

演習問題 7.2 の証明：ディラックのデルタ関数の導関数

ディラックのデルタ関数の導関数 $\delta'(x-y)$ に関する積分 I が $-f'(y)$ を満たすことを示します。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-y) f(x) dx$$

1. 部分積分の適用と境界項の変換

部分積分の公式 $\int u dv = [uv] - \int v du$ を適用します。 $u = f(x)$ 、 $dv = \delta'(x-y) dx$ とおくと、 $du = f'(x) dx$ 、 $v = \delta(x-y)$ となります。

$$I = [f(x)\delta(x-y)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f'(x) dx$$

ここで、第 1 項の境界項は、**広義積分**の定義により、積分区間の端点 $\pm\infty$ を極限で評価します。

$$[f(x)\delta(x-y)]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} f(b)\delta(b-y) - \lim_{a \rightarrow -\infty} f(a)\delta(a-y)$$

2. 境界項の処理

ディラックのデルタ関数 $\delta(x-y)$ は $x = y$ 以外でゼロであるため、 y が有限値である限り、 $\lim_{b \rightarrow \infty}$ や $\lim_{a \rightarrow -\infty}$ の評価点では δ はゼロになります。

$$[f(x)\delta(x-y)]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} f(b) \cdot 0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} f(a) \cdot 0 = 0$$

3. 残りの積分の処理

境界項が 0 となったため、積分 I は第 2 項のみとなります。

$$I = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f'(x) dx$$

ここで、ディラックのデルタ関数の**サンプリング特性**（ふるい効果）

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) g(x) dx = g(y)$$

を、 $g(x) = f'(x)$ として適用します。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f'(x) dx = f'(y)$$

4. 最終的な結果

この結果を I の式に代入し、証明が完了します。

$$I = -f'(y)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-y)f(x) dx = -f'(y)$$