

4471028: 프로그래밍언어

Lecture 12 — 타입 추론 (2)  
Type Inference (2)

임현승  
2020 봄학기

# 타입 방정식의 해 찾기

모든 방정식을 '참'으로 만드는 타입 변수의 값을 찾아라.

$$\underbrace{\text{fun } \underbrace{f}_{t_f} \rightarrow \text{fun } \underbrace{x}_{t_x} \rightarrow \underbrace{(f \ 3) - (f \ x)}_{\underbrace{\underbrace{t_3} \quad \underbrace{t_4}}_{t_2}}}_{t_1}}_{t_0}$$

Equations	Solution
$t_0 = t_f \rightarrow t_1$	$t_0 = (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int})$
$t_1 = t_x \rightarrow t_2$	$t_1 = \text{int} \rightarrow \text{int}$
$t_3 = \text{int}$	$t_3 = \text{int}$
$t_4 = \text{int}$	$t_4 = \text{int}$
$t_2 = \text{int}$	$t_2 = \text{int}$
$t_f = \text{int} \rightarrow t_3$	$t_f = \text{int} \rightarrow \text{int}$
$t_f = t_x \rightarrow t_4$	$t_x = \text{int}$

통합 알고리즘(unification algorithm)을 이용하여 해를 찾을 수 있음.

# Unification Algorithm: Example 1

통합 알고리즘은 1) 해결해야 하는 방정식들과 2) 방정식을 해결하기 위해 현재까지 도입한 치환식(substitution)들로 구성. 처음에는 치환식은 없음.

Equations	Substitution
$t_0 = t_f \rightarrow t_1$	
$t_1 = t_x \rightarrow t_2$	
$t_3 = \text{int}$	
$t_4 = \text{int}$	
$t_2 = \text{int}$	
$t_f = \text{int} \rightarrow t_3$	
$t_f = t_x \rightarrow t_4$	

# Unification Algorithm: Example 1

각 방정식을 차례로 고려하며, 만약 방정식의 왼편이 변수면 해당 방정식을 치환식에 추가:

Equations	Substitution
$t_1 = t_x \rightarrow t_2$	$t_0 = t_f \rightarrow t_1$
$t_3 = \text{int}$	
$t_4 = \text{int}$	
$t_2 = \text{int}$	
$t_f = \text{int} \rightarrow t_3$	
$t_f = t_x \rightarrow t_4$	

## Unification Algorithm: Example 1

다음 방정식( $t_1 = t_x \rightarrow t_2$ )을 치환식에 추가하고 기존 치환식들을 업데이트 (i.e., 기존 치환식에서 사용되는  $t_1$  변수를 모두 방정식의 오른쪽 식으로 치환):

Equations	Substitution
$t_3 = \text{int}$	$t_0 = t_f \rightarrow (t_x \rightarrow t_2)$
$t_4 = \text{int}$	$t_1 = t_x \rightarrow t_2$
$t_2 = \text{int}$	
$t_f = \text{int} \rightarrow t_3$	
$t_f = t_x \rightarrow t_4$	

# Unification Algorithm: Example 1

다음 세 방정식에 대해서 같은 작업을 수행:

Equations	Substitution
$t_4 = \text{int}$	$t_0 = t_f \rightarrow (t_x \rightarrow t_2)$
$t_2 = \text{int}$	$t_1 = t_x \rightarrow t_2$
$t_f = \text{int} \rightarrow t_3$	$t_3 = \text{int}$
$t_f = t_x \rightarrow t_4$	
Equations	Substitution
$t_2 = \text{int}$	$t_0 = t_f \rightarrow (t_x \rightarrow t_2)$
$t_f = \text{int} \rightarrow t_3$	$t_1 = t_x \rightarrow t_2$
$t_f = t_x \rightarrow t_4$	$t_3 = \text{int}$
	$t_4 = \text{int}$
Equations	Substitution
$t_f = \text{int} \rightarrow t_3$	$t_0 = t_f \rightarrow (t_x \rightarrow \text{int})$
$t_f = t_x \rightarrow t_4$	$t_1 = t_x \rightarrow \text{int}$
	$t_3 = \text{int}$
	$t_4 = \text{int}$
	$t_2 = \text{int}$

## Unification Algorithm: Example 1

다음 방정식  $t_f = \text{int} \rightarrow t_3$ 을 고려하자. 방정식이 변수  $t_3$ 를 포함하고 있는데 치환식을 보면  $t_3$ 은 이미 int에 묶여 있음. 따라서 방정식에서  $t_3$ 를 int로 치환. 이 과정을 치환식을 방정식에 적용(applying)한다고 함.

Equations	Substitution
$t_f = \text{int} \rightarrow \text{int}$	$t_0 = t_f \rightarrow (t_x \rightarrow \text{int})$
$t_f = t_x \rightarrow t_4$	$t_1 = t_x \rightarrow \text{int}$
	$t_3 = \text{int}$
	$t_4 = \text{int}$
	$t_2 = \text{int}$

업데이트된 방정식을 치환식에 옮기고 기존 치환식들을 업데이트:

Equations	Substitution
$t_f = t_x \rightarrow t_4$	$t_0 = (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow (t_x \rightarrow \text{int})$
	$t_1 = t_x \rightarrow \text{int}$
	$t_3 = \text{int}$
	$t_4 = \text{int}$
	$t_2 = \text{int}$
	$t_f = \text{int} \rightarrow \text{int}$

# Unification Algorithm: Example 1

치환식을 현재 방정식에 적용:

Equations	Substitution
$\text{int} \rightarrow \text{int} = t_x \rightarrow t_4$	$t_0 = (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow (t_x \rightarrow \text{int})$
	$t_1 = t_x \rightarrow \text{int}$
	$t_3 = \text{int}$
	$t_4 = \text{int}$
	$t_2 = \text{int}$
	$t_f = \text{int} \rightarrow \text{int}$

만약 방정식의 양편이 모두 변수가 아니면, 방정식을 두 개로 쪼갤 것:

Equations	Substitution
$\text{int} = t_x$	$t_0 = (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow (t_x \rightarrow \text{int})$
$\text{int} = \text{int}$	$t_1 = t_x \rightarrow \text{int}$
	$t_3 = \text{int}$
	$t_4 = \text{int}$
	$t_2 = \text{int}$
	$t_f = \text{int} \rightarrow \text{int}$



# Unification Algorithm: Example 1

첫 번째 방정식의 양편을 바꿔서 치환식에 추가:

Equations	Substitution
$\text{int} = \text{int}$	$t_0 = (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int})$
	$t_1 = \text{int} \rightarrow \text{int}$
	$t_3 = \text{int}$
	$t_4 = \text{int}$
	$t_2 = \text{int}$
	$t_f = \text{int} \rightarrow \text{int}$
	$t_x = \text{int}$

# Unification Algorithm: Example 1

마지막 방정식  $\text{int} = \text{int}$ 는 항상 참이므로 제거:

Equations	Substitution
	$t_0 = (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int})$
	$t_1 = \text{int} \rightarrow \text{int}$
	$t_3 = \text{int}$
	$t_4 = \text{int}$
	$t_2 = \text{int}$
	$t_f = \text{int} \rightarrow \text{int}$
	$t_x = \text{int}$

최종 치환식은 원래 방정식들의 해.

# Unification Algorithm

각 방정식에 대해,

- ① 현재 치환식을 방정식에 적용.
- ② 만약 방정식의 왼편이 변수이면, 치환식에 추가하고 기존 치환식을 업데이트. 즉, 기존 치환식에서 해당 변수가 사용되고 있으면 방정식의 오른편 식으로 치환. (만약 방정식의 오른편이 변수이면, 방정식의 양편으로 바꾸고 같은 작업을 수행.)
- ③ 만약 방정식의 양편이 모두 변수가 아니면, 왼편 또는 오른편이 변수가 되도록 방정식을 쪼개서 간단히 함.
- ④ 만약 방정식이 항상 참이면, 제거.

## Unification Algorithm: Example 2

$$\text{fun } \underbrace{f}_{t_f} \rightarrow \underbrace{f \ 11}_{t_1}$$
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{t_0}$$

$$t_0 = t_f \rightarrow t_1$$

$$t_f = \text{int} \rightarrow t_1$$

# Unification Algorithm: Example 2

1

Equations	Substitution
$t_0 = t_f \rightarrow t_1$ $t_f = \text{int} \rightarrow t_1$	

2

Equations	Substitution
$t_f = \text{int} \rightarrow t_1$	$t_0 = t_f \rightarrow t_1$

3

Equations	Substitution
	$t_0 = (\text{int} \rightarrow t_1) \rightarrow t_1$ $t_f = \text{int} \rightarrow t_1$

The type is *polymorphic* in  $t_1$ .

## Unification Algorithm: Example 3

$\text{if } \underbrace{x}_{t_x} \text{ then } \underbrace{(x - 1)}_{t_1} \text{ else } 0$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{t_0}$

$t_x = \text{bool}$

$t_1 = t_0$

$\text{int} = t_0$

$t_x = \text{int}$

$t_1 = \text{int}$

## Unification Algorithm: Example 4

$$\underbrace{\text{fun } \underbrace{f}_{t_f} \rightarrow \text{iszero } \underbrace{(f f)}_{t_2}}_{t_0}$$

$$t_0 = t_f \rightarrow t_1$$

$$t_1 = \text{bool}$$

$$t_2 = \text{int}$$

$$t_f = t_f \rightarrow t_2$$

## 연습 문제

타입 추론을 이용하여 다음 표현식들의 타입을 찾아라. 만약 표현식이 타입을 가질 수 없으면 타입이 없다고 기술하라.

- 1 `let x = 4 in x 3`
- 2 `let f = fun z -> z in fun x -> (f x) - 1`
- 3 `let p = iszero 1 in if p then 88 else 99`
- 4 `let f = fun x -> x in if (f (iszero 0)) then f 11 else f 22`



# 요약

타입 추론:

- 프로그램으로부터 타입 방정식을 유도하고,
- Unification 알고리즘을 이용하여 방정식을 해결