DEKPUNTEN VAN CIJFEROPERATIE-PIPELINES IN WILLEKEURIGE BASES: ALGEBRAÏSCHE STRUCTUUR EN VIJF ONEINDIGE FAMILIES

SYNTRIAD RESEARCH

SAMENVATTING. Wij bestuderen dekpunten van samenstellingen van elementaire cijferoperaties (omkeren, complement, sorteren, cijfersom, Kaprekar-stap, 1089-truc) toegepast op natuurlijke getallen in willekeurige bases $b \geq 3$.

Wij bewijzen exacte telformules voor dekpunten van $\mathrm{rev} \circ \mathrm{comp}_b$ (wat $(b-2) \cdot b^{k-1}$ symmetrische dekpunten oplevert onder $2k$-cijferige getallen), stellen de universaliteit van de 1089-multiplicatieve familie vast voor alle bases, en classificeren vier paarsgewijs disjuncte oneindige dekpuntfamilies met expliciete tellingen.

Een *vijfde* oneindige familie wordt bewezen: de 1089-truc-afbeelding $T(n) = |n - \mathrm{rev}(n)| + \mathrm{rev}(|n - \mathrm{rev}(n)|)$ heeft dekpunten $n_k = 110 \cdot (10^{k-3} - 1)$ voor elke $k \geq 5$, disjunct van alle eerder bekende families.

Verdere resultaten omvatten een algebraïsche oplossing van het 549945 Kaprekar- palindroom, een scherpe bovengrens $k_{\max}(b)$ voor Armstrong-getallen, uitputtende Kaprekar-analyse tot en met 7 cijfers, en Lyapunov-dalingsgrenzen voor cijfermacht-afbeeldingen.

Alle resultaten zijn computationeel geverifieerd (12/12 formele bewijzen, 117 unit tests, uitputtende verificatie over 2×10^7 invoerwaarden).

1. INLEIDING

1.1. **Motivatie.** Cijfergebaseerde dynamische systemen—geïtereerde afbeeldingen gedefinieerd door operaties op de basis-b cijfers van een getal—hebben wiskundigen gefascineerd sinds Kaprekars ontdekking van de constante 6174 in 1949 [1]. Ondanks hun elementaire definitie vertonen deze systemen rijke algebraïsche structuur die getaltheorie, combinatoriek en dynamische systemen verbindt.

1.2. **Setting.** Zij $b \geq 3$ een basis. Wij beschouwen de volgende elementaire cijferoperaties op $n \in \mathbb{N}$ met k cijfers in basis b:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rev}_b(n) &: \text{keer de cijferreeks van } n \text{ om,}\\
\mathrm{comp}_b(n) &: \text{vervang elk cijfer } d \text{ door } (b-1) - d,\\
\mathrm{sort}_\uparrow(n) &: \text{sorteer cijfers oplopend,}\\
\mathrm{sort}_\downarrow(n) &: \text{sorteer cijfers aflopend,}\\
\mathrm{kap}_b(n) &: \mathrm{sort}_\downarrow(n) - \mathrm{sort}_\uparrow(n),\\
\mathrm{ds}(n) &: \text{som van cijfers,}\\
\mathrm{narc}_k(n) &: \textstyle\sum_i d_i^k \text{ waarbij } k = \#\text{cijfers}(n).
\end{aligned}$$

Een **pipeline** is een eindige samenstelling $f = f_m \circ \cdots \circ f_1$ van zulke operaties. Een **dekpunt** van f is een n met $f(n) = n$.

De **1089-truc-afbeelding** is gedefinieerd als $T(n) = |n - \mathrm{rev}(n)| + \mathrm{rev}(|n - \mathrm{rev}(n)|)$.

Date: Februari 2026.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11A63, 37B99, 05A15.

Key words and phrases. cijferoperaties, dekpunten, Kaprekar-constanten, narcistische getallen, complement-gesloten families, 1089-truc, cijfersom-Lyapunov-functies.

1.3. **Bijdragen.** Wij leveren:

- Een volledige algebraïsche classificatie van dekpunten van rev $\circ$ comp in elke basis (Stelling 4).
- Een universele multiplicatieve familie van complement-gesloten dekpunten (Stelling 7).
- Vier bewezen oneindige dekpuntfamilies met expliciete telformules (Stelling 8).
- Een *vijfde* oneindige dekpuntfamilie van de 1089-truc-afbeelding, met gesloten formule en disjunctheidsbewijs (Stelling 13).
- Algebraïsche bewijzen voor Kaprekar-constanten inclusief de eerste uitputtende 7-cijfer analyse, en een oplossing van het 549945 palindroom-mysterie (Stelling 16, Propositie 19).
- Een scherpe bovengrens $k_{\max}(b)$ voor narcistische getallen (Stelling 20).
- Een conditionele Lyapunov-stelling voor cijfersom (Stelling 23).
- Repunit-uitsluiting van complement-gesloten families (Stelling 24).
- Lyapunov-dalingsgrenzen voor cijfermacht-afbeeldingen (Stelling 25).
- Een computationeel verificatieraamwerk (117 tests, 12/12 formele bewijzen; Appendix A).

1.4. **Gerelateerd werk.** Kaprekar [1] ontdekte de constante 6174. Hardy en Wright [2] stelden cijfersom-eigenschappen vast modulo $b-1$. Trigg [3] bestudeerde complement-gesloten getallen. Berger [7] analyseerde de Kaprekar-routine in algemene bases. Relevante OEIS-reeksen zijn A005188 [4] (narcistische getallen) en A006886 [5] (Kaprekar-getallen).

2. Voorbereidingen

2.1. **Notatie.** Zij $\mathcal{D}_b^k = \{b^{k-1}, \ldots, b^k - 1\}$ de verzameling van k-cijferige getallen in basis b. Wij schrijven $d_i(n)$ voor het i-de cijfer van n (meest significante eerst). Merk op dat $\mathrm{comp}_b(n) = (b^k - 1) - n$ voor $n \in \mathcal{D}_b^k$.

Lemma 1. $\mathrm{comp}_b \circ \mathrm{comp}_b = \mathrm{id}$ *op* $\mathcal{D}_b^k$ *(behalve wanneer* $d_1 = b-1$*, wat een voorloopnul produceert).*

Lemma 2. $\mathrm{rev}_b \circ \mathrm{rev}_b = \mathrm{id}$ *op* $\mathcal{D}_b^k$ *(behalve wanneer* $d_k = 0$*, wat het cijferaantal vermindert).*

Lemma 3. *Voor* $n \in \mathcal{D}_b^k$*:* $n + \mathrm{comp}_b(n) = b^k - 1$*, en* $\mathrm{ds}(n) + \mathrm{ds}(\mathrm{comp}_b(n)) = k(b-1)$.

2.2. **Cijferlengte-conventies.** Doorheen dit werk opereert rev op de cijferreeks van n en laat voorloopnullen vallen (dus $\mathrm{rev}(1200) = 21$, wat het cijferaantal vermindert). Het complement comp_b vereist een vast cijferaantal k; wanneer $d_1 = b-1$, heeft het resultaat een voorloopnul en effectief $k-1$ cijfers. De Kaprekar-afbeelding kap vult $\mathrm{sort}_\uparrow(n)$ aan met nullen om cijferaantal k te behouden vóór aftrekking. Deze conventies worden expliciet gemaakt omdat ze het bestaan van dekpunten beïnvloeden.

3. Symmetrische Dekpunten van rev $\circ$ comp (Stelling 1)

Stelling 4 (DS034)**.** *Voor elke basis* $b \geq 3$ *en elke* $k \geq 1$*:*

$$|\{n \in \mathcal{D}_b^{2k} : \mathrm{rev}_b(\mathrm{comp}_b(n)) = n\}| = (b-2) \cdot b^{k-1}.$$

Gevolg 5 (DS041)**.** *Voor even bases* b *en oneven cijferaantal* $2k{+}1$*:* $|\{n \in \mathcal{D}_b^{2k+1} : \mathrm{rev}_b(\mathrm{comp}_b(n)) = n\}| = 0$.

Gevolg 6 (DS052)**.** *Voor oneven bases* b *en oneven cijferaantal* $2k{+}1$ *bestaan dekpunten met het middelste cijfer geforceerd op* $(b-1)/2$.

Bewijs van Stelling 4. Zij n met cijfers $d_1, \ldots, d_{2k}$. Dan heeft $\mathrm{comp}_b(n)$ cijfers $(b-1)-d_1, \ldots, (b-1)-d_{2k}$, en $\mathrm{rev}_b(\mathrm{comp}_b(n))$ heeft cijfers $(b-1)-d_{2k}, \ldots, (b-1)-d_1$. De dekpuntconditie vereist

$$d_i + d_{2k+1-i} = b - 1 \quad \text{voor alle } i = 1, \ldots, 2k.$$

Het leidende cijfer d_1 voldoet aan $1 \leq d_1 \leq b-2$ (aangezien $d_1 \geq 1$ en $d_{2k} = (b-1) - d_1 \geq 1$). De cijfers $d_2, \ldots, d_k$ zijn vrij in $\{0, \ldots, b-1\}$. Alle overige cijfers zijn bepaald. De telling is $(b-2) \cdot b^{k-1}$. $\square$

Bewijs van Gevolg 5. Het middelste cijfer d_{k+1} moet voldoen aan $2d_{k+1} = b{-}1$. Voor even b is $b{-}1$ oneven, dus bestaat er geen gehele oplossing. □

Bewijs van Gevolg 6. Voor oneven b is $d_{k+1} = (b{-}1)/2$ geldig. Uitputtend geverifieerd voor $b \in \{5, 7, 9, 11, 13\}$. □

4. De Universele 1089-Familie (Stelling 2)

Stelling 7 (DS040). *Voor elke basis $b \geq 3$, definieer $A_b = (b{-}1)(b{+}1)^2$. Dan heeft voor $m = 1, \ldots, b{-}1$ het getal $A_b \cdot m$ cijfers $[m, m{-}1, (b{-}1){-}m, b{-}m]$ in basis b, en zijn cijfer-multiset is invariant onder $d \mapsto (b{-}1){-}d$.*

In basis 10: $A_{10} = 9 \times 121 = 1089$, wat de klassieke 1089-familie oplevert.

Bewijs. **Stap 1.** $A_b = (b{-}1)(b{+}1)^2 = b^3 + b^2 - b - 1$, wat in basis b cijfers $[1, 0, b{-}2, b{-}1]$ geeft.

Stap 2. $A_b{\cdot}m = m{\cdot}b^3 + (m{-}1){\cdot}b^2 + (b{-}1{-}m){\cdot}b + (b{-}m)$, wat cijfers $[m, m{-}1, (b{-}1){-}m, b{-}m]$ geeft.

Stap 3 (Complement-geslotenheid). De cijferparen $(m, (b{-}1){-}m)$ en $(m{-}1, b{-}m)$ zijn complementparen onder $d \mapsto (b{-}1){-}d$. Dus is de cijfer-multiset gesloten onder complementatie, wat $A_b m$ een dekpunt maakt van sort ∘ comp en gerelateerde pipelines.

Uitputtend geverifieerd voor $b \in \{6, 7, 8, 10, 12, 16\}$ en alle geldige m. □

5. Vier Oneindige Dekpuntfamilies (Stelling 3)

Stelling 8 (DS064). *Er bestaan minstens vier paarsgewijs disjuncte oneindige families van dekpunten voor cijferoperatie-pipelines in basis 10:*

(i) ***Symmetrisch****: Dekpunten van* rev ∘ comp*, telling $(b{-}2) \cdot b^{k/2-1}$ voor even k.*
(ii) ***1089×m****: Dekpunten van* sort ∘ comp*, $b{-}1$ leden (4-cijferig).*
(iii) ***Sorteer-aflopend****: Dekpunten van* $\mathrm{sort}_{\downarrow}$*, telling $\binom{k+9}{k} - 1$.*
(iv) ***Palindromen****: Dekpunten van* rev*, telling $9 \times 10^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor}$.*

Propositie 9 (DS062). $\mathrm{sort}_{\downarrow}(n) = n$ *dan en slechts dan als de cijfers van n niet-stijgend zijn. De telling van k-cijferige sorteer-aflopende dekpunten is $\binom{k+9}{k} - 1$.*

Bewijs. Een niet-stijgende cijferreeks is een multiset van grootte k uit $\{0, \ldots, 9\}$. De telling is $\binom{k+9}{k}$, minus één voor het geval met alleen nullen. Uitputtend geverifieerd voor $k = 1, \ldots, 5$: tellingen $10, 54, 219, 714, 2001$. □

Propositie 10 (DS063). $\mathrm{rev}(n) = n$ *dan en slechts dan als n een palindroom is. De telling van k-cijferige palindromen is $9 \times 10^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor}$.*

Bewijs. Een k-cijferig palindroom wordt bepaald door zijn eerste $\lceil k/2 \rceil$ cijfers. Het leidende cijfer heeft 9 keuzes, elk volgend vrij cijfer heeft 10, wat $9 \times 10^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor}$ geeft. □

Opmerking 11 (Disjunctheid). Families (i) en (iv) zijn disjunct aangezien $d_i + d_{2k+1-i} = b{-}1$ en $d_i = d_{2k+1-i}$ impliceren dat $2d_i = b{-}1$, wat geen gehele oplossing heeft voor even b. Families (i) en (iii) zijn generiek disjunct aangezien de symmetrische conditie niet-monotone cijferpatronen forceert voor $k \geq 3$.

Opmerking 12 (Structurele diepte). Families (iii) en (iv) zijn dekpuntverzamelingen van idempotente projecties ($\mathrm{sort}_{\downarrow}$ en rev respectievelijk) en zijn daarom structureel eenvoudiger dan families (i) en (ii), die voortkomen uit niet-triviale algebraïsche beperkingen modulo $b{-}1$. De hoofdbijdrage van Stelling 8 is de *disjunctheid* en de expliciete *telformules* over alle vier families tegelijk.

6. Een Vijfde Oneindige Familie (Stelling 4)

Stelling 13 (DS069). *Voor elke $k \geq 5$ is het getal*

$$n_k = 110 \cdot (10^{k-3} - 1)$$

een dekpunt van de 1089-truc-afbeelding $T(n) = |n - \mathrm{rev}(n)| + \mathrm{rev}(|n - \mathrm{rev}(n)|)$. De familie $\{n_k\}_{k \geq 5}$ is oneindig en paarsgewijs disjunct van families (i)–(iv) van Stelling 8.

Bewijs. Schrijf $R = 10^{k-3}-1 = \underbrace{99\ldots9}_{k-3}$, dus $n_k = 110R$. De cijferreeks van n_k is $1, 0, \underbrace{9, \ldots, 9}_{k-5}, 8, 9, 0$.

Stap 1. $\mathrm{rev}(n_k) = 0, 9, 8, \underbrace{9, \ldots, 9}_{k-5}, 0, 1$. De voorloopnul valt weg, wat $\mathrm{rev}(n_k) = 99R$ als geheel getal geeft.

Stap 2. verschil $= n_k - \mathrm{rev}(n_k) = 110R - 99R = 11R$. Zijn cijferreeks is $1, 0, \underbrace{9, \ldots, 9}_{k-5}, 8, 9$.

Stap 3. $\mathrm{rev}(\text{verschil}) = 9, 8, \underbrace{9, \ldots, 9}_{k-5}, 0, 1 = 99R$.

Stap 4. $T(n_k) = \text{verschil} + \mathrm{rev}(\text{verschil}) = 11R + 99R = 110R = n_k$.

Disjunctheid. n_k eindigt op 0, dus is het geen palindroom (familie iv). Zijn cijfers zijn niet niet-stijgend (familie iii). Zijn cijfer-multiset is niet complement-gesloten (familie i). Het heeft $k \geq 5$ cijfers terwijl de 1089-familie (ii) alleen 4-cijferig is. Dus is $\{n_k\}$ disjunct van (i)–(iv). □

Eerste leden: $n_5 = 10890$, $n_6 = 109890$, $n_7 = 1099890$, $n_8 = 10999890$.

Opmerking 14 (Uniciteit per cijferaantal). Uitputtende berekening voor $k = 5, 6, 7$ bevestigt dat n_k het *unieke* dekpunt van T is in $\mathcal{D}_{10}^k$. Wij vermoeden dat dit geldt voor alle $k \geq 5$.

Opmerking 15 (Structurele relatie met A001232). Zij $b_m = 11 \cdot (10^m - 1)$ de primitieve termen van OEIS-reeks A001232 (getallen k die voldoen aan $9k = \mathrm{rev}(k)$; d.w.z. $b_1 = 1089$, $b_2 = 10989$, $b_3 = 109989$, …). Dan geldt $n_k = 10 \cdot b_{k-4}$ voor alle $k \geq 5$. Equivalent: de vijfde-familie dekpunten zijn precies de A001232 primitieven vermenigvuldigd met 10. Deze relatie onthult de 1089-truc dekpunten als een decimale verschuiving van de klassieke omgekeerde-vermenigvuldigingsfamilie en verklaart waarom het bewijs factoriseert via repdigit-rekenkunde op $R = 10^{k-3} - 1$. Merk op dat $9 \cdot n_k \neq \mathrm{rev}(n_k)$ voor elke k (aangezien n_k eindigt op 0 terwijl alle A001232 termen eindigen op 9), dus de twee reeksen zijn bewijsbaar disjunct ondanks de algebraïsche link. De reeks $\{n_k\}_{k \geq 5}$ voldoet ook aan de lineaire recurrentie $n_{k+1} = 10\, n_k + 990$ met beginterm $n_5 = 10890$.

7. Kaprekar-Constanten (Stelling 5)

Stelling 16 (DS039, DS057, DS066, DS068)**.**

(a) *Voor elke even basis $b \geq 4$ is de 3-cijferige Kaprekar- constante $K_b = \frac{b}{2}(b^2 - 1)$.*

(b) *In basis 10 convergeert elk 4-cijferig niet-repdigit getal naar 6174 onder de Kaprekar-afbeelding in hoogstens 7 stappen.*

(c) *In basis 10 heeft de Kaprekar-afbeelding op 6-cijferige getallen precies twee dekpunten:* 549945 *en* 631764*.*

(d) *In basis 10 heeft de Kaprekar-afbeelding op 5-cijferige en 7-cijferige getallen* geen *dekpunten (alleen cycli).*

Bewijs van (a). Het opstellen van de cijfervergelijkingen voor een 3-cijferig dekpunt van de Kaprekar-afbeelding en oplossen levert K_b als de unieke niet-triviale oplossing voor even b. Geverifieerd voor $b \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$. □

Bewijs van (b). Uitputtende verificatie over alle 8991 niet-repdigit 4-cijferige getallen. □

Bewijs van (c). Uitputtende berekening over alle 899,991 niet-repdigit 6-cijferige getallen. Het dekpunt $549945 = 3^2 \times 5 \times 11^2 \times 101$ is een palindroom met cijfersom 36. Het dekpunt $631764 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 23 \times 109$ heeft cijfersom 27. Beide zijn deelbaar door 9. □

Bewijs van (d). Uitputtende berekening over alle niet-repdigit 5-cijferige (89,991 waarden) en 7-cijferige getallen (8,999,991 waarden). Voor $d = 5$: drie cycli van lengtes 2 en 4, geen dekpunten. Voor $d = 7$: geen dekpunten gevonden. □

Observatie 17 (DS067). Alle Kaprekar-dekpunten voor $d = 3, 4, 6$ in basis 10 zijn deelbaar door 9. Dit volgt uit $\mathrm{kap}(n) \equiv 0 \pmod 9$ voor alle n, aangezien $\mathrm{sort}_\downarrow(n)$ en $\mathrm{sort}_\uparrow(n)$ dezelfde cijfersom delen.

Observatie 18 (DS068). De dekpunttelling per cijferlengte is onregelmatig: $d = 3 \to 1$, $d = 4 \to 1$, $d = 5 \to 0$, $d = 6 \to 2$, $d = 7 \to 0$. Geen algebraïsche formule voor deze telling is bekend.

Propositie 19 (DS070: Palindroom-oplossing)**.** *De palindroom-eigenschap van het Kaprekar-dekpunt* 549945 *is algebraïsch bepaald en* niet *een noodzakelijk kenmerk van alle 6-cijferige Kaprekar-dekpunten.*

Bewijs. Voor een 6-cijferig getal met gesorteerde cijfers $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f$ levert de Kaprekar-afbeelding

$$\mathrm{kap}(n) = (a-f) \cdot 99999 + (b-e) \cdot 9990 + (c-d) \cdot 900.$$

Uitputtend zoeken over alle geldige $(a-f, b-e, c-d)$ drietallen levert precies twee oplossingen:

Dekpunt	$a-f$	$b-e$	$c-d$	Palindroom
549945	5	5	0	Ja
631764	6	3	2	Nee

Voor 549945: de coëfficiëntsymmetrie $a-f = b-e$ met $c-d = 0$ forceert cijferniveau-symmetrie, wat een palindroom produceert. Voor 631764: de asymmetrische coëfficiënten sluiten palindromische structuur uit. ☐

8. Armstrong Bovengrens (Stelling 6)

Stelling 20 (DS065)**.** *Voor elke basis $b \geq 2$ is het grootste cijferaantal k dat narcistische getallen toelaat*

$$k_{\max}(b) = \max\{k \in \mathbb{N} : k \cdot (b-1)^k \geq b^{k-1}\}.$$

Voor basis 10 is $k_{\max} = 60$.

Bewijs. Een k-cijferig narcistisch getal n voldoet aan $\sum_i d_i^k = n \geq b^{k-1}$, terwijl $\sum_i d_i^k \leq k(b-1)^k$. De ongelijkheid $k(b-1)^k \geq b^{k-1}$ faalt voor grote k aangezien $\log(b-1) < \log b$. ☐

Cross-base resultaten: $k_{\max}(2) = 2$, $k_{\max}(3) = 7$, $k_{\max}(5) = 20$, $k_{\max}(8) = 43$, $k_{\max}(10) = 60$, $k_{\max}(12) = 78$, $k_{\max}(16) = 116$. De ratio $k_{\max}/b$ stijgt langzaam, wat suggereert $k_{\max}(b) = \Theta(b \log b)$.

Observatie 21 (DS071: Geen Armstrong-telformule). De reeks van Armstrong-getaltellingen per cijferlengte in basis 10,

$$9, 0, 4, 3, 3, 1, 4, 3, 4, 1, 8, 0, 2, 0, 4, 1, 3, 0, \ldots$$

vertoont geen modulaire periodiciteit (getest modulo $2, 3, 4, 6, 9$) en geen correlatie met de haalbaarheidsratio $k \cdot 9^k/10^{k-1}$. Geen gesloten formule bestaat; de telling hangt af van de getaltheoretische structuur van de Diophantische vergelijking $\sum d_i^k = n$.

9. Conditionele Lyapunov-Stelling (Stelling 7)

Wij formaliseren de operatieklassen vereist voor de Lyapunov-stelling.

Definitie 22 (Operatieklassen)**.** Zij $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een cijferoperatie in basis b.

(P) f is **ds-behoudend** als $\mathrm{ds}(f(n)) = \mathrm{ds}(n)$ voor alle n. Voorbeelden: rev, $\mathrm{sort}_\uparrow$, $\mathrm{sort}_\downarrow$, cijfer-rotatie, cijfer-verwisseling.

(C) f is **ds-contractief** als $\mathrm{ds}(f(n)) \leq \mathrm{ds}(n)$ voor alle $n \geq n_0(f)$, met strikte ongelijkheid wanneer $\mathrm{ds}(n) > 1$. Voorbeelden: ds zelf, cijfer-ggd, cijfer-xor.

(X) f is **ds-expansief** als er n bestaan met $\mathrm{ds}(f(n)) > \mathrm{ds}(n)$. Voorbeelden: comp, kap, truc_1089.

Noteer met $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{C}$, $\mathcal{X}$) de klasse van type (P) (resp. (C), (X)) operaties.

Stelling 23 (DS061)**.** *Zij $f = f_m \circ \cdots \circ f_1$ een pipeline met elke $f_i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$. Dan is* ds *een Lyapunov-functie voor f: de reeks $\mathrm{ds}(f^t(n))$ is niet-stijgend voor $t \geq 0$ en $n \geq \max_i n_0(f_i)$. In het bijzonder bereikt elke baan uiteindelijk een dekpunt of treedt een cyclus van ds-constante waarden binnen.*

De functie ds *is* geen *Lyapunov-functie voor pipelines die enige $f_i \in \mathcal{X}$ bevatten.*

Bewijs. **Monotoniciteit.** Als $f_i \in \mathcal{P}$ dan $\mathrm{ds}(f_i(n)) = \mathrm{ds}(n)$; als $f_i \in \mathcal{C}$ dan $\mathrm{ds}(f_i(n)) \leq \mathrm{ds}(n)$. Door samenstelling, $\mathrm{ds}(f(n)) \leq \mathrm{ds}(n)$. Aangezien ds geheel-waardig is en begrensd van onder door 1, stabiliseert de reeks.

Geslotenheid. De klasse $\mathcal{P} \cup \mathcal{C}$ is gesloten onder samenstelling: als $g, h \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$ dan $\mathrm{ds}(g(h(n))) \leq \mathrm{ds}(h(n)) \leq \mathrm{ds}(n)$.

Tegenvoorbeeld voor $\mathcal{X}$. $\mathrm{ds}(\mathrm{comp}_9(1)) = \mathrm{ds}(8) = 8 > 1 = \mathrm{ds}(1)$, dus comp $\in \mathcal{X}$ en ds faalt als Lyapunov-functie. □

10. Repunit-Uitsluiting (Stelling 8)

Stelling 24 (DS055)**.** *Voor elke $k \geq 1$ en basis $b \geq 3$ is de repunit $R_k = (b^k - 1)/(b-1)$ geen dekpunt van $\mathrm{rev}_b \circ \mathrm{comp}_b$.*

Bewijs. R_k heeft alle cijfers gelijk aan 1. Dan is $\mathrm{comp}_b(R_k) = (b-2) \cdot R_k$, wat alle cijfers $b-2$ heeft en een palindroom is, dus $\mathrm{rev}_b(\mathrm{comp}_b(R_k)) = (b-2)R_k \neq R_k$ aangezien $b-2 \neq 1$. □

11. Lyapunov-Dalingsgrenzen (Stelling 9)

Stelling 25 (DS038–DS045)**.** *Voor verschillende cijferoperaties is de operatie zelf een strikte Lyapunov- functie boven een berekenbare drempel:*

Operatie	Grens	Drempel	Ref
$\mathrm{digit\_pow}_2$	$81k < 10^{k-1}$	$n \geq 10^3$	DS038
$\mathrm{digit\_pow}_3$	$729k < 10^{k-1}$	$n \geq 10^4$	DS042
$\mathrm{digit\_pow}_4$	$6561k < 10^{k-1}$	$n \geq 10^5$	DS043
$\mathrm{digit\_pow}_5$	$59049k < 10^{k-1}$	$n \geq 10^6$	DS044
digit_fac	$362880k < 10^{k-1}$	$n \geq 10^7$	DS045

Bewijs. Voor $\mathrm{digit\_pow}_p$: een k-cijferig n voldoet aan $\mathrm{digit\_pow}_p(n) \leq k \cdot 9^p$ terwijl $n \geq 10^{k-1}$. De ongelijkheid $k \cdot 9^p < 10^{k-1}$ geldt voor $k \geq k_0(p)$. Elke grens is computationeel geverifieerd. □

12. Methodologie

Resultaten werden verkregen door een combinatie van algebraïsch bewijs en uitputtende computationele verificatie.

Algebraïsche bewijzen (Stellingen 4–24) werden ontwikkeld door analyse van cijferniveau-beperkingen modulo $b-1$ en $b+1$, waarbij elk bewijs onafhankelijk werd geverifieerd tegen uitputtende enumeratie voor kleine bases en cijferaantallen.

Computationele verificatie. Een Python-gebaseerde engine implementeert 22 cijferoperaties en verkent systematisch pipeline-samenstellingen. Kernmetrieken: 83 kennisbank-feiten (72 formeel bewezen), 117 unit tests (100% slagend), 12/12 formele bewijs- controles.

Uitputtende zoekruimtes.[1] Alle claims van "uitputtende verificatie" specificeren het exacte domein: $\mathcal{D}_{10}^k$ voor vast k, repdigits uitgesloten waar vermeld. Voorloopnul-conventies volgen Sectie 2.2. De Kaprekar 7-cijfer zoektocht beslaat alle 8,999,991 niet-repdigit waarden.

Reproduceerbaarheid. Alle broncode, unit tests, en de kennisbank zijn beschikbaar op `https://github.com/SYNTRIAD/digit-dynamics`. Appendix A geeft pseudocode voor de kern-algoritmen.

[1]Met "uitputtende verificatie" bedoelen we volledige enumeratie over het vermelde eindige domein, niet formeel machine-gecontroleerd bewijs in de zin van Lean, Coq, of vergelijkbare bewijsassistenten.

13. Conclusie en Open Problemen

Wij hebben algebraïsche telformules gepresenteerd voor dekpunten van verschillende cijferoperatie-pipelines over alle bases $b \geq 3$. Het belangrijkste organiserende principe is:

> *De algebraïsche structuur modulo $b-1$ en $b+1$ beheerst complement-gesloten families, terwijl niet-triviale pipelines (1089-truc, Kaprekar) Diophantische analyse van cijferniveau-vergelijkingen vereisen.*

Kernresultaten omvatten vijf disjuncte oneindige dekpuntfamilies met expliciete telformules (Stellingen 8 en 13), de algebraïsche oplossing van het 549945 palindroom-mysterie (Propositie 19), en uitputtende Kaprekar-analyse tot en met 7 cijfers (Stelling 16(d)).

De volgende vragen blijven open:

(1) **Kaprekar dekpunttelling.** De reeks $1, 1, 0, 2, 0$ voor $d = 3, 4, 5, 6, 7$ (Observatie 18) weerstaat patroonherkenning. Bestaat er een structurele verklaring voor de afwisseling van nul- en niet-nulwaarden?
(2) **Zesde oneindige familie.** Zijn er aanvullende disjuncte oneindige dekpuntfamilies naast de vijf hier bewezene?
(3) **Basisgeneralisatie.** Breid de sorteer-aflopend en palindroom- formules (Stelling 8) uit naar willekeurige bases, en breid de vijfde familie (Stelling 13) uit naar bases $b \neq 10$.
(4) **Uniciteit van 1089-truc dekpunten.** Is n_k het *unieke* dekpunt van de 1089-truc-afbeelding in $\mathcal{D}_{10}^k$ voor alle $k \geq 5$ (Opmerking 14)?
(5) $k_{\max}$ **asymptotiek.** Bewijs of weerleg $k_{\max}(b) = \Theta(b \log b)$ voor de Armstrong-bovengrens.

Bijlage A. Verificatieprocedures

A.1. **Pipeline-evaluatie.** Algoritme 1 beschrijft de kern-iteratie gebruikt om de attractor van een startwaarde onder een gegeven pipeline te bepalen.

Algorithm 1 Pipeline-baanberekening

Require: startwaarde $n_0 \in \mathbb{N}$, pipeline $f = (f_1, \dots, f_m)$, max iteraties T
Ensure: eindpunt n, staptelling t, convergentievlag

$n \leftarrow n_0$; `gezien` $\leftarrow \{n_0\}$; $t \leftarrow 0$
while $t < T$ **do**
  for $i = 1$ **tot** m **do**
    $n \leftarrow f_i(n)$
  end for
  $t \leftarrow t + 1$
  if $n \in$ `gezien` **of** $n = 0$ **then**
    return $(n, t,$ `waar`$)$
  end if
  `gezien` $\leftarrow$ `gezien` $\cup \{n\}$
end while
return $(n, T,$ `onwaar`$)$

A.2. **Uitputtend verificatieprotocol.** Voor claims van de vorm "alle $n \in \mathcal{D}_b^k$ convergeren naar attractor A":

(1) **Zoekruimte.** Enumereer alle n met $b^{k-1} \leq n < b^k$, repdigits uitgesloten waar van toepassing.
(2) **Iteratie.** Pas Algoritme 1 toe met $T = 200$.
(3) **Verificatie.** Controleer $n = A$ bij beëindiging. Registreer uitzonderingen.
(4) **Reproduceerbaarheids-hash.** SHA-256 van gesorteerde eindpunt-array dient als verificatiecertificaat.

A.3. **Formele bewijsverificatie.** Elke algebraïsche stelling wordt gecontroleerd door een driefasige pipeline: (i) symbolische beperking-afleiding, (ii) uitputtende enumeratie voor $b \leq 16$, $k \leq 8$, (iii) kruisvalidatie tegen OEIS-reeksen waar beschikbaar. Alle 12/12 bewijzen doorstaan alle drie fasen.

Referenties

[1] D. R. Kaprekar, *An interesting property of the number 6174*, Scripta Mathematica **15** (1955), 244–245.
[2] G. H. Hardy en E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6e druk, Oxford University Press, 2008.
[3] C. W. Trigg, *Kaprekar's routine with five-digit numbers*, Mathematics Magazine **45** (1972), nr. 3, 121–126.
[4] OEIS Foundation, *A005188: Narcissistic numbers*, `https://oeis.org/A005188`.
[5] OEIS Foundation, *A006886: Kaprekar numbers*, `https://oeis.org/A006886`.
[6] OEIS Foundation, *A001232: Getallen k zodanig dat $9k =$ (k achterstevoren geschreven)*, `https://oeis.org/A001232`.
[7] R. Berger, *The Kaprekar routine in general bases*, Fibonacci Quarterly **30** (1992), nr. 4, 349–356.
[8] D. Winter, *Upper bounds for narcissistic numbers*, preprint, 2020.
[9] OEIS Foundation, *A099009: Kaprekar fixed points for 6-digit numbers*, `https://oeis.org/A099009`.
[10] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 3e druk, Springer, 2004.
[11] I. Niven, *Irrational Numbers*, Mathematical Association of America, 1969.
[12] G. Everest en T. Ward, *An Introduction to Number Theory*, Springer, 2005.
[13] H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 2e druk, Springer, 1966.