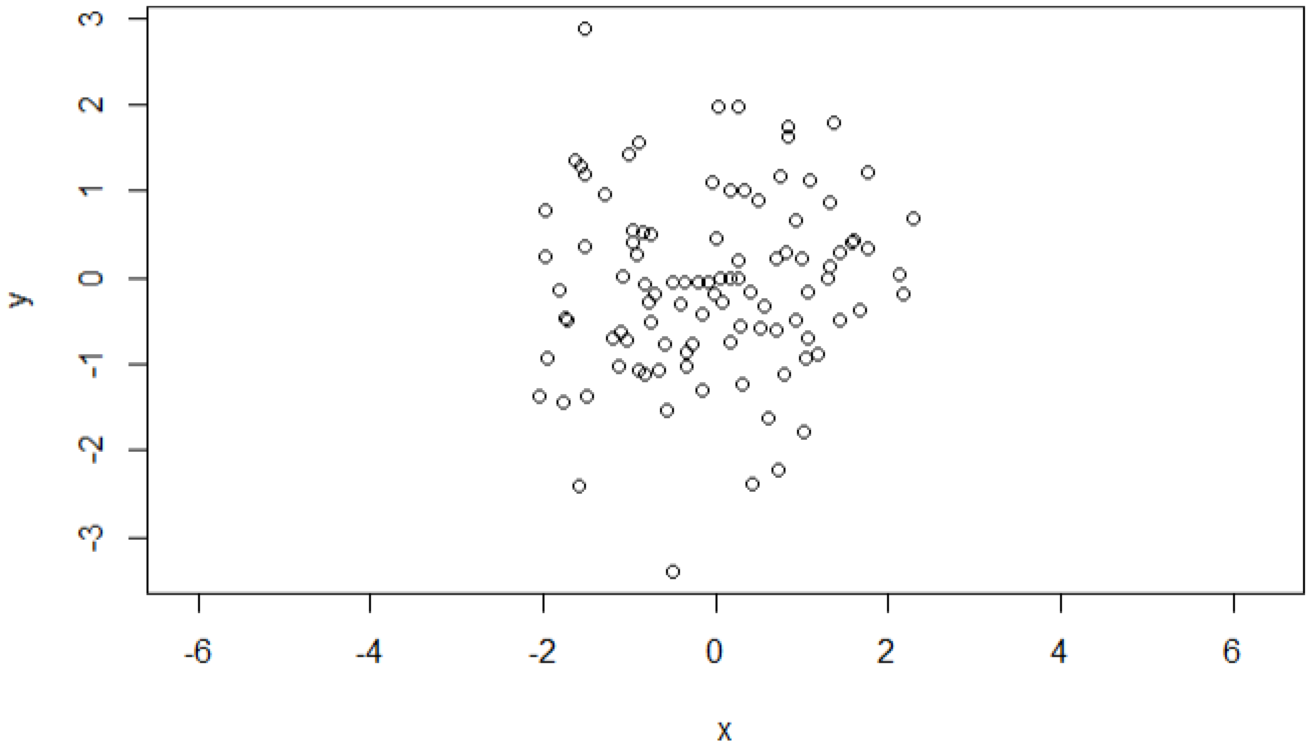
Zadanie 1

Korzystając z funkcji rnorm w R wygeneruj 100 wektorów losowych z rozkładu dwuwymiarowego normalnego $N(0, I)$ i zaznacz je na płaszczyźnie.

```
x = rnorm(100)
y = rnorm(100)
plot(x, y, asp=1)
```



Wygenerowane wektory losowe z rozkładu dwuwymiarowego normalnego są rozproszone, co może świadczyć o braku korelacji pomiędzy zmiennymi losowowymi.

Zadanie 2

Wyznacz przekształcenia liniowe, które przekształcą wyżej otrzymaną chmurę punktow w chmurę z rozkładu $N(\mu, \Sigma)$:

1.

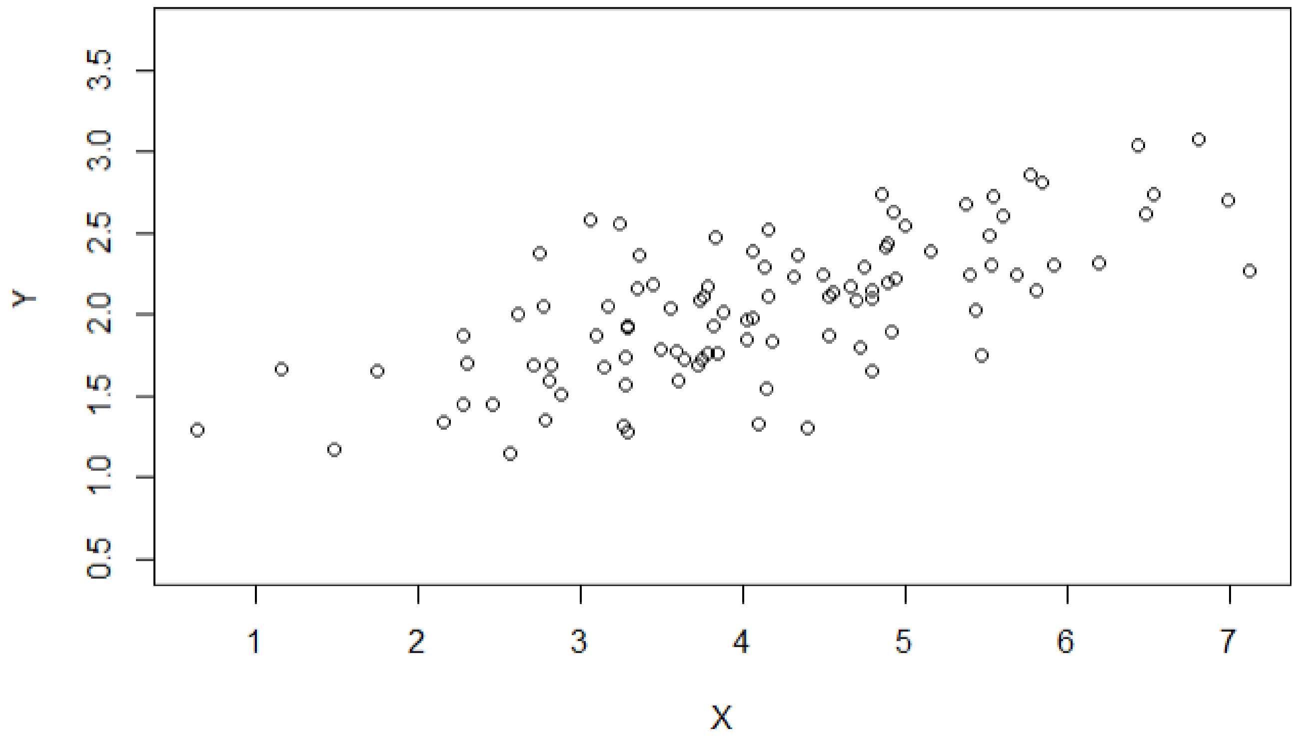
$$\mu = (4, 2)$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

Musimy wyznaczyć:

- macierz A, taką że $\Sigma = AA^T$ - w tym celu skorzystam z rozkładu choleskiego używając funkcji *chol*,
- wektor B, taki że $\mu = A[0,0]^T + B$ - będzie to więc wektor $[4,2]^T$.

```
zad2 <- function(B, sigma, x, y){
  X = rbind(x, y)
  A = chol(sigma)
  transformed_X = A %*% X + B
  plot(transformed_X[1,], transformed_X[2,], asp=1)
}

B = c(4, 2)
sigma = rbind(c(1, 0.9), c(0.9, 1))
zad2(B, sigma, x, y)
```



Możemy zauważyć, że zmienne losowe są skorelowane - wraz ze wzrostem wartości X, wzrasta wartość Y - co powinno wynikać z kowariancji 0.9 pomiędzy nimi.
Chmura punktów skupiona jest wokół punktu $(4,2)$, co wynika z faktu, że μ jest wektorem $[4,2]^T$, a wariancje X oraz Y wynoszą 1.

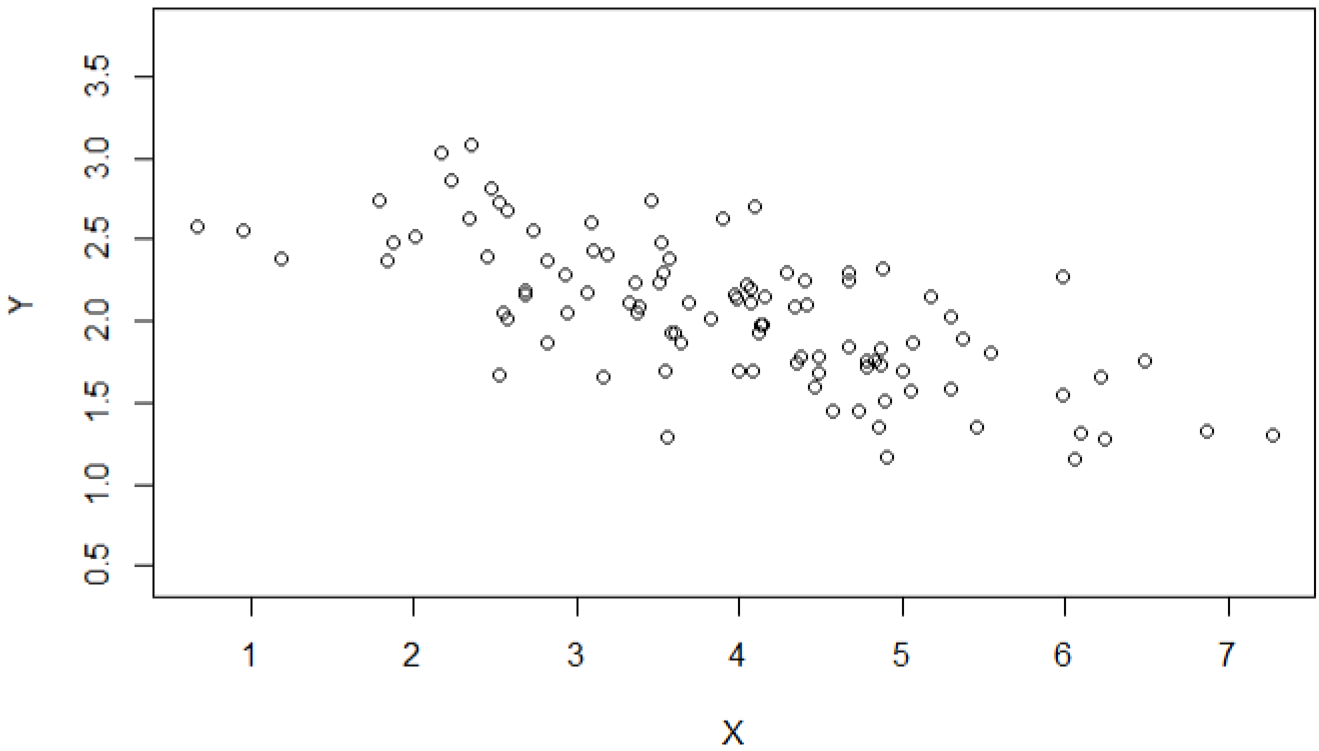
Kolejne przypadki rozwiązałem analogicznie.

2.

$$\mu = (4, 2)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0.9 \\ -0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

```
B = c(4, 2)
sigma = rbind(c(1, -0.9), c(-0.9, 1))
zad2(B, sigma, x, y)
```



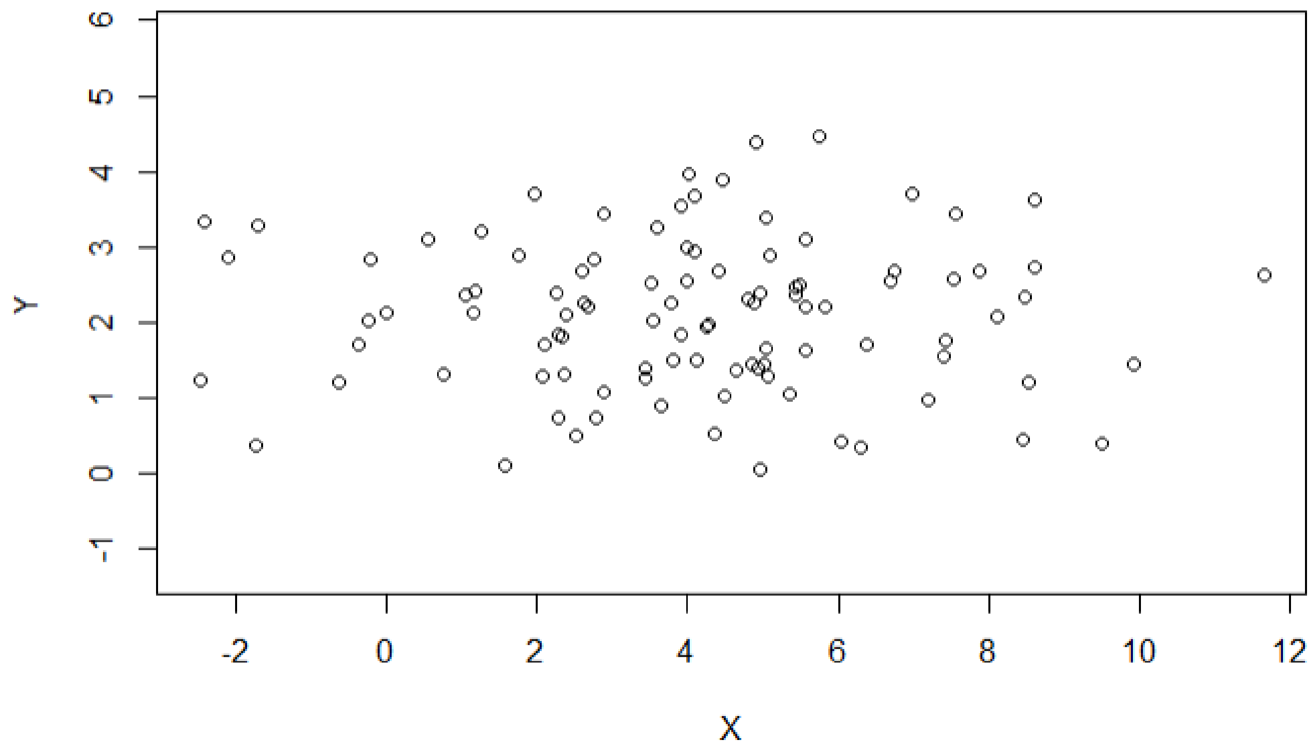
Otrzymany wykres jest podobny do wykresu z poprzedniego przypadku. Z jedną różnicą - wraz ze wzrostem wartości X maleje wartość Y, co wynika z faktu, że kowariancja pomiędzy nimi jest tym razem ujemna, wynosi -0.9.

3.

$$\mu = (4, 2)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
B = c(4, 2)
sigma = rbind(c(9, 0), c(0, 1))
zad2(B, sigma, x, y)
```



Otrzymana chmura punktów jest rozproszona, punkty nie układają się wzdłuż prostej o niezerowym nachyleniu, co może świadczyć o braku korelacji pomiędzy zmiennymi losowymi. Wynika to z faktu, że $\Sigma[1,2] = 0$.

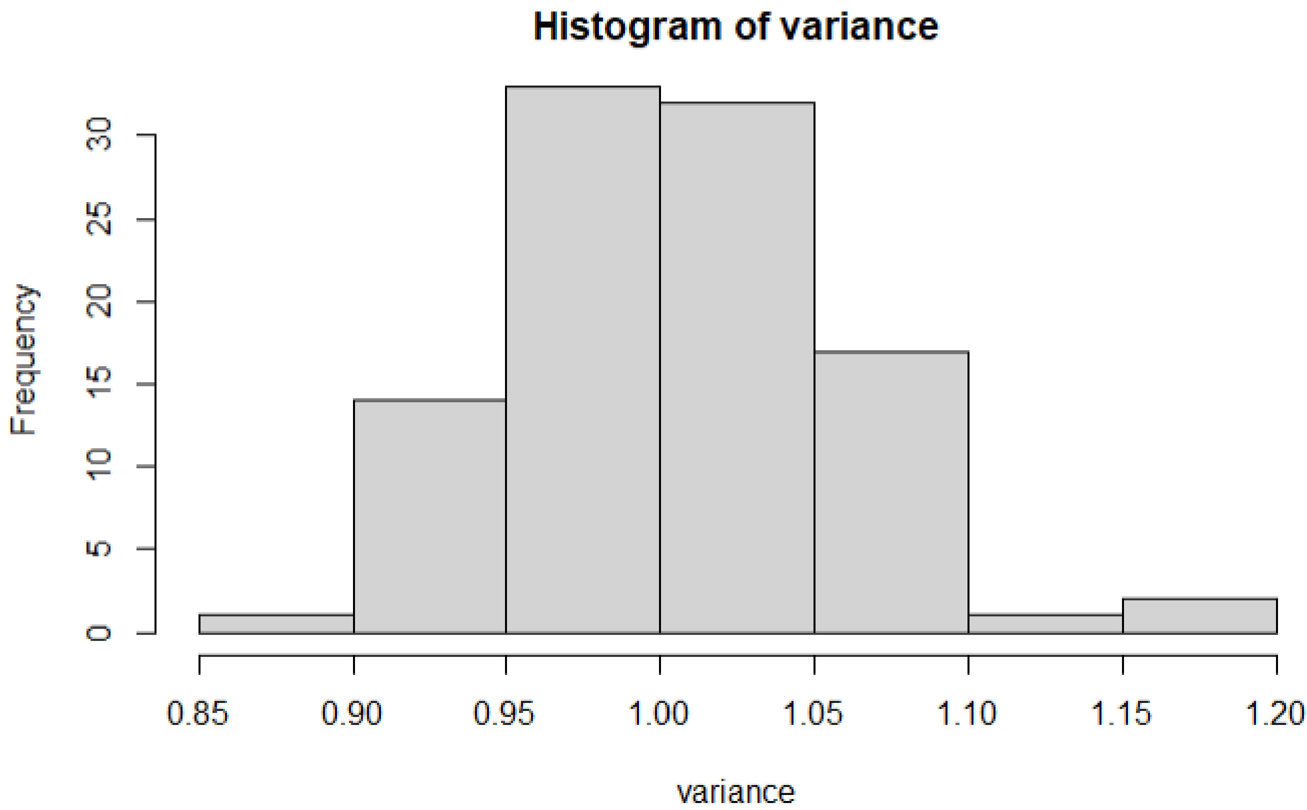
Zadanie 3

Korzystając z funkcji rnorm w R wygeneruj 200 wektorów losowych z rozkładu wielowymiarowego normalnego $N(0, I_{100\times 100})$. Uzyskane dane zapisz w macierzy $X_{200\times 100}$, której wiersze zawierają kolejne wygenerowane wektory losowe. Następnie wyznacz macierz A tak, aby macierz $\tilde{X} = XA$ zawierała 200 wektorów z rozkładu wielowymiarowego normalnego $N(0, \Sigma_{100\times 100})$, gdzie $\Sigma(i,i) = 1$ i $\Sigma(i,j) = 0.9$ dla $i \neq j$. Zweryfikuj wyniki wyliczając średnią i rysując histogram próbkowych wariancji współrzędnych wektora $\tilde{X}$ a także próbkowych kowariancji między różnymi współrzędnymi tego wektora.

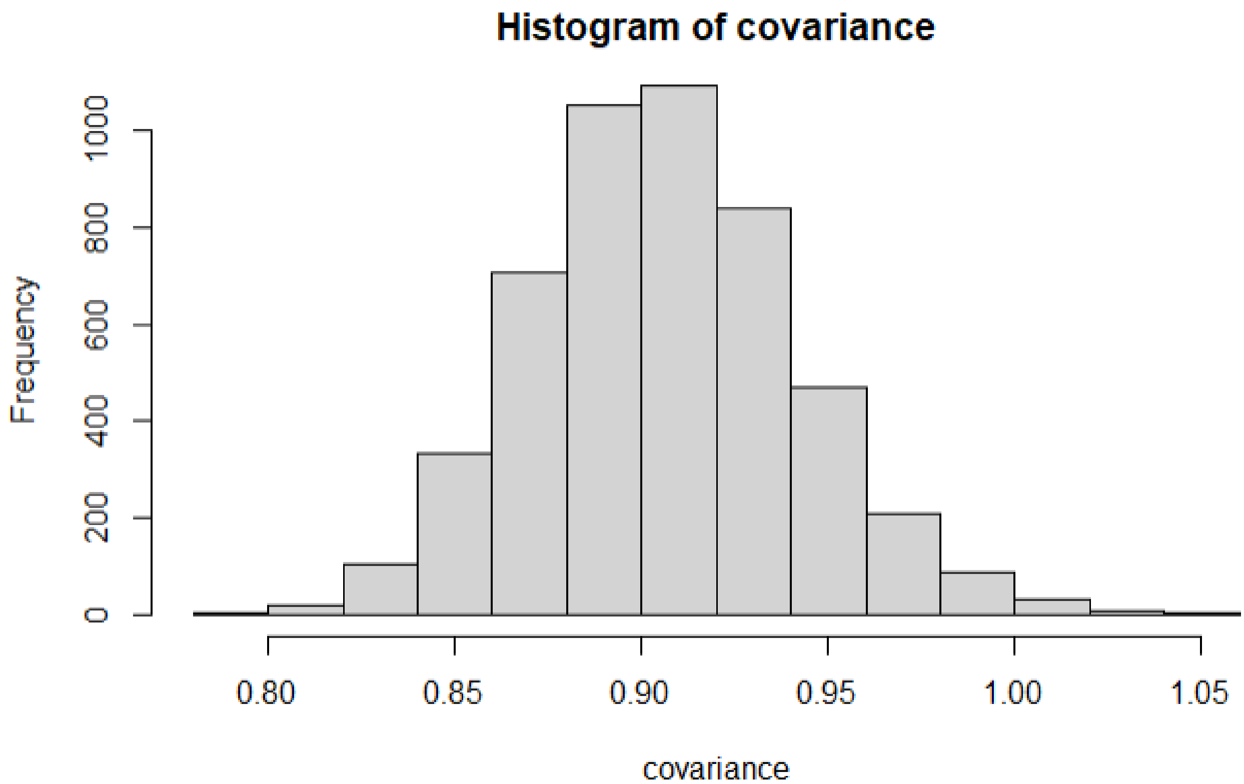
Po wygenerowaniu 200 wektorów losowych, skorzystam z rozkładu choleskiego do wyznaczenia macierzy A, takiej że $AA^T = \Sigma$, co umożliwi uzyskanie macierzy $\tilde{X}$ zawierającej 200 wektorów z rozkładu wielowymiarowego normalnego $N(0, \Sigma_{100x100})$ po wykonaniu przekształcenia XA.
W celu wyznaczenia wariancji i kowariancji, skorzystam z funkcji *cov*.

```
nrow = 200
ncol = 100
X = matrix(rnorm(100*200, mean=0, sd=1), nrow=nrow, ncol=ncol)
sigma = matrix(0.9, ncol, ncol) + diag(0.1, ncol, ncol)
A = chol(sigma)
X_dash = X %*% A
cov_matrix = cov(X_dash)
```

Średnia wariancji wyniosła 1.005096.



Średnia kowariancji wyniosła 0.9057194.



Obie wartości wynikają z faktu, że macierz Σ zawiera jedynki na głównej przekątnej (wariancje zmiennych losowych), a 0.9 na pozostałych miejscach (kowariancje pomiędzy zmiennymi losowymi).