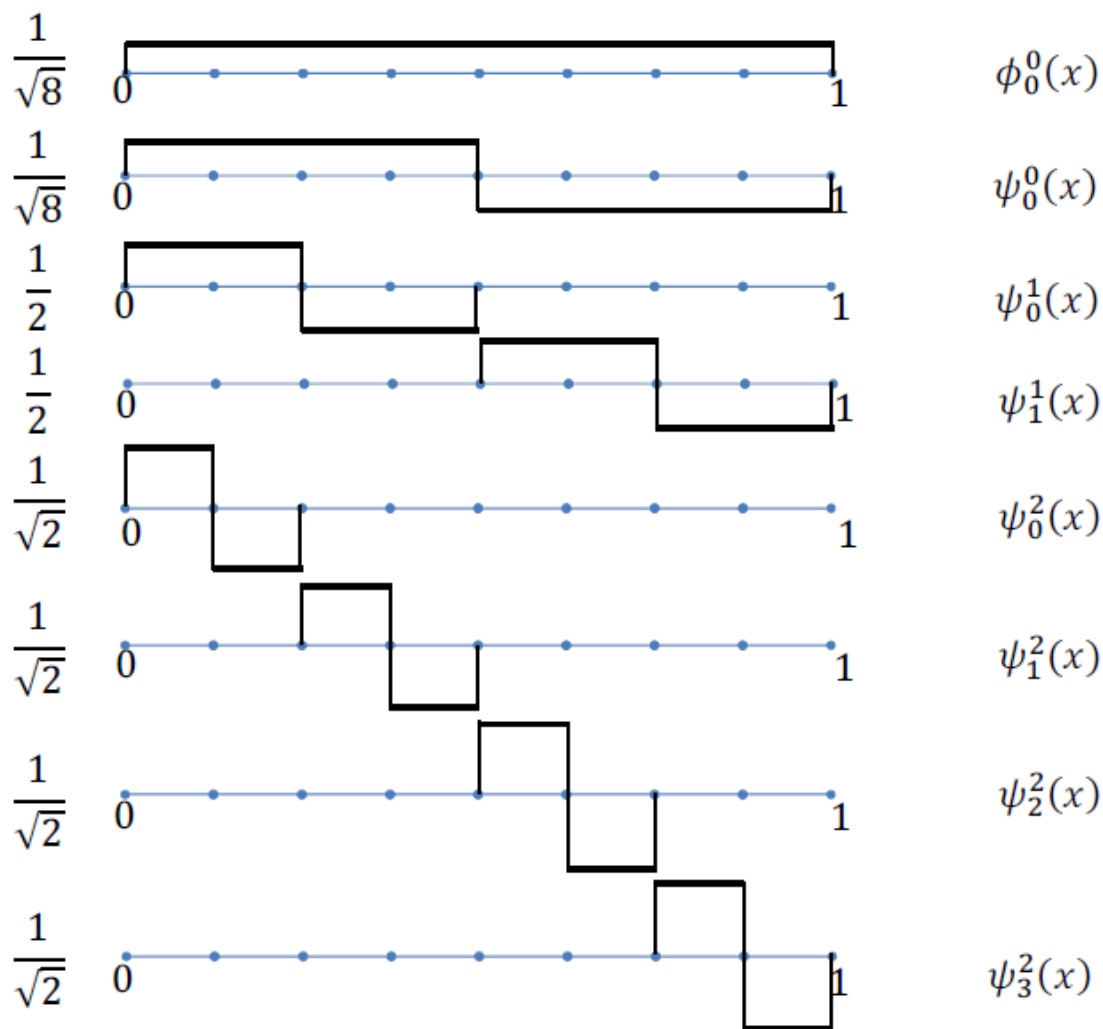
превращается в

$$\left[6 \quad 2 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \right]$$

Матрица преобразования Хаара

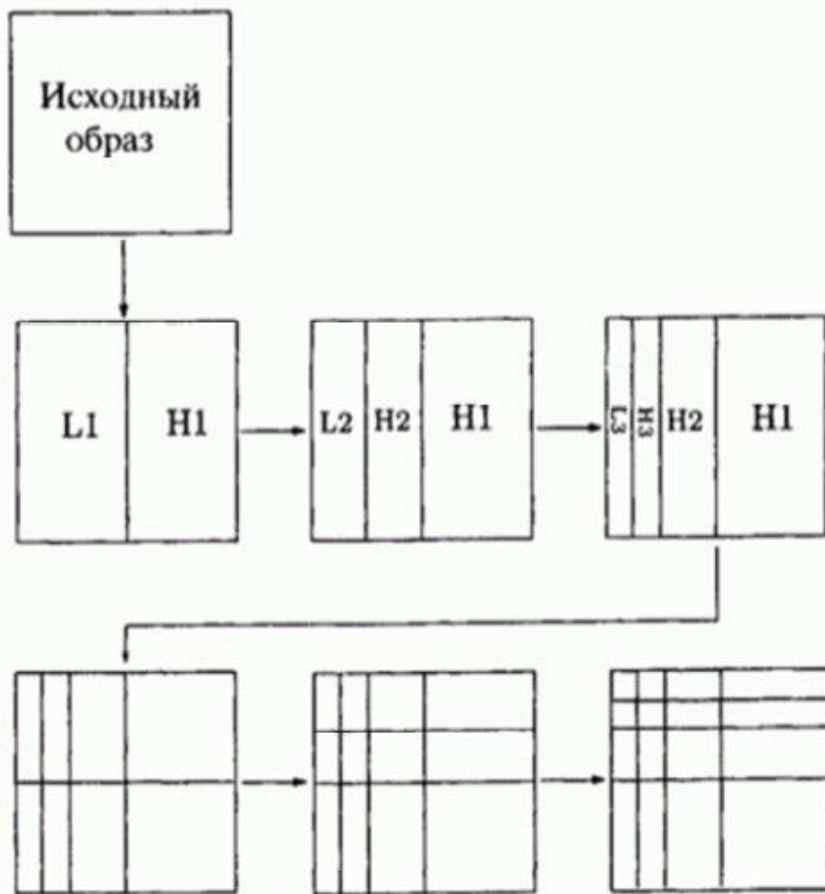
$$W = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Базис Хаара в пространстве V^2



Двумерный базис Хаара

Стандартное разложение:



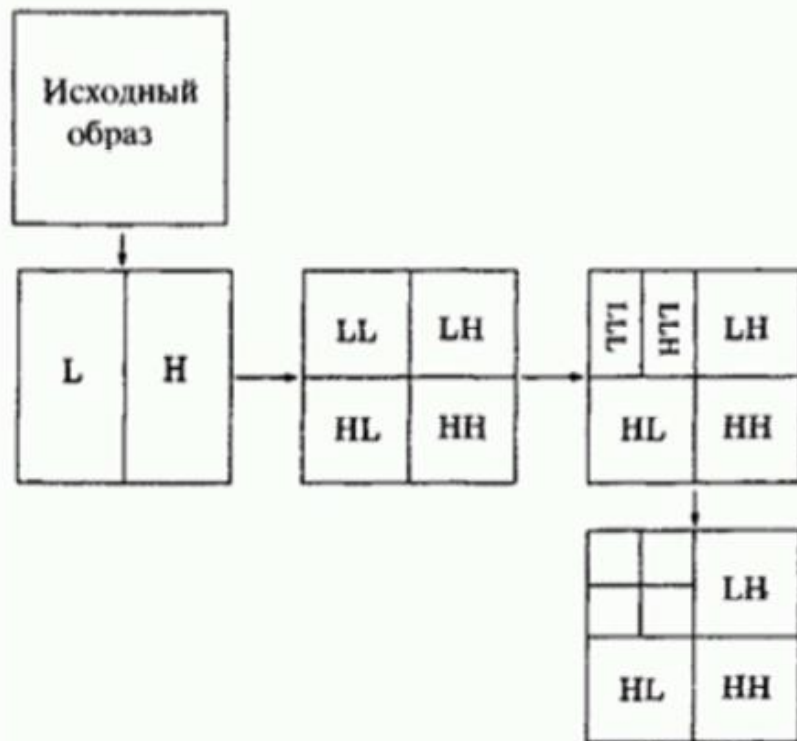
1. Начинается вычислением вейвлетных преобразований всех строк изображения.

2. После этого стандартный алгоритм производит вейвлетное преобразование каждого столбца.

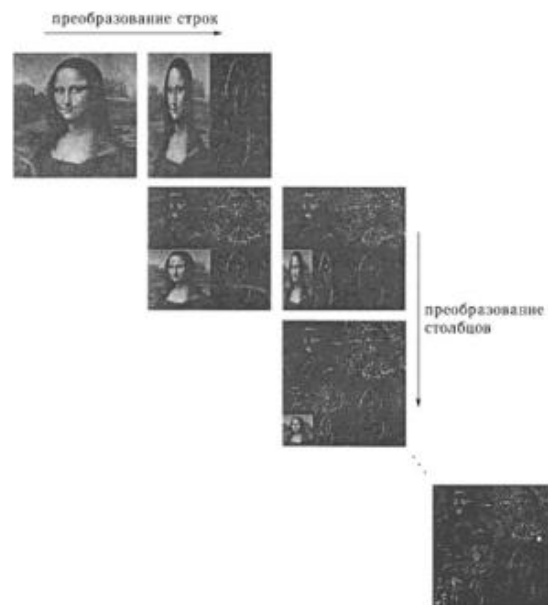


Двумерный базис Хаара

Нестандартное (пирамидальное) разложение:



Пирамидальное разложение вычисляет вейвлетное преобразование, применяя итерации поочередно к строкам и столбцам.



Сжатие изображения вейвлетами Хаара



(а)



(б)



(в)



(г)

(а) Исходное изображение

(б) 19% вейвлет-коэффициентов, относительная погрешность 5% в - норме

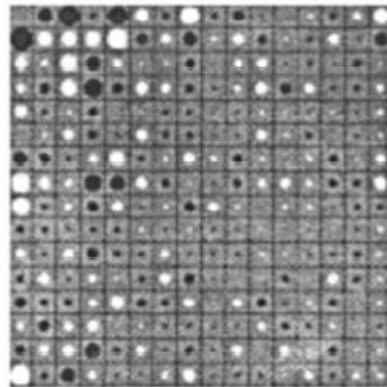
(в) 3% вейвлет-коэффициентов, относительная погрешность 10% в - норме

(г) 1% вейвлет-коэффициентов, относительная погрешность 15% в - норме

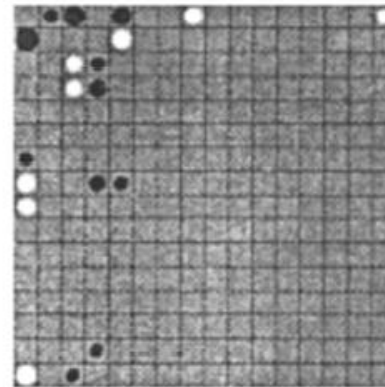
Формирование запросов изображений



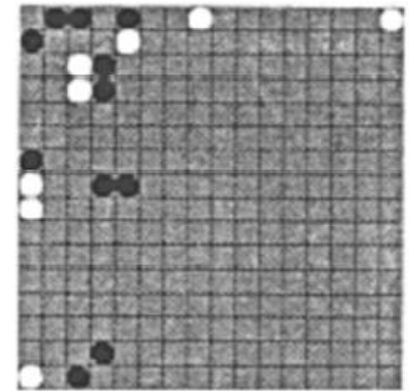
(а)



(б)



(в)



(г)

(а) Исходное изображение «Ирисы» Ван-Гога

(б) Разложение на вейвлет-коэффициенты. Размер круга соответствует величине, цвет – знаку коэффициента.

(в) Усечение коэффициентов, остаются только самые большие по модулю

(г) Квантование оставшихся коэффициентов

Сравнение изображений

