

基本的な量子力学用語

用語	簡潔な解説	数式表現
ケット (Ket)	量子状態を表すベクトル。ヒルベルト空間の要素であり、縦ベクトルに対応し、列ベクトルとして扱われる。	$ \psi\rangle$
ブラ (Bra)	ケット $ \psi\rangle$ と対をなす、その複素共役転置（エルミート共役） $ \psi\rangle^\dagger$ に対応する行ベクトル。内積を定義する。	$\langle\psi $
スカラー	大きさ（値）のみを持ち、方向を持たない量。座標系の回転に対して不変です。	E, T, m
ベクトル	大きさと方向を持つ量。量子力学ではケット $ \psi\rangle$ や位置 \mathbf{r} が該当します。	\mathbf{A} または $ \psi\rangle$
テンソル	スカラー（0 階）とベクトル（1 階）を一般化した高階の量。成分が複数の添字を持ちます。	T_{ij} , または $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$
ノルム	ベクトルや状態の「長さ」を示す量。量子力学では状態の規格化条件として重要です。	$\ \mathbf{A}\ = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}, \quad \ \psi\rangle\ = \sqrt{\langle\psi \psi\rangle}$
ネイピア数	$e \approx 2.718$ と呼ばれる超越数。連続的な成長や減衰を表す微分方程式の解として現れます。	$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
ネイピア数の微分	指数関数 e^x は、微分しても形が変わらないという特別な性質を持ちます。これは、自然界の成長・減衰現象の基本です。	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$
自然対数	ネイピア数 e を底とする対数 $\log_e x$ （通常 $\ln x$ と表記）のこと。指数関数の逆関数であり、連続的な変化の時間を求めるときなどに使われます。	$\ln x = \log_e x$
オイラーの公式	複素指数関数と三角関数（ \cos と \sin ）を結びつける、物理学において振動や波を扱う上で最も重要な公式。	$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

用語	簡潔な解説	数式表現
一次独立	ベクトルの組 $\{ \psi_i\rangle\}$ の線形結合がゼロとなるのが、係数 c_i がすべてゼロの場合に限られること。	$\sum_i c_i \psi_i\rangle = 0 \implies c_i = 0 \text{ (すべて)}$
基底	あるベクトル空間内の任意のベクトルを、一意的に線形結合で表すことができる、一次独立なベクトルの組。	$ \psi\rangle = \sum_i c_i e_i\rangle$
次元	ベクトル空間を張るために必要な、一次独立なベクトルの最小数（基底の数） N 。	$\dim(V) = N$
エルミート演算子	自身のエルミート共役 (\dagger) が自分自身と等しい演算子。量子力学で物理量に対応します。	$\hat{F} = \hat{F}^\dagger$
エルミート行列	自身の共役転置が自分自身と等しい行列。固有値は必ず実数です。	$H = H^\dagger$
対角化	行列 H を固有ベクトル P で変換し対角行列 Λ にすること。あるいは、演算子 \hat{F} をその固有ベクトル基底で表現したときに行列要素が対角成分のみを持つこと。	$\Lambda = P^{-1} H P, \quad \langle \lambda_i \hat{G} \lambda_j \rangle = \mu_i \delta_{ij}$
行列要素 (演算子)	演算子 \hat{F} を、基底ベクトル $\{ \lambda_i\rangle\}$ を用いて行列表示したときの i 行 j 列の成分 f_{ij} の定義。	$f_{ij} = \langle \lambda_i \hat{F} \lambda_j \rangle$
交換子 $[\hat{F}, \hat{G}]$	2つの演算子の作用順序を交換したときの差を表します。	$[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}$
交換	交換子がゼロになること。対応する物理量が同時に正確に測定可能です。	$[\hat{F}, \hat{G}] = 0$
固有値方程式	演算子 \hat{F} が固有ベクトル $ \psi\rangle$ に作用すると、固有値 λ 倍される関係。	$\hat{F} \psi\rangle = \lambda \psi\rangle$
固有状態	観測量の固有値 λ に対応する状態ベクトル $ \psi\rangle$ のこと。物理量を測定する直前の状態。	$ \psi\rangle$

用語	簡潔な解説	数式表現
固有値	固有値方程式を満たすスカラー λ のこと。測定される物理量の候補となる値（測定値として観測される）。	λ
スペクトル分解	演算子 \hat{F} を、固有値 λ_i と射影演算子 $ \psi_i\rangle\langle\psi_i $ を用いて表現する形式。	$\hat{F} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i\rangle\langle\psi_i $
完全性関係	固有ベクトル $\{ \lambda_i\rangle\}$ が正規直交基底をなすとき、すべての固有状態の和は恒等演算子 \hat{I} になります。	$\hat{I} = \sum_{i=1}^n \lambda_i\rangle\langle\lambda_i $
内積	2つの状態 $ \phi\rangle, \psi\rangle$ からスカラー値を得る演算。直交性やノルム（長さ）を定義します。	$\langle\phi \psi\rangle = \int \phi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) d\tau$
外積 (ケット・ブラ)	状態 $ \psi\rangle$ から $ \phi\rangle$ への射影演算子（またはその要素）を構成します。	$\hat{P} = \psi\rangle\langle\phi $
ベクトル積	3次元ベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} から、両者に垂直な新しいベクトル \mathbf{C} を返す演算。	$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$
δ 関数	ディラックのデルタ関数。積分されたときに、任意の関数 $f(x)$ の特定点での値を取り出します。	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$
クロネッカーの δ	2つの離散的な添字 i と j が等しいときに 1、等しくないときに 0 となる関数。ベクトルの直交性を示す。	$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$
正規直交基底	互いに直交し（内積が 0）、かつ長さが 1（内積が 1）のベクトルの組 $\{ e_i\rangle\}$ 。	$\langle e_i e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$
確率振幅	状態 $ \psi\rangle$ を、観測量 \hat{F} の固有状態 $ \lambda_i\rangle$ に射影した成分。その絶対値の 2 乗が確率となる。	$c_i = \langle\lambda_i \psi\rangle$

用語	簡潔な解説	数式表現
確率	物理量 \hat{F} を観測したとき、特定の固有値 λ_i が得られる可能性の度合い（ボルンの規則）。	$P_i = \langle \lambda_i \psi \rangle ^2$
期待値	測定を多数回行った場合の、観測量 \hat{F} の測定値の平均値。量子状態 $ \psi\rangle$ の演算子 \hat{F} に対する予測値。	$\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi \hat{F} \psi \rangle = \sum_i \lambda_i P_i$
測定値	実際に観測によって得られる値。観測量 \hat{F} の固有値 λ_i のいずれかになる。	λ_i (固有値のいずれか)
観測量	測定によって得られる物理的な量（エネルギー、運動量など）。必ずエルミート演算子 \hat{F} に対応する。	$\hat{F} = \hat{F}^\dagger$

固有値と固有状態

1. 数学的な意味

- 固有値 λ は、**特性方程式** $\det(U - \lambda I) = 0$ の解である λ の N 次方程式の解です。
- 固有方程式**は $U|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ です。
- 固有状態 $|\psi\rangle$ は、固有値 λ を固有方程式に代入して得られる**同次連立方程式** $(U - \lambda I)|\psi\rangle = 0$ の解です。

2. 物理的な意味

- 固有値 λ は、観測される物理量の**可能な測定値**（固有値）を表します。
- 固有状態 $|\psi\rangle$ は、観測量が λ に**確定している状態**を表します。
- 観測量を測定すると、系は対応する固有状態に「**収縮**」（状態の射影）します。
- 観測量は**エルミート演算子**に対応するため、固有値は**実数**となり、物理的に意味のある値となります。

期待値

1. 期待値の計算

- 期待値 $\langle \hat{F} \rangle$ は、状態 $|\psi\rangle$ における観測量 \hat{F} の**平均測定値**を表します。
- 期待値は、**定義式** $\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle$ で計算されます。
- 期待値は、固有値 f_i とその確率 P_i を用いた**加重平均**として計算されます。： $\langle \hat{F} \rangle = \sum_i f_i P_i$

2. 物理的な意味と性質

- 期待値は、観測量の測定結果の統計的な平均であり、量子力学における物理量の予測値として重要です。
- 期待値は、系の状態 $|\psi\rangle$ に完全に依存します。

3. ブロッホ球における期待値

- スピン $1/2$ 系の状態はブロッホ球上の点で表されます。
- パウリ演算子 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の期待値は、ブロッホ球上の状態ベクトルの座標 $\vec{r} = (\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle)$ に対応します。