行列 $\hat{F}$ がエルミート演算子（すなわち $\hat{F} = \hat{F}^\dagger$）である場合、任意の状態 $|\lambda\rangle$ に対して、次の等式が成り立つことを示します。

$$\lambda^* = \Big(\langle\lambda|\hat{F}|\lambda\rangle\Big)^* = \langle\lambda|\hat{F}^\dagger|\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat{F}|\lambda\rangle = \lambda$$

ここで、3 番目の式はエルミート共役の定義から導かれ、4 番目の式は $\hat{F}$ がエルミート演算子であることを利用しています。

1. エルミート共役演算子の定義

一般に、演算子 $\hat{A}$ のエルミート共役 $\hat{A}^\dagger$ は、任意の状態 $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ に対して、次の関係を満たす。footnote この定義は、量子力学における内積空間の性質に基づいています。

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle = \Big(\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle\Big)^*$$

2. 定義式の変形

上記の定義式の両辺の複素共役を取る。

$$\Big(\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle\Big)^* = \Big(\Big(\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle\Big)^*\Big)^*$$

複素共役の複素共役は元に戻るので、右辺は次のようになる。

$$\Big(\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle\Big)^* = \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle$$

3. 最初の式への適用

$|\phi\rangle \to |\lambda\rangle$, $|\psi\rangle \to |\lambda\rangle$, $\hat{A} \to \hat{F}$ と置き換える。

$$\Big(\langle\lambda|\hat{F}|\lambda\rangle\Big)^* = \langle\lambda|\hat{F}^\dagger|\lambda\rangle$$

4. エルミート演算子との関係

$\hat{F}$ がエルミート演算子（$\hat{F} = \hat{F}^\dagger$）の場合、3 番目の式は 4 番目の式に進む。

$$\underbrace{\langle\lambda|\hat{F}^\dagger|\lambda\rangle}_{3\text{ 番目の式}} \xrightarrow{\text{エルミート演算子の性質}} \underbrace{\langle\lambda|\hat{F}|\lambda\rangle}_{4\text{ 番目の式}}$$

5. まとめ

$$\left(\langle\lambda|\hat{F}|\lambda\rangle\right)^* = \langle\lambda|\hat{F}^\dagger|\lambda\rangle \quad (\text{常に成立})$$

$$\langle\lambda|\hat{F}^\dagger|\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat{F}|\lambda\rangle \quad (\hat{F}\ \text{がエルミート演算子の場合に成立})$$