第三章 不確定性分析和可靠度分析

供水工程、防洪工程通常都是許多元件組成的大系統，系統失敗風險，不只是個別元件失敗風險、變數或量測不確定性相加成的綜合影響。構成系統風險的另類途徑，往往是微小錯誤引發或結合系統中隱藏的路徑；或是系統太複雜，無法預測部件之間會有什麼互動；或是小故障正好按照不太可能發生的順序出現；錯誤和故障像滾雪球一樣無法收拾，最後導致系統失敗。社會學家培羅稱這類風險為「正常的意外」。例如民國 85 年賀伯颱風在板橋江子翠淹水，民國 90 年納莉颱風台北捷運淹水，和民國 76 年琳恩颱風撫遠街水門軌道彎曲無法關閉、玉成抽水站淹水。

3.1 不確定性分析

許多水利的變數或量測均含「不確定性」(uncertainty)，例如堰流量：

$$Q = CLH^{1.5}$$

其中的堰流係數 C 和水深 H 均含「不確定性」，因此計算的流量 Q 便含有不確定性。分析不確定性一個簡單方法為「不確定性分析法」，不確定性分析法可瞭解一模式中各個自變數不確定性的聯合效應。**已知隨機自變數分布，推求隨機應變數分布的作法，通常是採用動差法，以「一階不確定性分析」(first-order-second-moment analysis of uncertainty, FOSM)估計隨機應變數（或不確定性）的變異數；而以「二階不確定性分析」(second-order analysis of uncertainty)估計隨機應變數的平均值；若隨機自變數的分布為常態，則可以利用動差階層化的原理，包含高階的不確定性，更準確的近似估計隨機應變數的分布動差值。**

3.1.1 一階不確定性分析法(FOSM)估計變異數

假設一個隨機應變數 Y 為數個隨機自變數 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_k$ 的函數，

$$Y = g(\mathbf{X}) \tag{3-1}$$

其中，$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots\cdots, X_k)^{\mathrm{T}}$ 為 k 個隨機自變數向量，並且隨機自變數的機率函數為已知。將 $g(\mathbf{X})$ 在各隨機自變數的平均值處以泰勒法展開：

$$
\begin{aligned}
Y = g(\mathbf{m}_x) &+ \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial X_i}\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m}_x}\left(X_i - m_{x_i}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial^2 g(\mathbf{X})}{\partial X_i \partial X_j}\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m}_x}\left(X_i - m_{x_i}\right)\left(X_j - m_{x_j}\right) + \cdots
\end{aligned}
\tag{3-2}
$$

一階不確定性分析只保留上式中的零階與一階項，忽略二階以上的高次項，即為：

$$
Y \approx g(\mathbf{m}_x) + \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial X_i}\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m}_x}\left(X_i - m_{x_i}\right) \tag{3-3}
$$

其中，$\partial g/\partial X_i$ 稱為敏感係數(sensitivity coefficient)，表示在 $\mathbf{X} = \mathbf{m}_x$ 時 g 值（Y 值）的變化斜率。採用一階不確定性分析法，估計隨機應變數的變異數為：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{var}(Y) \approx \boldsymbol{var}\left[g(\mathbf{m}_x)\right] &+ \boldsymbol{var}\left[\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial X_i}\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m}_x}\left(X_i - m_{x_i}\right)\right] \\
&+ 2\,\boldsymbol{cov}\left[g(\mathbf{m}_x),\ \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial X_i}\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m}_x}\left(X_i - m_{x_i}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{3-4}
$$

令 $a_i = \left[\partial g/\partial X_i\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m}_x}$，由於 $g(\mathbf{m}_x)$ 為常數而非隨機變數，因此 $\boldsymbol{var}\left[g(\mathbf{m}_x)\right]=0$，同時，$\boldsymbol{cov}\left[g(\mathbf{m}_x), \sum_{i=1}^{k} a_i\left(X_i - m_{x_i}\right)\right] = 0$，所以：

$$
\boldsymbol{var}(Y) \approx \boldsymbol{var}\left[\sum_{i=1}^{k} a_i\left(X_i - m_{x_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_i a_j\, \boldsymbol{cov}\left(X_i, X_j\right) \tag{3-5}
$$

若對於所有的 $i \neq j$，X_i 與 X_j 不相關，$\boldsymbol{cov}(X_i, X_j) = 0$，則(3-5)式可化簡為

$$
\boldsymbol{var}(Y) \approx \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sigma_{x_i}^2 \tag{3-6}
$$

(3-6)式代表在所有隨機自變數 X_i 之間皆為線性不相關時，每個隨機自變數對於隨機應變數 Y 一階不確定性的貢獻為 $a_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2$。(3-6)式也可改為使用變異係數(coefficient of variation)來表示：

$$
CV_y^2 = \frac{\sigma_y^2}{m_y^2} = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \left(\frac{m_{x_i}}{m_y}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{x_i}}{m_{x_i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \left(\frac{m_{x_i}}{m_y}\right)^2 \cdot CV_{x_i}^2 \tag{3-7}
$$

以曼寧公式計算流量為例：

$$Q=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{A^5}{P^2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot S^{\frac{1}{2}} \tag{3-8}$$

流量的不確定性和河川糙度與坡度的不確定性有關，假設 A 和 P 的不確定性可忽略，則 Q 以一階近似表示為：

$$\begin{aligned} Q &\approx \overline{Q}+\left[\frac{\partial Q}{\partial n}\right]_{\overline{n},\overline{S}}\left(n-\overline{n}\right)+\left[\frac{\partial Q}{\partial S}\right]_{\overline{n},\overline{S}}\left(S-\overline{S}\right) \\ &=\overline{Q}+\left[-\frac{\overline{Q}}{\overline{n}}\right]\left(n-\overline{n}\right)+\left[\frac{\overline{Q}}{2\overline{S}}\right]\left(S-\overline{S}\right) \end{aligned} \tag{3-9}$$

移項處理後得到：

$$\frac{Q-\overline{Q}}{\overline{Q}}=\left[-\frac{n-\overline{n}}{\overline{n}}\right]+\left[\frac{S-\overline{S}}{2\overline{S}}\right] \tag{3-10}$$

若曼寧糙度係數與坡度兩個隨機自變數為線性不相關，則：

$$CV_Q^2=CV_n^2+\frac{1}{4}CV_S^2 \tag{3-11}$$

3.1.2 二階不確定性分析法(SOFM)估計平均值

二階不確定性分析法是保留(3-2)式之第一及二階的微分項，忽略三階以上的高次項，即：

$$\begin{aligned} Y \approx g\left(\mathbf{m}_X\right)&+\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial g\left(\mathbf{X}\right)}{\partial X_i}\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m_X}}\left(X_i-m_{X_i}\right) \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial^2 g\left(\mathbf{X}\right)}{\partial X_i \partial X_j}\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m_X}}\left(X_i-m_{X_i}\right)\left(X_j-m_{X_j}\right) \end{aligned} \tag{3-12}$$

對(3-12)式取期望值，已知隨機自變數 X_i 的期望值為 $\mathrm{E}[X_i]=m_{x_i}$ ，則式中右側第二項的期望值為零，因此求得隨機應變數 Y 的平均值為：

$$m_y=\boldsymbol{E}\left[Y\right]\approx g\left(\mathbf{m}_x\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial^2 g\left(\mathbf{X}\right)}{\partial X_i \partial X_j}\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m}_x}\boldsymbol{cov}\left(X_i,X_j\right) \tag{3-13}$$

若對所有的$i \neq j$，X_i與X_j不相關，則Y的平均值為：

$$m_y \approx g(\mathbf{m}_x)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial^2 g(\mathbf{X})}{\partial X_i^2}\right]_{\mathbf{X}=\mathbf{m}_x} \boldsymbol{var}[X_i] \tag{3-14}$$

上式即為利用二階不確定性分析估計隨機應變數Y平均值的模式。

例 3-1 假設某天然災害的年最大理賠金額$X(\geq 0)$呈指數分布，$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，以頻率分析法利用 25 筆年最大理賠金額紀錄樣本，計算得到$\bar{x}=10$，並估計 100 年重現期的年最大理賠金額$\hat{x}_{T=100}$；唯因為$\hat{x}_{T=100}$中的參數λ是利用樣本估計得到的$\hat{\lambda}$，具有不確定性，請利用二階不確定性分析法(SOFM)估計$\hat{x}_{T=100}$的平均值，和以二階不確定性分析法(SOSM)估計$\hat{x}_{T=100}$的變異數。

1. **頻率分析**：指數分布的累積機率為$F(x)=1-e^{-\lambda x}$ for $x>0$，$x_{T=100}$的累積機率為 0.99，代入指數分布的累積機率公式得到$0.99=1-e^{-\lambda x_{T=100}}$，再改寫為$x_{T=100}=-\boldsymbol{ln}0.01/\lambda=4.605/\lambda$，因此，$\hat{x}_{T=100}=4.605/\hat{\lambda}=g(\hat{\lambda})$。

2. **不確定性**：

   將$\hat{x}_{T=100}=g(\hat{\lambda})$，$\hat{\lambda}$是利用樣本估計的參數值，由動差法估計，指數分布的參數為$\lambda=1/\mu$，$\hat{\mu}=\bar{x}=10$，$\hat{\lambda}=1/\bar{x}=0.1$。將$\hat{x}_{T=100}=g(\hat{\lambda})$對未知的參數真值$\lambda$展開：

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{T=100} &= g(\hat{\lambda})= g(\lambda)\big|_{\lambda=\hat{\lambda}}+\left.\frac{\partial g(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\hat{\lambda}=\lambda}\left(\hat{\lambda}-\lambda\right)+\left.\frac{\partial^2 g(\lambda)}{2\partial\lambda^2}\right|_{\hat{\lambda}=\lambda}\left(\hat{\lambda}-\lambda\right)^2+\ldots \\
&\approx 4.605\left[\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\left(\hat{\lambda}-\lambda\right)+\frac{1}{\lambda^3}\left(\hat{\lambda}-\lambda\right)^2\right] \\
&= \frac{4.605}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\lambda}\right)+\left(\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\lambda}\right)^2\right] \\
&= 4.605\mu\left[1-\left(\frac{\mu-\bar{x}}{\bar{x}}\right)+\left(\frac{\mu-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

   利用二階展開法估計$x_{T=100}$平均值(SOFM)的估計式如下。指數分布隨機變數的期望值為$\mu=E[X]=1/\lambda$，變異數為$\boldsymbol{var}[X]=1/\lambda^2=\mu^2$；另外，$E[\bar{X}]=\mu$，$\boldsymbol{var}[\bar{X}]=\boldsymbol{var}[X]/n=\sigma^2/n$。

$$E\left[x_{T=100}\right]\approx E\left\{4.605\mu\left[1-\left(\frac{\mu-\bar{x}}{\bar{x}}\right)+\left(\frac{\mu-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^2\right]\right\}$$
$$\approx 4.605\times 10\left[1-0+\frac{1}{25}\right]$$
$$=47.89$$

利用二階展開法和 SOSM 原則估計 $x_{T=100}$ 的變異數：

$$\boldsymbol{var}\left[x_{T=100}\right]\approx 4.605^2\mu^2 E\left[3-3\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}+\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}\right)^2\right]^2$$
$$=4.605^2 E\left[\frac{\left(\bar{x}-\mu\right)^6}{\mu^4}\right]$$

根據中央極值定理可知：$E\left[\bar{X}\right]=\mu$，$\boldsymbol{var}\left[\bar{X}\right]=\boldsymbol{var}\left[X\right]/n=\sigma^2/n$；再利用常態分布的動差階層化原理，$E\left[(x-\mu)^6\right]=15\sigma^6$，$E\left[(\bar{x}-\mu)^6\right]=15\sigma^6/n^3$，對於指數分布變數 x，$15\sigma^6/n^3=15\mu^6/n^3$，將這些數值代入上式，可得：

$$\boldsymbol{var}\left[x_{T=100}\right]\approx 4.605^2\left[\frac{15\mu^6}{n^3\mu^4}\right]=4.605^2\left[\frac{15\cdot 10^2}{25^3}\right]\approx 2.036$$

3.1.3 利用高階微分項計算不確定性

提高不確定性分析準確性的方法之一，是納入泰勒展開式中更高階微分項分析，代價是必須求隨機自變數的高階動差。除了常態分佈可以使用動差階層化的方法，否則一般較不易計算高階動差。以下範例說明當隨機變數為常態分佈時，保留高階微分項，利用動差階層化法計算偶次動差，估計隨機應變數的變異數的方法。同樣原理，也可以保留高階微分項計算隨機應變數的期望值。

例 3-2 某寬矩形渠道（$R\approx y$）利用曼寧公式和水位觀測估計流量，若河川坡度為$1/900$，曼寧糙度係數為 0.03，在水深 y_0=2m，不確定性變異數為(0.05m)^2，且為常態分布。將單寬流量以泰勒展開式展開至三次微分項如下，假設四次微分和更高階微分的影響可以忽略，利用動差階層化法計算流量不確定性變異數 $E[(\delta q)^2]$。

$$\delta q = q(y) - q(y_0) \approx \delta y \left.\frac{\partial q}{\partial y}\right|_{y_0} + \frac{(\delta y)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right|_{y_0} + \frac{(\delta y)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 q}{\partial y^3}\right|_{y_0}$$

解：應用寬矩形渠道假設的曼寧公式為：$q = y_0^{5/3} s^{1/2} / n = 3.53$，

$$\left.\frac{\partial q}{\partial y}\right|_{y_0} = 2.94 \qquad \left.\frac{\partial^2 q}{2!\partial y^2}\right|_{y_0} = 0.490 \qquad \left.\frac{\partial^3 q}{3!\partial y^3}\right|_{y_0} = -0.0272$$

因此得到：$\delta q \approx 2.94\delta y + 0.490\delta y^2 - 0.0272\delta y^3$，可以推估 $E\left[\delta q^2\right]$：

$$\begin{aligned} E\left[(\delta q)^2\right] &= E\left[\left(2.94\delta y + 0.490\delta y^2 - 0.0272\delta y^3\right)^2\right] \\ &= E\left[\begin{array}{l} 2.94^2\delta y^2 + 2\times 2.94\times 0.49\delta y^3 + \left(0.49^2 - 2\times 2.94\times 0.0272\right)\delta y^4 \\ -2\times 0.49\times 0.0272\delta y^5 + 0.0272^2\delta y^6 \end{array}\right] \end{aligned}$$

由 moment factoring，$E\left[\delta y^2\right] = 0.05^2$、$E\left[\delta y^3\right] = 0$、$E\left[\delta y^4\right] = 3\times 0.05^4$、$E\left[\delta y^5\right] = 0$、$E\left[\delta y^6\right] = 15\times 0.05^6$，代入上式得到 $E\left[\delta q^2\right] \approx 0.0216$。

3.2 可靠度分析

假設一個系統的負荷 L (loading)為隨機變數，系統的能力 C (capacity)亦為隨機變數，則系統的可靠度(reliability)為 $C \geq L$ 的機率：

$$\alpha = P(C \geq L)$$

系統的風險(Risk)則為：

$$\alpha' = P(L > C) = 1 - \alpha$$

以上計算可靠度 α 和風險 α' 的方式通常不考慮系統負荷對時間的變化情形，而是考慮最大負荷發生的機率，因此，這樣的分析模式稱之為「靜態可靠度模式」(static reliability model)。

3.2.1 直接積分法

假設系統負荷和承受能力的聯合機率函數為 $f_{L,C}(l,c)$，則可靠度為：

$$\alpha = P(C \geq L) = \int_0^\infty \int_0^c f_{L,C}(l,c)\,dl\,dc = \int_0^\infty \int_l^\infty f_{L,C}(l,c)\,dc\,dl \qquad (3\text{-}15)$$

若負荷和承受能力為獨立的隨機變數，則 $f_{L,C}(l,c)=f_L(l)\cdot f_C(c)$，可靠度為：

$$\alpha=\int_0^\infty f_C(c)\left[\int_0^c f_L(l)dl\right]dc=\int_0^\infty f_C(c)\cdot F_L(c)dc \tag{3-16}$$

以上系統可靠度計算方法的示意圖如圖 3.1，通常採用數值積分。若以 L 為橫軸、C 為縱軸，繪 $f_{L,C}(l,c)$ 的等高線圖，則 α 為 $L<C$ 範圍的體積。

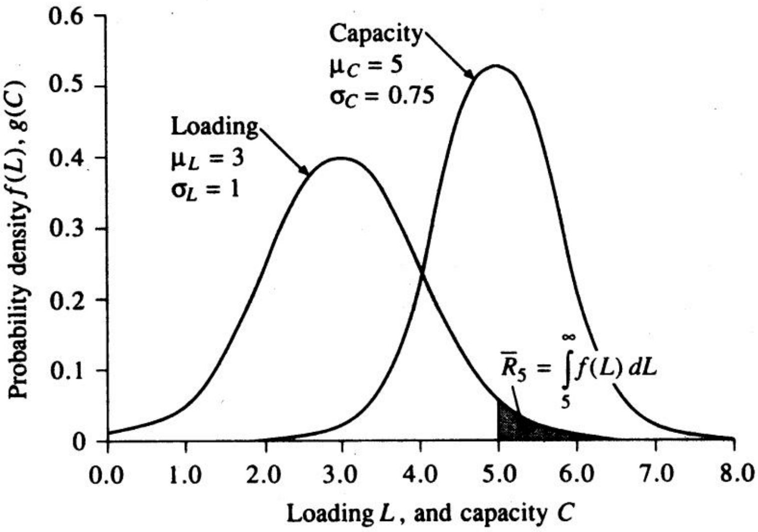

圖 3-1 負荷 L 和承載能力 C 兩個隨機變數的機率密度函數示意圖

3.2.2 安全邊際法(Safety Margin Analysis)

安全邊際的定義為 $SM = C\text{-}L$，可靠度為：

$$\alpha=P[C\ge L]=P(C-L\ge 0)=P(SM\ge 0) \tag{3-17}$$

由於 C 和 L 皆為隨機變數，因此 $SM=C\text{-}L$ 亦為隨機變數，假設 C 和 L 皆為常態分佈，則 SM 亦是常態分佈。SM 的期望值及變異數為：

$$\boldsymbol{E}[SM]=\boldsymbol{E}[C-L]=\mu_C-\mu_L \tag{3-18}$$

$$\boldsymbol{var}[SM]=\sigma_{SM}^2=\sigma_C^2+\sigma_L^2-2\,\boldsymbol{cov}(L,C) \tag{3-19}$$

假設 L 和 C 為獨立的隨機變數，$\boldsymbol{cov}(\mathrm{L,C})=0$，則

$$\sigma_{SM}^2=\sigma_C^2+\sigma_L^2 \tag{3-20}$$

當 SM 為常態分佈時，

$$\alpha = P(SM \geq 0) = P\left(\frac{SM - \mu_{SM}}{\sigma_{SM}} \geq \frac{-\mu_{SM}}{\sigma_{SM}}\right)$$
$$= P\left(z \geq \frac{-\mu_{SM}}{\sigma_{SM}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-\mu_{SM}}{\sigma_{SM}}\right) \tag{3-21}$$

其中，Φ 為標準常態分佈的累積分佈函數，因為 Φ 為對稱，故：

$$\alpha = \Phi\left(\frac{\mu_{SM}}{\sigma_{SM}}\right) \tag{3-22}$$

在此作法將直接積分法中二個隨機變數雙重積分的問題，變為一個隨機變數的問題，簡化後的結果通常不如直接積分準確，除非對所有的 sm

$$P(SM = sm) = \left[\int_0^\infty \int_{c=sm+l}^{c+dc} f_{L,C}(l,c)dc \cdot dl\right]\frac{1}{dc}$$

否則安全邊際法分析的結果和直接積分法計算的結果不會相同。

Ang(1973)指出，當可靠度 $\alpha < 0.99$ 時，L 和 C 機率分佈的選擇和假設 SM 為常態分佈對於可靠度分析結果的影響不大。但若 $\alpha > 0.99$，因為機率密度函數尾端的形狀影響變得很大，必須精確分析 SM 的機率密度函數，或是使用直接積分法。

例 3-3 某城市估計年用水量為 3 單位，標準偏差為 1 單位，該城市供水系統的年平均值為 5 單位，標準偏差 0.75 單位。以安全邊際法估算系統的可靠度，假設用水量和供應量均為常態分佈，並且相互獨立。

解：令 L=用水量，$\mu_L = 3$ 且 $\sigma_L = 1$；C=供給量，$\mu_C = 5$ 且 $\sigma_C = 0.75$，則

$$\mu_{SM} = 5 - 3 = 2$$

$$\sigma_{SM}^2 = (0.75)^2 + 1^2 = (1.25)^2$$

可靠度：$\alpha = p(SM \geq 0) = \Phi(\mu_{SM}/\sigma_{SM}) = \Phi(2/1.25) = \Phi(1.6) = 0.945$；

風　險：$\alpha' = 1 - \alpha = 1 - 0.945 = 0.055$

3.2.3 安全係數法(Safety Factor Analysis)

安全係數的定義為 $SF = C/L$，可靠度 $\alpha = P(C \geq L) = P(SF \geq 1)$。當負荷 L 和承受能力 C 均為對數常態分佈時，SF 隨機變數的機率密度函數亦為對

數常態分佈，使用 SF 法最方便。

$$\alpha = P\left(SF \ge 1\right) = P\left[\boldsymbol{ln}\left(SF\right) \ge 0\right] = P\left[\boldsymbol{ln}\left(C / L\right) \ge 0\right] = P\left[\boldsymbol{ln} C - \boldsymbol{ln} L \ge 0\right]$$

$$= P\left[\frac{\left(\boldsymbol{ln} C - \boldsymbol{ln} L\right) - \left(\mu_{\boldsymbol{ln} C} - \mu_{\boldsymbol{ln} L}\right)}{\sqrt{\sigma_{\boldsymbol{ln} C}^2 + \sigma_{\boldsymbol{ln} L}^2 - 2\boldsymbol{cov}\left(\boldsymbol{ln} C, \boldsymbol{ln} L\right)}} \ge \frac{0 - \left(\mu_{\boldsymbol{ln} C} - \mu_{\boldsymbol{ln} L}\right)}{\sqrt{\sigma_{\boldsymbol{ln} C}^2 + \sigma_{\boldsymbol{ln} L}^2 - 2\boldsymbol{cov}\left(\boldsymbol{ln} C, \boldsymbol{ln} L\right)}}\right]$$

$$= P\left[Z \ge \frac{-\mu_{\boldsymbol{ln} SF}}{\sigma_{\boldsymbol{ln} SF}}\right] = P\left[Z \le \frac{\mu_{\boldsymbol{ln} SF}}{\sigma_{\boldsymbol{ln} SF}}\right]$$

(3-23)

以上的可靠度同樣可以表示為變異係數的函數

$$\alpha = 1 - \Phi\left[\frac{-\boldsymbol{ln}\left[\dfrac{\mu_C}{\mu_L}\left(\dfrac{1 + CV_L^2}{1 + CV_C^2}\right)^{1/2}\right]}{\left\{\boldsymbol{ln}\left[\left(1 + CV_C^2\right)\left(1 + CV_L^2\right)\right]\right\}^{1/2}}\right] \tag{3-24}$$

例 3-4 若 L 和 C 均為對數常態分佈，並且 $\mu_C = 5$，$\sigma_C = 0.75$；$\mu_L = 3$，$\sigma_L = 1$，求系統的可靠度。

解：為避免求 $\mu_{\boldsymbol{ln} C}$，$\mu_{\boldsymbol{ln} L}$，$\sigma_{\boldsymbol{ln} C}$，$\sigma_{\boldsymbol{ln} L}$ 等參數，可使用(3-24)公式，

$$\alpha = 1 - \Phi\left[\frac{-\boldsymbol{ln}\left[\dfrac{5}{3}\sqrt{\dfrac{1 + \left(1/3\right)^2}{1 + \left(0.75/5\right)^2}}\right]}{\left\{\boldsymbol{ln}\left[\left(1 + \left(1/3\right)^2\right)\left(1 + \left(0.75/5\right)^2\right)\right]\right\}^{1/2}}\right]$$

$$= 1 - \Phi\left(-1.5463\right) = 1 - 0.061 = 0.939$$

3.2.4 表現函數法

可靠度可以用一個「表現函數」(performance function)表示之，SM 和 SF 均為表現函數的例子。假設一個系統的表現函數為 $w(\mathbf{X},\mathbf{Y})$，其中 $\mathbf{X}$ 為影響負荷 L 的隨機自變數向量，$L=g(\mathbf{X})$；$\mathbf{Y}$ 為影響系統承受能力 C 的隨機自變數

向量，$C=h(\mathbf{Y})$。表現函數的例子如：

$$w_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = C - L = h(\mathbf{Y}) - g(\mathbf{X}) = SM$$

$$w_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = C/L - 1 = h(\mathbf{Y})/g(\mathbf{X}) - 1 = SF - 1$$

$$w_3(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \boldsymbol{ln}(C/L) = \boldsymbol{ln}(h(\mathbf{Y})) - \boldsymbol{ln}(g(\mathbf{X})) = \boldsymbol{ln}(SF)$$

以上三個表現函數和系統可靠度的關係均為：

$$\alpha = P[w(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \geq 0]$$

若 $w(\mathbf{X},\mathbf{Y})$函數的平均值為μ_w，標準偏差為σ_w，令

$$\beta = \frac{\mu_w}{\sigma_w} \tag{3-25}$$

β稱為「可靠度指標」(reliability index)，則系統可靠度α可以β表示：

$$\alpha = P(w \geq 0) = 1 - P(w < 0) = 1 - F_w(0) = 1 - F_{w'}(-\beta) \tag{3-26}$$

其中$F_w()$為 w 的累積分佈函數；w'為標準化的隨機變數，

$$w' = \frac{w - \mu_w}{\sigma_w} \tag{3-27}$$

通常假設 w 的分佈為常態分佈，因此系統可靠度即為：

$$\alpha = 1 - \Phi(-\beta) = \Phi(\beta) \tag{3-28}$$

因此只需求出表現函數的平均值和標準偏差即可計算。

以上利用表現函數的分析方法稱為平均值一次二階動差法(Mean-value First-Order Second-Moment method)，簡寫為 MFOSM。

MFOSM 法的用法簡單，但也有部份的缺點，包括：

1. 當機率函數偏度係數大時無法正確表現
2. 非線性函數平均值和標準偏差的估計通常不佳
3. 分析結果對於表現函數之定義較敏感(sensitive)

例 3-5 假設一人工河川的底床為礫石，側壁為混凝土，並且斷面積 A 和濕周長 P 的不確定性可忽略，其值分別為 $A = 90\,\text{ft}^2$ 和 P=35ft。曼寧公式中的粗糙度 n 和河川坡度 S 則含有不確定性，平均值分別為 $\bar{n} = 0.017$ 和 $\bar{S} = 0.0016\,\text{ft/ft}$；變異係數則分別為 $CV_n = 20\%$ 和 $CV_S = 30\%$。決定系統具有 350*cfs* 輸水能力的可靠度。

解：由曼寧公式

$$Q = 1.49 A^{5/3} P^{-2/3} n^{-1} s^{1/2} = 1.49 \times 90^{5/3} \times 35^{-2/3} \cdot n^{-1} s^{1/2} = 251.7 n^{-1} s^{1/2}$$

此問題中 Q 即為表現函數，可靠度為 $\alpha = P(Q \geq 350)$ 根據 MFOSM 法，只需求 μ_Q 和 σ_Q 即可求得 α。

$$\mu_Q = 251.7 \times 0.017^{-1} \times 0.0016^{1/2} = 592.3\,\text{cfs}$$

由早先推導的公式知道

$$CV_Q^2 = CV_n^2 + \frac{1}{4} CV_S^2 = 0.2^2 + \frac{1}{4} \times 0.3^2 = 0.0625$$

$$\sigma_Q = CV_Q \cdot \mu_Q = 0.0625^{1/2} \times 592.3 = 148.1\ cfs$$

則 $\alpha = P(Q \geq 350) = P\left[Z \geq \dfrac{350 - 592.3}{148.1} \right] = P(Z \geq -1.636) = \Phi(1.636) = 0.949$