7.9 ベクトルの確率解釈の解説：なぜ確率が出てくるのか

7.9 章は、量子力学における「**観測**」と「**確率**」の関係を数学的に確立する非常に重要なセクションです。中心的なアイデアは、**「状態ベクトルを展開すること」**と**「展開係数を確率と見なすこと」**です。

1. 量子状態の展開（基底への射影）

量子状態 $|\psi\rangle$ は、観測したい物理量 $\hat{F}$ の固有ベクトル $\{|\lambda_n\rangle\}$ を**基底**として、次のように展開できます。

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\lambda_n\rangle = \sum_n \langle\lambda_n|\psi\rangle |\lambda_n\rangle$$

- **展開係数** c_n: 状態 $|\psi\rangle$ を固有ベクトル $|\lambda_n\rangle$ に射影した成分であり、$c_n = \langle\lambda_n|\psi\rangle$ で与えられます。
- **役割**: c_n は、状態 $|\psi\rangle$ の中に、固有状態 $|\lambda_n\rangle$ がどれだけ含まれているか（どれだけ類似しているか）を示します。

2. 確率解釈の導入（ボルンの規則）

ここで**確率振幅**という概念が突然出てきますが、これは量子力学の**根本原理（公理）**として導入される解釈です。

2.1. 確率振幅 $\langle\lambda_n|\psi\rangle$

展開係数 $c_n = \langle\lambda_n|\psi\rangle$ は「**確率振幅**」と呼ばれます。

$$c_n = \langle\lambda_n|\psi\rangle$$

この値そのものは確率ではありませんが、**確率の平方根**のような性質を持ちます。

2.2. 観測確率 $|c_n|^2$

状態 $|\psi\rangle$ にある系に対して物理量 $\hat{F}$ を観測したとき、固有値 λ_n が得られる**確率** P_n は、確率振幅の**絶対値の 2 乗**として定義されます（ボルンの規則）。

$$P_n = |c_n|^2 = |\langle\lambda_n|\psi\rangle|^2$$

- **物理的意味**: **観測**という行為によって、状態 $|\psi\rangle$ は特定の固有状態 $|\lambda_n\rangle$ へと収縮（射影）します。その収縮が起こる「強さ」を、この確率が表しています。

3. 全確率の保存（ノルムの要請）

物理量 $\hat{F}$ の固有ベクトルが**正規直交基底**をなすとき、すべての固有値 λ_n を観測する確率の合計は 1 になります。

$$\sum_n P_n = \sum_n |\langle \lambda_n|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

- この条件は、**状態ベクトル $|\psi\rangle$ のノルム（長さ）が 1 に規格化されている**（$\langle\psi|\psi\rangle = 1$）という要請によって保証されます。これは、必ず何らかの結果が 100% の確率で観測されるという物理的な要求に対応します。