行列 F の**エルミート共役**（または共役転置）$F^\dagger$ の主な性質を以下に示します。

エルミート共役の基本的な性質

以下の性質は、複素数 c（スカラー）、および適切なサイズの行列 A と B に対して成り立ちます。

1. 二重共役

エルミート共役を 2 回繰り返すと、元の行列に戻ります。

$$(F^\dagger)^\dagger = F$$

2. スカラー倍

スカラー倍された行列のエルミート共役は、スカラーの複素共役と、元の行列のエルミート共役の積になります。

$$(cF)^\dagger = c^* F^\dagger$$

ここで c^* はスカラー c の**複素共役**です。

3. 和

行列の和のエルミート共役は、それぞれのエルミート共役の和になります。

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

4. 積

行列の積のエルミート共役は、**順序を逆にした**それぞれのエルミート共役の積になります。

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

5. 逆行列 (可逆な場合)

可逆な行列 F の場合、逆行列のエルミート共役は、エルミート共役の逆行列に等しくなります。

$$(F^{-1})^\dagger = (F^\dagger)^{-1}$$

特殊な行列との関連

エルミート行列 (Hermitian Matrix)

F が自身のエルミート共役に等しい場合。

$$F^\dagger = F$$

ユニタリ行列 (Unitary Matrix)

F のエルミート共役が F の逆行列に等しい場合。

$$F^\dagger = F^{-1} \quad \text{または} \quad F^\dagger F = FF^\dagger = I$$

(I は単位行列です。)

エルミート共役と複素共役の関係

エルミート共役 $\mathbf{A}^\dagger$ は、複素共役 $\mathbf{A}^*$ と転置 $\mathbf{A}^T$ を組み合わせた操作です。

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^* \tag{1}$$

ここで、

- $\mathbf{A}^\dagger$: エルミート共役 (Hermitian Conjugate または Adjoint)
- $\mathbf{A}^*$: 複素共役 (Complex Conjugate)
- $(\cdots)^T$: 転置 (Transpose)

【スカラー(数)の場合】

行列 $\mathbf{A}$ が複素数 z の場合、転置の操作がないため、エルミート共役と複素共役は等しくなります。

$$\mathbf{z}^\dagger = \mathbf{z}^* \tag{2}$$