7.8 エルミート演算子の交換と同時固有状態の解説

この章は、量子力学における「**同時に測定可能な物理量**」という非常に重要な概念を扱っています。その鍵となるのは、2 つの演算子が「**交換するかどうか**」です。

1. 核心原理：交換条件

2 つのエルミート演算子 $\hat{F}$ と $\hat{G}$ が**交換する**とは、それらの**交換子**がゼロになることです。

$$[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = \hat{0}$$

- 物理的な意味：$\hat{F}$ と $\hat{G}$ に対応する物理量 F と G の測定順序を入れ替えても、系の状態に影響を与えないことを意味します。
- 測定可能性：この条件が成立するとき、物理量 F と G は**同時に正確に測定可能**である、すなわち、**同時固有状態**が存在します。

2. 同時固有状態（同時対角化）

$\hat{F}$ と $\hat{G}$ が交換する場合、それらは共通の**固有ベクトル**を持つことができます。これを**同時固有ベクトル**と呼びます。

$$\hat{F}\,|\lambda, \mu\rangle = \lambda\,|\lambda, \mu\rangle \quad \text{かつ} \quad \hat{G}\,|\lambda, \mu\rangle = \mu\,|\lambda, \mu\rangle$$

- 状態 $|\lambda, \mu\rangle$ は、$\hat{F}$ の固有値 λ と $\hat{G}$ の固有値 μ を**両方**確定的に持つ状態です。
- 数学的意義：これは、$\hat{F}$ と $\hat{G}$ を表現する行列が、**共通の基底**（同時固有ベクトル）によって**同時に**対角化できることを意味します。

3. 非交換（非同時測定）との対比

もし $\hat{F}$ と $\hat{G}$ が交換しない（$[\hat{F}, \hat{G}] \neq \hat{0}$）場合、同時固有ベクトルは存在せず、**不確定性原理**が適用されます。

- 例：位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の交換子は $i\hbar$ に比例します。

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

- 結果：位置と運動量は同時に正確に測定できず、一方を正確に測定しようとすると、もう一方の不確かさが必ず増大します。