## **Newton's Method of Polynomial**

DECEMBER 22, 2014 |  [COMMENTS](http://picks.logdown.com/posts/209226-newtons-method-of-polynomial" \l "disqus_thread)

## **杂谈**

艾玛这篇文章是6月份创建的……然后一直坑在这里。  
等UR#3结束之后，这东西应该也烂大街了吧（其实现在也烂大街了）。  
那么我就稍微介绍一下吧。  
由于这里面的内容我大(quan)都(bu)没有实现，早已沦为了嘴巴选手，所以有问题的内容请及时告知我，我再修改。  
如果你想拿去出题……常数问题自己考虑吧……

## **问题**

给出多项式 IMG_256IMG_257IMG_258IMG_259，求解多项式 IMG_260IMG_261IMG_262IMG_263，满足：

IMG_264IMG_265IMG_266IMG_267IMG_268IMG_269IMG_270IMG_271IMG_272IMG_273IMG_274IMG_275IMG_276IMG_277

你只需要给出 IMG_278IMG_279IMG_280IMG_281IMG_282IMG_283IMG_284IMG_285IMG_286 即可。

## **解法**

首先先不要抱太大希望……这个问题我也没有得到足够好的复杂度。所以大家大可放心不会非常毒瘤地祸害到各位。  
思路大概还是利用多项式求逆那样地倍增。  
不妨假设我们有：

IMG_287IMG_288IMG_289IMG_290IMG_291IMG_292IMG_293IMG_294IMG_295IMG_296IMG_297IMG_298IMG_299IMG_300IMG_301IMG_302IMG_303IMG_304

先奠基，显然，F(x)的常数项必然为0，否则无法在模意义下收敛。  
现在我们试图将它扩展到模 IMG_305IMG_306IMG_307IMG_308IMG_309 意义下。  
对 IMG_310IMG_311IMG_312IMG_313IMG_314IMG_315IMG_316IMG_317IMG_318IMG_319 进行在 IMG_320IMG_321IMG_322IMG_323IMG_324 上进行泰勒展开（这一步的正确性可以直接通过泰勒公式的推导说明）。

IMG_325IMG_326IMG_327IMG_328IMG_329IMG_330IMG_331IMG_332IMG_333IMG_334IMG_335IMG_336IMG_337IMG_338IMG_339IMG_340IMG_341IMG_342IMG_343IMG_344IMG_345IMG_346IMG_347IMG_348IMG_349IMG_350IMG_351IMG_352IMG_353IMG_354IMG_355IMG_356IMG_357IMG_358IMG_359IMG_360IMG_361IMG_362IMG_363IMG_364IMG_365IMG_366IMG_367IMG_368IMG_369IMG_370IMG_371IMG_372IMG_373IMG_374IMG_375IMG_376IMG_377IMG_378IMG_379IMG_380IMG_381IMG_382IMG_383IMG_384IMG_385IMG_386IMG_387IMG_388IMG_389IMG_390IMG_391IMG_392IMG_393IMG_394IMG_395IMG_396IMG_397IMG_398IMG_399IMG_400IMG_401IMG_402

注意到 IMG_403IMG_404IMG_405IMG_406IMG_407IMG_408IMG_409IMG_410IMG_411IMG_412IMG_413IMG_414IMG_415IMG_416IMG_417IMG_418IMG_419IMG_420IMG_421IMG_422IMG_423IMG_424IMG_425IMG_426，那么从第三项开始，后面的项在模 IMG_427IMG_428IMG_429IMG_430 后均为0.  
故我们有：

IMG_431IMG_432IMG_433IMG_434IMG_435IMG_436IMG_437IMG_438IMG_439IMG_440IMG_441IMG_442IMG_443IMG_444IMG_445IMG_446IMG_447IMG_448IMG_449IMG_450IMG_451IMG_452IMG_453IMG_454IMG_455IMG_456IMG_457IMG_458IMG_459IMG_460IMG_461IMG_462IMG_463IMG_464IMG_465IMG_466IMG_467IMG_468IMG_469IMG_470IMG_471IMG_472IMG_473IMG_474IMG_475IMG_476IMG_477IMG_478IMG_479IMG_480IMG_481IMG_482IMG_483IMG_484IMG_485IMG_486IMG_487IMG_488IMG_489IMG_490IMG_491IMG_492IMG_493IMG_494IMG_495IMG_496IMG_497IMG_498IMG_499IMG_500IMG_501IMG_502IMG_503IMG_504IMG_505IMG_506IMG_507IMG_508IMG_509IMG_510IMG_511IMG_512IMG_513IMG_514IMG_515IMG_516IMG_517IMG_518IMG_519IMG_520IMG_521IMG_522IMG_523IMG_524IMG_525IMG_526

根据迭代式，我们就可以在 IMG_527IMG_528IMG_529IMG_530 的附加时间内计算出 IMG_531IMG_532IMG_533IMG_534IMG_535 了。  
不妨设我们计算 IMG_536IMG_537IMG_538IMG_539IMG_540IMG_541IMG_542IMG_543IMG_544IMG_545IMG_546IMG_547 的复杂度为 IMG_548IMG_549IMG_550IMG_551，根据多项式除法的复杂度分析，总复杂度为即为 IMG_552IMG_553IMG_554IMG_555IMG_556IMG_557IMG_558。  
那么怎么计算这个多项式嵌套呢，我查到的最好的复杂度是 IMG_559IMG_560IMG_561IMG_562IMG_563IMG_564IMG_565IMG_566IMG_567IMG_568IMG_569IMG_570IMG_571 的，将另写一篇博客介绍。如果你问我这能出到什么数据范围，我猜，能跑出 IMG_572IMG_573IMG_574IMG_575IMG_576IMG_577IMG_578 吧……  
有人觉得这可能没什么实际的用处，但是事实上我们的复杂度就卡在这个多项式嵌套上，如果我们可以根据题目的特殊性来解决这个问题，那么仍不失为一个好方法。  
接下来看一看几个应用吧！

## **应用**

### **多项式求逆**

#### **问题**

即对于给出的多项式 IMG_579IMG_580IMG_581IMG_582，要求 IMG_583IMG_584IMG_585IMG_586，满足：

IMG_587IMG_588IMG_589IMG_590IMG_591IMG_592IMG_593IMG_594IMG_595IMG_596IMG_597IMG_598IMG_599IMG_600IMG_601IMG_602IMG_603IMG_604IMG_605IMG_606

#### **解法**

将 IMG_607IMG_608IMG_609IMG_610 视作变量，我们可以非常快地得到迭代式：

IMG_611IMG_612IMG_613IMG_614IMG_615IMG_616IMG_617IMG_618IMG_619IMG_620IMG_621IMG_622IMG_623IMG_624IMG_625IMG_626IMG_627IMG_628IMG_629IMG_630IMG_631IMG_632IMG_633IMG_634IMG_635IMG_636IMG_637IMG_638IMG_639IMG_640IMG_641IMG_642IMG_643IMG_644IMG_645IMG_646IMG_647IMG_648IMG_649IMG_650IMG_651IMG_652IMG_653IMG_654IMG_655IMG_656IMG_657IMG_658IMG_659IMG_660IMG_661IMG_662IMG_663IMG_664IMG_665IMG_666IMG_667IMG_668IMG_669IMG_670IMG_671IMG_672IMG_673IMG_674IMG_675IMG_676IMG_677IMG_678IMG_679IMG_680IMG_681IMG_682IMG_683IMG_684IMG_685IMG_686IMG_687IMG_688IMG_689IMG_690IMG_691IMG_692IMG_693IMG_694IMG_695IMG_696IMG_697IMG_698IMG_699IMG_700IMG_701IMG_702IMG_703IMG_704IMG_705IMG_706IMG_707IMG_708IMG_709IMG_710IMG_711IMG_712IMG_713IMG_714IMG_715IMG_716IMG_717IMG_718

有没有觉得很眼熟？对了，这就是我们在多项式求逆中得到的式子。

### **多项式开方**

同样的，多项式开方也可以迎刃而解。

#### **问题**

即对于给出的多项式 IMG_719IMG_720IMG_721IMG_722，要求 IMG_723IMG_724IMG_725IMG_726，满足：

IMG_727IMG_728IMG_729IMG_730IMG_731IMG_732IMG_733IMG_734IMG_735IMG_736IMG_737IMG_738IMG_739IMG_740IMG_741IMG_742IMG_743IMG_744IMG_745IMG_746IMG_747IMG_748IMG_749

#### **解法**

同样地推出递推式：

IMG_750IMG_751IMG_752IMG_753IMG_754IMG_755IMG_756IMG_757IMG_758IMG_759IMG_760IMG_761IMG_762IMG_763IMG_764IMG_765IMG_766IMG_767IMG_768IMG_769IMG_770IMG_771IMG_772IMG_773IMG_774IMG_775IMG_776IMG_777IMG_778IMG_779IMG_780IMG_781IMG_782IMG_783IMG_784IMG_785IMG_786IMG_787IMG_788IMG_789IMG_790IMG_791IMG_792IMG_793IMG_794IMG_795IMG_796

问题得到了解决。

### **多项式求指数函数**

#### **问题**

对于给出的多项式 IMG_797IMG_798IMG_799IMG_800，要求 IMG_801IMG_802IMG_803IMG_804，满足：

IMG_805IMG_806IMG_807IMG_808IMG_809IMG_810IMG_811IMG_812IMG_813IMG_814IMG_815IMG_816IMG_817IMG_818IMG_819IMG_820IMG_821IMG_822IMG_823

#### **解法**

由于常数项我们不知道，故需要对所求式进行一定变形：

IMG_824IMG_825IMG_826IMG_827IMG_828IMG_829IMG_830IMG_831IMG_832IMG_833IMG_834IMG_835IMG_836IMG_837IMG_838IMG_839IMG_840IMG_841IMG_842IMG_843

同样地推出递推式：

IMG_844IMG_845IMG_846IMG_847IMG_848IMG_849IMG_850IMG_851IMG_852IMG_853IMG_854IMG_855IMG_856IMG_857IMG_858IMG_859IMG_860IMG_861IMG_862IMG_863IMG_864IMG_865IMG_866IMG_867IMG_868IMG_869IMG_870IMG_871IMG_872IMG_873IMG_874IMG_875IMG_876IMG_877IMG_878IMG_879IMG_880IMG_881IMG_882IMG_883IMG_884IMG_885IMG_886IMG_887

需要求 IMG_888IMG_889IMG_890IMG_891IMG_892IMG_893，仍然需要一些数学技巧：

IMG_894IMG_895IMG_896IMG_897IMG_898IMG_899IMG_900IMG_901IMG_902IMG_903IMG_904IMG_905IMG_906IMG_907IMG_908IMG_909IMG_910IMG_911IMG_912

注意到对于多项式的求导和积分，都是很容易完成的，所以我们可以在 IMG_913IMG_914IMG_915IMG_916IMG_917IMG_918IMG_919IMG_920 时间内计算 IMG_921IMG_922IMG_923IMG_924IMG_925IMG_926.  
由前所述，计算 IMG_927IMG_928IMG_929IMG_930IMG_931 也可以在 IMG_932IMG_933IMG_934IMG_935IMG_936IMG_937IMG_938IMG_939 时间内完成。  
从此，我们也可以推出来多项式的三角函数的求法。

### **多项式三角函数**

#### **问题**

对于给出的多项式 IMG_940IMG_941IMG_942IMG_943，要求 IMG_944IMG_945IMG_946IMG_947IMG_948IMG_949IMG_950IMG_951IMG_952，满足：

IMG_953IMG_954IMG_955IMG_956IMG_957IMG_958IMG_959IMG_960IMG_961IMG_962IMG_963IMG_964IMG_965IMG_966IMG_967IMG_968IMG_969IMG_970IMG_971IMG_972IMG_973IMG_974IMG_975IMG_976IMG_977IMG_978IMG_979IMG_980IMG_981IMG_982IMG_983IMG_984IMG_985IMG_986IMG_987IMG_988IMG_989IMG_990IMG_991IMG_992IMG_993IMG_994

#### **解法**

由欧拉公式可得：

IMG_995IMG_996IMG_997IMG_998IMG_999IMG_1000IMG_1001IMG_1002IMG_1003IMG_1004IMG_1005IMG_1006IMG_1007IMG_1008IMG_1009IMG_1010IMG_1011IMG_1012IMG_1013IMG_1014IMG_1015IMG_1016IMG_1017

我们只需要用复数来做即可。模意义下，我们可以用二元组来模拟复数运算。  
至此，我们已经可以在 IMG_1018IMG_1019IMG_1020IMG_1021IMG_1022IMG_1023IMG_1024IMG_1025 时间内完成所有多项式的初等函数运算。

### **多项式快速幂**

#### **问题**

对于给出的多项式 IMG_1026IMG_1027IMG_1028IMG_1029，要求 IMG_1030IMG_1031IMG_1032IMG_1033，满足：

IMG_1034IMG_1035IMG_1036IMG_1037IMG_1038IMG_1039IMG_1040IMG_1041IMG_1042IMG_1043IMG_1044IMG_1045IMG_1046IMG_1047IMG_1048IMG_1049IMG_1050IMG_1051IMG_1052

#### **解法**

方法学习自jiry\_2！原地址：[jry的博客](http://jiruyi910387714.is-programmer.com/posts/73320.html)！  
稍微进行数学变换：

IMG_1053IMG_1054IMG_1055IMG_1056IMG_1057IMG_1058IMG_1059IMG_1060IMG_1061IMG_1062IMG_1063IMG_1064IMG_1065IMG_1066IMG_1067IMG_1068

然后好像就做完了？  
复杂度 IMG_1069IMG_1070IMG_1071IMG_1072IMG_1073IMG_1074IMG_1075IMG_1076.

## **结语**

絮絮叨叨了这么多，发现讲完这个东西之后，FFT系列教程没有啥好写的了？有一点忧伤……说不定以后我还会有一点别的东西分享一下吧。  
感谢所有能看到这里的人（肯定是真·大神了……）。  
还有一些牛顿迭代的有意思的应用，比如UR#3的微分方程什么的，我会看心(shui)情(ping)来更新的>\_<~