4471028: 프로그래밍언어

Lecture 1 — 귀납 정의
Inductive Definition

임현승
2020 봄학기

Reading Materials

- 귀납법에 관하여 (임현승)
- Programming Languages Lecture Notes (이광근)
  - 1장 소개, 2.1절 귀납법
- Essentials of Programming Languages
  - Section 1.1 Recursively Specified Data

집합(Set)

- 프로그래밍 언어는 그 언어로 작성될 수 있는 프로그램들의 집합을 정의한다.

집합(Set)

- 프로그래밍 언어는 그 언어로 작성될 수 있는 프로그램들의 집합을 정의한다.
- 따라서 프로그래밍 언어를 프로그램들의 집합으로 생각할 수 있다.

집합(Set)

- 프로그래밍 언어는 그 언어로 작성될 수 있는 프로그램들의 집합을 정의한다.
- 따라서 프로그래밍 언어를 프로그램들의 집합으로 생각할 수 있다.
- 그런데 하나의 프로그래밍 언어(e.g., C 언어)를 이용하여 작성할 수 있는 프로그램은 무수히 많다(i.e., 무한 집합).

집합(Set)

- 프로그래밍 언어는 그 언어로 작성될 수 있는 프로그램들의 집합을 정의한다.
- 따라서 프로그래밍 언어를 프로그램들의 집합으로 생각할 수 있다.
- 그런데 하나의 프로그래밍 언어(e.g., C 언어)를 이용하여 작성할 수 있는 프로그램은 무수히 많다(i.e., 무한 집합).
- 결국 프로그래밍 언어를 정의하는 것은 무한 집합을 정의하는 것이라 할 수 있다.

집합을 정의하는 방법

- 원소나열법(tabular form)
  - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
  - 유한한 집합만 정의할 수 있음

집합을 정의하는 방법

- 원소나열법(tabular form)
  - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
  - 유한한 집합만 정의할 수 있음

- 조건제시법(set builder form)
  - $S = \{x \mid x \text{ is a natural number such that } x \leq 10\}$
  - 이미 정의된 집합을 참조(e.g., natural numbers)

집합을 정의하는 방법

- 원소나열법(tabular form)
  - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
  - 유한한 집합만 정의할 수 있음

- 조건제시법(set builder form)
  - $S = \{x \mid x \text{ is a natural number such that } x \leq 10\}$
  - 이미 정의된 집합을 참조(e.g., natural numbers)

- 이미 정의된 집합을 참조하지 않고, 무한 집합을 정의하려면?

집합을 정의하는 방법

- 원소나열법(tabular form)
  - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
  - 유한한 집합만 정의할 수 있음
- 조건제시법(set builder form)
  - $S = \{x \mid x \text{ is a natural number such that } x \leq 10\}$
  - 이미 정의된 집합을 참조(e.g., natural numbers)
- 이미 정의된 집합을 참조하지 않고, 무한 집합을 정의하려면?
  - 귀납법(induction)을 이용해야

귀납(歸納)

- 개별적인 특수한 사실이나 현상에서 그러한 사례들이 포함되는 일반적인 결론을 이끌어내는 추리의 방법
- ‘이끌려가다’는 뜻을 지닌 라틴어 ‘inductio, inducere’에서 비롯
- 개개의 구체적인 사실이나 현상에 대한 관찰로부터 전체에 대한 일반적인 인식으로 이끌어가는 절차
- 인간의 다양한 경험, 실천, 실험 등의 결과를 일반화하는 사고 방식

귀납 정의(Inductive Definition)

- 집합을 엄밀하게 정의하는 기법
- 유한한 방법으로 무한 집합을 정의할 수 있는 유일한 방법
- 집합의 원소를 이미 알고 있는 다른 원소를 이용하여 정의함 (The set is defined in terms of itself—recursive definition.)

상향식 정의(Bottom-up Version)

Definition

Define S to be the *smallest* set contained in $\mathbb{N}$ and satisfying the following two conditions:

1. $\mathbf{0} \in S$, and
2. if $n \in S$, then $n + \mathbf{3} \in S$.

S는 어떤 집합일까요?

상향식 정의(Bottom-up Version)

Definition

Define S to be the *smallest* set contained in $\mathbb{N}$ and satisfying the following two conditions:

1. $\mathbf{0} \in S$, and
2. if $n \in S$, then $n + \mathbf{3} \in S$.

S는 어떤 집합일까요?

- 위 두 조건을 만족하는 집합은 반드시 $\{\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{9}, \ldots\}$를 포함.

상향식 정의(Bottom-up Version)

Definition

Define S to be the *smallest* set contained in $\mathbb{N}$ and satisfying the following two conditions:

1. $0 \in S$, and
2. if $n \in S$, then $n + 3 \in S$.

S는 어떤 집합일까요?

- 위 두 조건을 만족하는 집합은 반드시 $\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$를 포함.
- S는 위 두 조건을 만족하는 집합 중에서 **가장 작은(smallest)** 집합
- 가장 작은 집합은 유일하다(unique).

추론 규칙(Inference Rule)

$$\frac{A_1 \quad \cdots \quad A_n}{B}\ \mathrm{R}$$

- 추론 규칙은 일종의 템플릿
- A_i, B는 메타변수(metavariable), 구체적인 값으로 치환 가능
- A_i: 가정(hypothesis, antecedent)
- B: 결론(conclusion, consequent)
- R: 추론 규칙 이름
- "if $A_1, \cdots, A_n$ are true then B is also true".
- 공리(Axiom): 가정이 없는 규칙

$$\frac{}{B}$$

추론 규칙을 이용하여 집합 정의하기

Definition

$$\frac{}{0 \in S}\ \textsc{Zero} \qquad \frac{n \in S}{(n+3) \in S}\ \textsc{Plus3}$$

위 규칙은 다음과 같이 해석할 수 있다:

"A natural number n is in S if and only if $n \in S$ can be derived from the axiom by applying the inference rules finitely many times"

추론 규칙을 이용하여 집합 정의하기

Definition

$$\frac{}{\mathbf{0} \in S}\ \textsc{Zero} \qquad \frac{n \in S}{(n+\mathbf{3}) \in S}\ \textsc{Plus3}$$

위 규칙은 다음과 같이 해석할 수 있다:

"A natural number n is in S if and only if $n \in S$ can be derived from the axiom by applying the inference rules finitely many times"

예) $\mathbf{3} \in S$ 왜냐하면

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{0} \in S}\ \text{Zero}}{\mathbf{3} \in S}\ \text{Plus3}$$

추론 규칙을 이용하여 집합 정의하기

Definition

$$\frac{}{\mathbf{0} \in S}\ \textsc{Zero} \qquad \frac{n \in S}{(n+\mathbf{3}) \in S}\ \textsc{Plus3}$$

위 규칙은 다음과 같이 해석할 수 있다:

"A natural number n is in S if and only if $n \in S$ can be derived from the axiom by applying the inference rules finitely many times"

예) $\mathbf{3} \in S$ 왜냐하면

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{0} \in S}\ \text{Zero}}{\mathbf{3} \in S}\ \text{Plus3}$$

위 해석은 S가 위 추론 규칙에 대해 닫혀있는 가장 작은 집합(the smallest set closed under the inference rules)임을 보장

요약

귀납 정의는 집합을 엄밀하게 정의하는 방법으로, 집합의 원소를 정의하고자 하는 그 집합의 다른 원소를 이용하여 정의한다.

- 상향식 정의
- 추론 규칙

프로그래밍 언어 이론에서는 주로 추론 규칙 방식을 이용

연습문제

1. 다음 귀납 규칙에 의해 정의되는 집합 S는 어떤 집합인가?

$$\frac{}{3 \in S} \qquad \frac{x \in S \quad y \in S}{x + y \in S}$$

연습문제

1. 다음 귀납 규칙에 의해 정의되는 집합 S는 어떤 집합인가?

$$\frac{}{3 \in S} \qquad \frac{x \in S \quad y \in S}{x + y \in S}$$

2. 다음 귀납 규칙에 의해 정의되는 집합 S는 어떤 집합인가?

$$\frac{}{() \in S} \qquad \frac{s \in S}{(s) \in S} \qquad \frac{s_1 \in S \quad s_2 \in S}{s_1\, s_2 \in S}$$

연습문제

1. 다음 귀납 규칙에 의해 정의되는 집합 S는 어떤 집합인가?

$$\frac{}{3 \in S} \qquad \frac{x \in S \quad y \in S}{x + y \in S}$$

2. 다음 귀납 규칙에 의해 정의되는 집합 S는 어떤 집합인가?

$$\frac{}{() \in S} \qquad \frac{s \in S}{(s) \in S} \qquad \frac{s_1 \in S \quad s_2 \in S}{s_1\, s_2 \in S}$$

3. 추론 규칙을 이용하여 다음 집합을 정의하라.

$$S = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\}$$

연습문제

1. 다음 귀납 규칙에 의해 정의되는 집합 S는 어떤 집합인가?

$$\frac{}{3 \in S} \qquad \frac{x \in S \quad y \in S}{x + y \in S}$$

2. 다음 귀납 규칙에 의해 정의되는 집합 S는 어떤 집합인가?

$$\frac{}{(\,) \in S} \qquad \frac{s \in S}{(s) \in S} \qquad \frac{s_1 \in S \quad s_2 \in S}{s_1\, s_2 \in S}$$

3. 추론 규칙을 이용하여 다음 집합을 정의하라.

$$S = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\}$$

4. 추론 규칙을 이용하여 다음 집합을 정의하라.

$$S = \{x^n y^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$$