演習問題 7.2 の証明：ディラックのデルタ関数の導関数

ディラックのデルタ関数の導関数 $\delta'(x-y)$ に関する積分 I が $-f'(y)$ を満たすことを示します。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-y) f(x)\,dx$$

1. 部分積分の適用と境界項の変換

部分積分の公式 $\int u\,dv = [uv] - \int v\,du$ を適用します。$u = f(x)$、$dv = \delta'(x-y)\,dx$ とおくと、$du = f'(x)\,dx$、$v = \delta(x-y)$ となります。

$$I = [f(x)\delta(x-y)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f'(x)\,dx$$

ここで、第 1 項の境界項は、**広義積分**の定義により、積分区間の端点 $\pm\infty$ を極限で評価します。

$$[f(x)\delta(x-y)]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{b\to\infty} f(b)\delta(b-y) - \lim_{a\to-\infty} f(a)\delta(a-y)$$

2. 境界項の処理

ディラックのデルタ関数 $\delta(x-y)$ は $x = y$ 以外でゼロであるため、y が有限値である限り、$\lim_{b\to\infty}$ や $\lim_{a\to-\infty}$ の評価点では δ はゼロになります。

$$[f(x)\delta(x-y)]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{b\to\infty} f(b)\cdot 0 - \lim_{a\to-\infty} f(a)\cdot 0 = 0$$

3. 残りの積分の処理

境界項が 0 となったため、積分 I は第 2 項のみとなります。

$$I = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f'(x)\,dx$$

ここで、ディラックのデルタ関数の**サンプリング特性**（ふるい効果）

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) g(x)\,dx = g(y)$$

を、$g(x) = f'(x)$ として適用します。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f'(x)\,dx = f'(y)$$

4. 最終的な結果

この結果を I の式に代入し、証明が完了します。

$$I = -f'(y)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-y) f(x)\, dx = -f'(y)$$