Modele liniowe

Michał Kos

Uniwersytet Wrocławski

Plan wykładu

1. Obszar ufności dla β_0 i β_1
2. Równoczesne przedziały ufności dla kilku wartości $E(Y_h) = \mu_h$
3. Równoczesne przedziały predykcyjne dla kilku wartości Y_h
4. Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia
5. Kalibracja
6. Regresja liniowa prosta – zapis macierzowy

Table of Contents

1. Obszar ufności dla β_0 i β_1
2. Równoczesne przedziały ufności dla kilku wartości $E(Y_h) = \mu_h$
3. Równoczesne przedziały predykcyjne dla kilku wartości Y_h
4. Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia
5. Kalibracja
6. Regresja liniowa prosta – zapis macierzowy

Obszar ufności dla β_0 i β_1

Poznaliśmy wcześniej teorię dotyczącą tzw. przedziałów ufności dla parametrów β_0 i β_1.

Czasami jednak chcemy znać równoczesne przedziały ufności dla obu parametrów. Mowimy w takiej sytuacji o tzw. "obszarze ufności", czyli prostokącie w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o takiej własności, że wektor parametrów $(\beta_0, \beta_1)' \in \mathbb{R}^2$ z prawdopodobieństwem o wartości przynajmniej $1-\alpha$ znajduje się w prostokącie $(c_0, d_0) \times (c_1, d_1)$:

$$1-\alpha \leqslant P\left((\beta_0, \beta_1)' \in (c_0, d_0) \times (c_1, d_1)\right) =$$

$$= P(c_0 \leqslant \beta_0 \leqslant d_0 \quad \wedge \quad c_1 \leqslant \beta_1 \leqslant d_1)$$

oraz boki prostokąta ($d_0 - c_0$ i $d_1 - c_1$) są możliwie krótkie.

Nierówność Bonferroni–ego

Jedna z metod wyznaczania takiego obszaru wykorzystuje elementarny rachunek zbiorów :

$$P(\beta_0 \in (c_0, d_0) \;\wedge\; \beta_1 \in (c_1, d_1)) = 1 - P(\beta_0 \notin (c_0, d_0) \;\vee\; \beta_1 \notin (c_1, d_1))$$

$P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c)$; prawo De Morgana $(\cap_{i=1}^n A_i)^c = \cup_{i=1}^n A_i^c$

z kolei:

$$P(\beta_0 \notin (c_0, d_0) \;\vee\; \beta_1 \notin (c_1, d_1)) \leqslant P(\beta_0 \notin (c_0, d_0)) + P(\beta_1 \notin (c_1, d_1))$$

$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$, ogólniej $P(\cup_{i=1}^n A_i) \leqslant \sum_{i=1}^n P(A_i)$

i w konsekwencji:

$$P(\beta_0 \in (c_0, d_0) \;\wedge\; \beta_1 \in (c_1, d_1)) \geqslant 1 - P(\beta_0 \notin (c_0, d_0)) - P(\beta_1 \notin (c_1, d_1))$$

Powyższe relacja pokazuje związek pomiędzy obszarem ufności dla wektora parametrów $(\beta_0, \beta_1)'$ i dopełnieniami przedziałów ufności dla każdego parametru osobno.

Obszar ufności Bonferroni–ego (1)

Na podstawie uzyskanej relacji

$$P(\beta_0 \in (c_0, d_0) \ \wedge \ \beta_1 \in (c_1, d_1)) \geqslant 1 - P(\beta_0 \notin (c_0, d_0)) - P(\beta_1 \notin (c_1, d_1))$$

możemy w łatwy sposób wyznaczyć obszar ufności przy użyciu przedziałów ufności. Wystarczy by każdy z przedziałów ufności był o współczynniku ufności $1 - \alpha/2$. Wówczas:

$$1 - \alpha/2 \leqslant P(\beta_i \in (\tilde{c}_i, \tilde{d}_i)) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha/2 \geqslant P(\beta_i \notin (\tilde{c}_i, \tilde{d}_i)) \qquad i = 0, 1$$

i w konsekwencji obszar ufności będzie o współczynniku ufności $1 - \alpha$:

$$P(\beta_0 \in (\tilde{c}_0, \tilde{d}_0) \ \wedge \ \beta_1 \in (\tilde{c}_1, \tilde{d}_1)) \geqslant 1 - \alpha/2 - \alpha/2 = 1 - \alpha$$

Obszar ufności Bonferroni–ego (2)

Podsumowując, jeżeli chcemy wyznaczyć obszaru ufności dla wektora parametrów $(\beta_0, \beta_1)'$ o współczynniku ufności $1 - \alpha$ przy użyciu metody Bonferroniego, wystarczy wyznaczyć klasyczne przedziały ufności dla każdego parametru osobno o współczynniku ufności $1 - \alpha/2$.

Obszar ufności Bonferroni–ego (2)

Podsumowując, jeżeli chcemy wyznaczyć obszaru ufności dla wektora parametrów $(\beta_0, \beta_1)'$ o współczynniku ufności $1-\alpha$ przy użyciu metody Bonferroniego, wystarczy wyznaczyć klasyczne przedziały ufności dla każdego parametru osobno o współczynniku ufności $1-\alpha/2$.

Warto o tym myśleć w taki sposób, że dysponujemy pewnym budżetem na poziomie α na błędną decyzję w sprawie obu parametrów równocześnie i rozdysponowujemy ów budżet po równo na każdy parametr z osobna $(\alpha/2)$.

Obszar ufności Bonferroni–ego (3)

Przykład
Niech $\alpha = 0.05$. Wówczas przedziały ufności dla każdego parametru osobno tworzymy dla $\alpha/2$:

$$\hat{\beta}_i \pm t_c s(\hat{\beta}_i) \quad i = 0, 1$$

gdzie t_c jest kwantylem rzędu $1 - \alpha/4$ z rozkładu z studenta z $n - 2$ stopniami swobody $(t_c = t^*(1 - \alpha/4, n - 2))$.

Obszar ufności Bonferroni–ego (3)

Przykład
Niech $\alpha = 0.05$. Wówczas przedziały ufności dla każdego parametru osobno tworzymy dla $\alpha/2$:

$$\hat{\beta}_i \pm t_c s(\hat{\beta}_i) \quad i = 0, 1$$

gdzie t_c jest kwantylem rzędu $1 - \alpha/4$ z rozkładu z studenta z $n - 2$ stopniami swobody $(t_c = t^*(1 - \alpha/4, n - 2))$.

Dlaczego $1 - \alpha/4$?

Obszar ufności Bonferroni–ego (3)

Przykład
Niech $\alpha = 0.05$. Wówczas przedziały ufności dla każdego parametru osobno tworzymy dla $\alpha/2$:

$$\hat{\beta}_i \pm t_c s(\hat{\beta}_i) \quad i = 0, 1$$

gdzie t_c jest kwantylem rzędu $1 - \alpha/4$ z rozkładu z studenta z $n - 2$ stopniami swobody ($t_c = t^*(1 - \alpha/4, n - 2)$).

Dlaczego $1 - \alpha/4$?

Poziom istotności jest równy $\tilde{\alpha} = \alpha/2$ i mamy dwa końce przedziału ufności. Stąd dla klasycznego przedział ufności t_c to kwantyl rzędu $1 - \tilde{\alpha}/2 = 1 - \alpha/4$.

Uwagi

1. metodę Bonferroniego łatwo uogólnić na więcej niż dwa parametry. Załóżmy, że parametrów jest m (regresja wieloraka). Wówczas dzilimy budżet α na liczbę parametrów m i przedziały ufności dla każdego parametru osobno tworzymy dla α/m; $(t_c = t^*(1-\alpha/(2m), n-m))$.

Uwagi

1. metodę Bonferroniego łatwo uogólnić na więcej niż dwa parametry. Załóżmy, że parametrów jest m (regresja wieloraka). Wówczas dzilimy budżet α na liczbę parametrów m i przedziały ufności dla każdego parametru osobno tworzymy dla α/m; $(t_c = t^*(1-\alpha/(2m), n-m))$.
2. metodę Bonferroniego możemy łatwo zastosować do innych zagadnień – elementarny rachunek prawdopodobieństwa + prawa De Morgana dla rachunku na zbiorach.

Uwagi

1. metodę Bonferroniego łatwo uogólnić na więcej niż dwa parametry. Załóżmy, że parametrów jest m (regresja wieloraka). Wówczas dzilimy budżet α na liczbę parametrów m i przedziały ufności dla każdego parametru osobno tworzymy dla α/m; $(t_c = t^*(1-\alpha/(2m), n-m))$.
2. metodę Bonferroniego możemy łatwo zastosować do innych zagadnień – elementarny rachunek prawdopodobieństwa + prawa De Morgana dla rachunku na zbiorach.
3. metoda Bonferroniego nie jest optymalna. Korzysta z nierównosci typu $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B)$, zatem pomija wpływ zdarzenia $A \cap B$. Oznacza to że można znaleźć mniejszy "prostokąt".

Uwagi

1. metodę Bonferroniego łatwo uogólnić na więcej niż dwa parametry. Załóżmy, że parametrów jest m (regresja wieloraka). Wówczas dzilimy budżet α na liczbę parametrów m i przedziały ufności dla każdego parametru osobno tworzymy dla α/m; $(t_c = t^*(1-\alpha/(2m), n-m))$.
2. metodę Bonferroniego możemy łatwo zastosować do innych zagadnień – elementarny rachunek prawdopodobieństwa + prawa De Morgana dla rachunku na zbiorach.
3. metoda Bonferroniego nie jest optymalna. Korzysta z nierównosci typu $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B)$, zatem pomija wpływ zdarzenia $A \cap B$. Oznacza to że można znaleźć mniejszy "prostokąt".
4. Z teorii wiemy, że optymalnym obszarem E takim, że $P((\beta_0, \beta_1)' \in E) \geqslant 1 - \alpha$ jest elipsa $((\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)'$ pochodzi z rozkładu normalnego).

Table of Contents

1. Obszar ufności dla β_0 i β_1
2. Równoczesne przedziały ufności dla kilku wartości $E(Y_h) = \mu_h$
3. Równoczesne przedziały predykcyjne dla kilku wartości Y_h
4. Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia
5. Kalibracja
6. Regresja liniowa prosta – zapis macierzowy

Równoczesne przedziały ufności

Przyjmijmy, że interesują nas równoczesne przedziały ufności dla m podpopulacji $\mu_1, ..., \mu_m$ o łącznym współczynniku ufności $1 - \alpha$.

Równoczesne przedziały ufności

Przyjmijmy, że interesują nas równoczesne przedziały ufności dla m podpopulacji $\mu_1, ..., \mu_m$ o łącznym współczynniku ufności $1-\alpha$.

Zastosowania metody Bonferroniego sugeruje użycie przedziałów ufności postaci:

$$\hat{\mu}_h \pm t_c s(\hat{\mu}_h)$$

gdzie: $t_c = t^*(1-\alpha/(2m), n-2)$.

Równoczesne przedziały ufności

Przyjmijmy, że interesują nas równoczesne przedziały ufności dla m podpopulacji $\mu_1, ..., \mu_m$ o łącznym współczynniku ufności $1 - \alpha$.

Zastosowania metody Bonferroniego sugeruje użycie przedziałów ufności postaci:

$$\hat{\mu}_h \pm t_c s(\hat{\mu}_h)$$

gdzie: $t_c = t^*(1 - \alpha/(2m), n - 2)$.

Z drugiej strony na podstawie teorii dotyczącej pasma ufności dla prostej regresji możmy skorzystać z przedziałów ufności postaci:

$$\hat{\mu}_h \pm Ws(\hat{\mu}_h)$$

gdzie $W^2 = 2F(1 - \alpha, 2, n - 2)$.

Równoczesne przedziały ufności

Przyjmijmy, że interesują nas równoczesne przedziały ufności dla m podpopulacji $\mu_1, ..., \mu_m$ o łącznym współczynniku ufności $1 - \alpha$.

Zastosowania metody Bonferroniego sugeruje użycie przedziałów ufności postaci:

$$\hat{\mu}_h \pm t_c s(\hat{\mu}_h)$$

gdzie: $t_c = t^*(1 - \alpha/(2m), n - 2)$.

Z drugiej strony na podstawie teorii dotyczącej pasma ufności dla prostej regresji możmy skorzystać z przedziałów ufności postaci:

$$\hat{\mu}_h \pm Ws(\hat{\mu}_h)$$

gdzie $W^2 = 2F(1 - \alpha, 2, n - 2)$.

Oczywiście powinniśmy wybrać te przedziały, dla których stała stojąca przy $s(\hat{\mu}_h)$ (t_c lub W) jest mniejsza. Wartość stałej t_c zależy od liczby badanych podpopulacji m. Dla $m = 1$ zachodzi $t_c \leqslant W$, ale gdy m jest dostatecznie duże relacja się odwróci ($t_c \geqslant W$)

Table of Contents

1. Obszar ufności dla β_0 i β_1
2. Równoczesne przedziały ufności dla kilku wartości $E(Y_h) = \mu_h$
3. Równoczesne przedziały predykcyjne dla kilku wartości Y_h
4. Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia
5. Kalibracja
6. Regresja liniowa prosta – zapis macierzowy

Równoczesne przedziały predykcyjne

Przyjmijmy, że interesują nas równoczesne przedziały predykcyjne dla m podpopulacji $Y_1, ..., Y_m$ o łącznym współczynniku $1 - \alpha$.

Metoda Bonferroniego sugeruje użycie przedziałów predykcyjnych postaci:

$$\hat{\mu}_h \pm t_c s(pred)$$

gdzie: $t_c = t^*(1 - \alpha/(2m), n - 2)$ jest kwantylem rzędu $1 - \alpha/(2m)$ z rozkładu studenta o $n - 2$ stopniach swobody.

Table of Contents

1. Obszar ufności dla β_0 i β_1
2. Równoczesne przedziały ufności dla kilku wartości $E(Y_h) = \mu_h$
3. Równoczesne przedziały predykcyjne dla kilku wartości Y_h
4. Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia
5. Kalibracja
6. Regresja liniowa prosta – zapis macierzowy

Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia

Czasami badane zjawisko sugeruje, że teoretyczny model powinien być postaci:

$$Y_i = \beta_1 X_i + \epsilon_i \quad i = 1, ..., n$$

Brak Interceptu!!!

Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia

Czasami badane zjawisko sugeruje, że teoretyczny model powinien być postaci:

$$Y_i = \beta_1 X_i + \epsilon_i \quad i = 1, ..., n$$

Brak Interceptu!!!

Przykład
Z fizyki wiemy, że natężenie prądu (I) jest proporcjonalne do napięcia (U) przyłożonego do przewodu:

$$I = U/R$$

Rozsądnym w takiej sytuacji wydaje się użycie teoretycznego modelu bez Interceptu:

$$I_i = \beta_1 U_i + \epsilon_i \quad i = 1, ..., n$$

Zakłada on jednak brak występowania tzw. błędu systematycznego.

Przykład c.d.

Z błędem systematycznym mamy do czynienia w sytuacji, w której dokonywane pomiary są systematycznie zawyżane (lub niedoszacowywane). W naszym przykładzie przyczyną takiego zjawiska może być np. niedokładnie skalibrowany amperomierz. W takiej sytuacji model teoretyczny

$$I_i = \beta_1 U_i + \epsilon_i \quad i = 1, ..., n$$

wciąż jest prawdziwy, przy czym wyrazem występowania błędu systematycznego jest to że $\epsilon_i \sim^{iid} N(\mu, \sigma^2)$ gdzie np. $\mu > 0$ (systematyczne zawyżanie natężenia I).

Przykład c.d.

Z błędem systematycznym mamy do czynienia w sytuacji, w której dokonywane pomiary są systematycznie zawyżane (lub niedoszacowywane). W naszym przykładzie przyczyną takiego zjawiska może być np. niedokładnie skalibrowany amperomierz. W takiej sytuacji model teoretyczny

$$I_i = \beta_1 U_i + \epsilon_i \quad i = 1, ..., n$$

wciąż jest prawdziwy, przy czym wyrazem występowania błędu systematycznego jest to że $\epsilon_i \sim^{iid} N(\mu, \sigma^2)$ gdzie np. $\mu > 0$ (systematyczne zawyżanie natężenia I).

Chcąc wyrazić powyższy model w języku modeli liniowych uwzględniając błąd systematyczny otrzymujemy:

$$I_i = \beta_1 U_i + (\mu + \tilde{\epsilon}_i) = \beta_0 + \beta_1 U_i + \tilde{\epsilon}_i \quad i = 1, ..., n$$

gdzie Intercept opisuje błąd systematyczny ($\beta_0 = \mu$) oraz ciąg $\tilde{\epsilon}_1, ..., \tilde{\epsilon}_n$ spełnia założenia modelu liniowego (iid; $\sim N(0, \sigma^2)$).

Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia – wnioski

Na podstawie powyższego przykładu widzimy, że generalnie stosowanie teoretycznego modelu bez Interceptu:

$$Y_i = \beta_1 X_i + \epsilon_i \quad i = 1, ..., n$$

jest złym pomysłem.

Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia – wnioski

Na podstawie powyższego przykładu widzimy, że generalnie stosowanie teoretycznego modelu bez Interceptu:

$$Y_i = \beta_1 X_i + \epsilon_i \quad i = 1, ..., n$$

jest złym pomysłem.

Dodatkowo pojawiają się pewne problemy ze współczynnikiem determinacji R^2 i innymi statystykami.

Table of Contents

1. Obszar ufności dla β_0 i β_1
2. Równoczesne przedziały ufności dla kilku wartości $E(Y_h) = \mu_h$
3. Równoczesne przedziały predykcyjne dla kilku wartości Y_h
4. Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia
5. Kalibracja
6. Regresja liniowa prosta – zapis macierzowy

Kalibracja

Czasami chcemy ustalić dla jakiej podpopulacji (X_h) wartość zmiennej zależnej Y_h będzie wynosić Q. Innymi słowy chcemy wyznaczyć $\hat{X}_h$, gdy $Y_h = Q$.

Kalibracja

Czasami chcemy ustalić dla jakiej podpopulacji (X_h) wartość zmiennej zależnej Y_h będzie wynosić Q. Innymi słowy chcemy wyznaczyć $\hat{X}_h$, gdy $Y_h = Q$.

Aby wyznaczyć estymator $\hat{X}_h$ przekształcamy równanie na prostą regresji:

$$\hat{X}_h = (Y_h - \hat{\beta}_0)/\hat{\beta}_1 = (Q - \hat{\beta}_0)/\hat{\beta}_1$$

Można znaleźć aproksymację dla przedziału ufności dla X_h.

Table of Contents

1. Obszar ufności dla β_0 i β_1
2. Równoczesne przedziały ufności dla kilku wartości $E(Y_h) = \mu_h$
3. Równoczesne przedziały predykcyjne dla kilku wartości Y_h
4. Regresja liniowa prosta przechodząca przez początek układu odniesienia
5. Kalibracja
6. Regresja liniowa prosta – zapis macierzowy

Model teoretyczny w postaci skalarnej

Model teoretyczny w postaci skalarnej

Poznaliśmy już teoretyczny model dla regresji liniowej prostej w zapisie skalarnym:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i \quad i = 1, ..., n$$

gdzie $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ – ciąg niezależnych zmiennych losowych z rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji σ^2.

Model ten bardzo często zapisywany jest alternatywnie w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_1 X_1 \\ \beta_0 + \beta_1 X_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

Model teoretyczny w postaci macierzowej – oznaczenia

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}; \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}; \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

gdzie:

Y nazywamy wektorem odpowiedzi,

$\mathbb{X}$ nazywamy macierzą planu lub eksperymentu,

β nazywamy wektorem parametrów,

ϵ nazywamy wektorem błędów losowych.

Model teoretyczny w postaci macierzowej – oznaczenia

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}; \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}; \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

gdzie:
Y nazywamy wektorem odpowiedzi,
$\mathbb{X}$ nazywamy macierzą planu lub eksperymentu,
β nazywamy wektorem parametrów,
ϵ nazywamy wektorem błędów losowych.

Przy użyciu powyższych oznaczeń, model teoretyczny w zapisie macierzowym ma postać:

$$\begin{array}{r|cccccc} \text{równanie} & Y & = & \mathbb{X} & \beta & + & \epsilon \\ \text{wymiary} & n \times 1 & & n \times 2 & 2 \times 1 & & n \times 1 \end{array}$$

Model teoretyczny w postaci macierzowej

Model teoretyczny w postaci macierzowej

Podsumowując, model teoretyczny dla regresji liniowej prostej w zapisie macierzowym ma postać:

$$Y = \mathbb{X}\beta + \epsilon$$

gdzie $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem losowym z rozkładu normalnego $N(0_n, \sigma^2 \mathbb{I}_n)$.

Model teoretyczny w postaci macierzowej

Podsumowując, model teoretyczny dla regresji liniowej prostej w zapisie macierzowym ma postać:

$$Y = \mathbb{X}\beta + \epsilon$$

gdzie $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem losowym z rozkładu normalnego $N(0_n, \sigma^2\mathbb{I}_n)$.

Uwaga o założeniach:

Ze względu na własności rozkładu normalnego założenie $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)' \sim N(0, \sigma^2\mathbb{I})$ (zapis macierzowy) jest równoważne założeniu, że $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych i każda pochodzi z rozkładu $N(0, \sigma^2)$ (zapis skalarny).

Własności wektora odpowiedzi Y

Tw. 1

Jeżeli $B = c + DA \in \mathbb{R}^m$, jest afinicznym przekształceniem wektora losowego $A \sim N(\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^n$, gdzie $c \in \mathbb{R}^m$ jest deterministycznym wektorem oraz $D \in \mathbb{M}_{m \times n}$ jest deterministyczną macierzą, wówczas:

$$B \sim N(c + D\mu, D\Sigma D')$$

Na podstawie Tw. 1 otrzymujemy w natychmiastowy sposób że:

$$Y \sim N(\mathbb{X}\beta, \sigma^2 \mathbb{I})$$

Czyli:

1. Wektor Y pochodzi z n–wymiarowego rozkładu normalnego,
2. Wartość oczekiwana jest liniowym przekształceniem: $E(Y) = \mathbb{X}\beta$,
3. Macierz kowariancji jest postaci: $Cov(Y) = \sigma^2 \mathbb{I}$:
    - $Y_1, \dots, Y_n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o stałej wariancji σ^2.