第二章：数字图像基础

视觉感知要素

人视觉是由眼睛中锥状体和杆状体组成的。低照明级别杆状体起作用。在背景照明增强时锥状体起作用。

光和电磁波谱

$\lambda = \frac{c}{\nu}$ $E = hv$ 可见光的波长范围：约 400~700nm $\Delta I_\epsilon / I$ 称为韦伯比

辐射强度:光源流出能量总量;光通量给出观察者从光源感受到的能量，用流明数度量;亮度是光感受的主观描绘，不能测量，描述彩色感觉参数之一；灰度级用来描述单色光图像的亮度

图像感知与获取

传感器:CCD,CMOS

简单的成像模型

$f(x,y) = i(x,y) r(x,y)$,其中$i(x,y)$为入射分量(低频)，$r(x,y)$为反射分量(高频)

其中$0 \le f(x,y), i(x,y) < \infty$ $0 \le r(x,y) \le 1$;r=0 全吸收,1 全反射

图像取样和量化

对坐标值进行数字化称为取样,对幅度值进行数字化称为量化,原点位于图像的左上角，x 轴向下，y 轴向右

坐标索引：像二维坐标(x, y);线性索引通过计算到坐标(0, 0)的偏移量得到的,行/列扫描

空间分辨率：图像中可辨别的最小细节 灰度分辨率：灰度级中可分辨的最小变化;打印机单位距离可以分辨的最小线对数 DPI;数字图像:图像大小，即行数 x 列数 PPI

图像对比度：一幅图像中最高和最低灰度级间的灰度差为对比度。

基本的图像重取样方法：图像内插。有最近邻内插;常选用双线性(v(x, y) = ax + by + cxy + d 四个系数可用 4 个最近邻点的 4 个未知方程求出)和双三次内插。

像素间的一些基本关系

$N_4(p)$上下左右,$N_D(p)$四个对角,$N_8(p) = N_4(p) \cup N_D(p)$

值域 V，V 是 0 到 255 中的任一个子集

4 邻接:点 q 在$N_4(p)$中，并 q 和 p 具有 V 中的数值

8 邻接:点 q 在$N_8(p)$中，并 q 和 p 具有 V 中的数值

m 邻接(混合邻接): 1.q 在 p 的$N_4(p)$ 或者 2.q 在 p 的$N_{D(p)}$中，$N_4(P) \cap N_4(Q)$中没有 V 值的像素

欧氏距离(De): $D_e(p,q) = \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}$ 街区距离(D4): $D_4(p,q) = |x-s| + |y-t|$

棋盘距离(D8): $D_8(p,q) = \max(|x-s|, |y-t|)$

对应元素运算和矩阵运算

图像相加：取平均降噪。相减：增强差别。相乘和相除：校正阴影。

三个基本量用于描绘彩色光源的质量：发光强度、光通量和亮度。

一幅数字图像占用的空间：$M \times N \times k$。

第三章：灰度变换与空间滤波

基本的灰度变换

反转变换$S = L - 1 - r$;增强暗色区域中的白色或灰色细节;
对数变换$S = c\log(1+r)$;将范围较窄的低灰度值映射为范围较宽的
幂律(伽马)变换$s = cr^\gamma$; $\gamma < 1$ 变亮,加强暗细节;反之变暗,加强亮细节;可增强对比度
分段线性变换:
1.对比度拉伸:提高灰度级的动态范围,改善对比度;
2.灰度级分层:突出某区间灰度,其他位置可不变也可降级;
3.比特平面分层:8bit 灰度图分割成 8 个比特面,(左)高位表示主体信息,低位给出不同程度的细节

直方图处理

直方图容器:$h(r_k) = n_k, \quad k = 0,1,2,\cdots,L-1$; n_k是 f 中灰度为r_k的像素的数量 ; k 越大越白
直方图:对容器归一化$p(r_k) = \frac{h(r_k)}{MN} = \frac{n_k}{MN}$
无空间信息,不同图像可能直方图相似,同一图像切片的直方图有可加性;若一幅图像其像素占有全部可能的灰度级并且分布均匀，这样的图像灰度对比 度高、细节会相对明显

均衡化

假设$s = T(r)$在$0 \le r \le L-1$，$T(r)$严格单调递增且$0 \le T(r) \le L-1$。
变换前后的 pdf 为$p_{r(r)}, p_{s(s)}$
若$T(r)$还可微，有$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right|$

连续情况$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)dw$ 变换后$p_s = \frac{1}{L-1}$完全平坦
离散情况$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} \frac{n_k}{MN}$ 无法得到完全平坦的分布
目的:使图像产生灰度级丰富且动态范围大的图像灰度;期望得到均匀分布直方图;数字图像均衡化只是连续情况的近似;
简并:灰度级减少了（不同的灰度变换到同一灰度）

匹配(规定化)

使得直方图变换到规定的分布;均衡可以看作是匹配的特例
输入原始图$p_{r(r)}$，目标图像$p_{z(z)}$，求输入r到输出z的变换公式
把原始图像和目标图像都用均衡化的作为桥梁
连续：原图均衡化$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,\mathrm{d}w$;目标图均衡化$s = G(z) = (L-1)\int_0^z p_z(\nu)\,\mathrm{d}\nu$
均衡化图求逆得到目标$z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)]$

离散：$q, k \in [0, L-1]$ $s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{\mathrm{k}} p_r(r_j)$;
$s_k = G(z_q) = (L-1)\sum_{i=0}^{q} p_z(z_i)$; $z_q = G^{-1}(s_k)$
s_k定义域和值域都是离散且有限,可用一表格记录其对应关系，并采样遍历方式找到最优匹配值,无需求逆

局部处理

图像/图像块(全局/局部)的统计距计算
设$p(r_i) = \frac{n_i}{n}, \quad i = 0,1,2,\ldots,L-1$
灰度级r相对于均值 m 的n阶中心矩为：$\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{L-1}(r_i - m)^n p(r_i)$
m 是 r 的均值:$m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$ 衡量明暗程度
$n = 2$为方差:$\sigma^2 = \mu_2(r) = \sum_{i=0}^{L-1}(r_i - m)^2 p(r_i)$ 衡量灰度变化的程度

局部直方图处理:设置一个函数,对满足特定的 m 和σ的邻域进行变换,其他不变

空间滤波

线性空间滤波

对于大小为$m \times n$(行 x 列)的核，$m = 2a+1$和$n = 2b+1$，其中 a 和 b 是非负整数。
w 是个二维矩阵,左上角从(-a,-b)开始,f 左上角从(0,0)开始
$g(x,y) = \sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$
新像素是旧像素线性组合;核中心和原图左上角开始对齐运算

空间相关与卷积

一维核旋转 180°相当于这个核绕相对于其轴进行翻转。
二维旋转 180°等效于核关于其一个轴翻转，然后关于另一个轴翻转。
相关$(w \star f)(x,y) = \sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$
卷积$(w \star f)(x,y) = \sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x-s, y-t)$ 等同于将核旋转 180 度后再做相关
卷积满足交换，结合，分配律;相关只满足分配律
N 输出大小，W 输入大小，P 填充大小，S 步长 F 卷积核大小
$N = \frac{(W-F+2P)}{S} + 1$
两个滤波器大小为$M \times M$和$N \times N$，卷积后的大小是$(M+N-1) \times (M+N-1)$

可分离滤波器核

大小为 $m \times n$ 的滤波核可表示为两个向量的积 $w = w_1 w_2^T = w_1 \star w_2$
$w_1 w_2$为$m \times 1$,$n \times 1$列向量
(一个列向量和一个行向量的积等于这两个向量的二维卷积)

可分离核执行卷积相对不可分离核执行卷积的计算优势:
$C = \frac{MNmn}{MN(m+n)} = \frac{mn}{m+n}$
可分离核条件：$rank(w) = 1$
分离方法： 在核 w 中找到任何一个非零元素a,值为E；提取a所在的列与行，形成列向量c和r; ; $w_1 = c$, $w_2^T = \frac{r}{E}$

平滑（低通）空间滤波器

降低相邻灰度的急剧过度，以减少无关细节（噪声）；平滑通过对相邻像素求和（积分）实现. 归一化确保亮度不变 ;
低通滤波可去除“无关”细节：即比其核小很多的点/区域
$g(x,y) = \frac{\sum_{s=-a t=-b}^{a}\sum_{-b}^{b} w(s,t) f(x+s,y+t)}{\sum_{s=-a t=-b}^{a}\sum_{-b}^{b} w(s,t)}$

盒式线性滤波 $\frac{1}{9} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 一般线性平滑 $\frac{1}{16} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

盒式滤波器:每个元素相同;核越大,对越多像素做平均,其平滑程度越明显，细节丢失越多;
高斯核函数 $w(s,t) = G(s,t) = Ke^{-\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}}$ 一般选核大小奇数接近6σ 对同一图像，高斯核越大越模糊 ; 圆对称：到中心点距离r一样，则对应系数一样的;可分离：可写成两个一维的高斯分布相乘形式
对比：高斯核更适合去噪和平滑处理;盒式核更适合锐化和边缘增强。

锐化（高通）空间滤波器

凸显灰度的过渡部分，以增强图像中的细节。锐化用相邻像素差分（导数）来实现.
一维差分 $\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$

拉普拉斯算子

连续：$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
离散：$\nabla^2 f = [f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1)] - 4f(x,y)$
常见拉普拉斯滤波器特点:1. 中心对称；2. 中间值的绝对值大； 3. 和为零。
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) - \nabla^2 f(x,y), & \text{当拉普拉斯滤波中心系数为负} \\ f(x,y) + \nabla^2 f(x,y), & \text{当拉普拉斯滤波中心系数为正} \end{cases}$

钝化掩蔽和高提升滤波

用于增强图像的细节和边缘
模糊图像$\hat{f}(x,y)$ 模板$g_{mask}(x,y) = f(x,y) - \hat{f}(x,y)$ 加权相加 $g(x,y) = f(x,y) + kg_{mask}(x,y)$
k=1 为钝化掩蔽 k>1 为高提升滤波 k<1 不强调钝化模板的贡献

低通、高通、带阻和带通滤波器

单位冲激中心和滤波器核中心重合
低通 $lp(x,y)$，高通 $hp(x,y) = \delta(x,y) - lp(x,y)$
带阻 $br(x,y) = lp_1(x,y) + hp_2(x,y), = lp_1(x,y) + [\delta(x,y) - hp_2(x,y)]$，带通 $bp(x,y) = \delta(x,y) - br(x,y) = \delta(x,y) - [lp_1(x,y) + [\delta(x,y) - lp_2(x,y)]]$

第四章：频率域滤波

在空域不好解决的问题，在频域上可能变得非常容易（性能及时间上）;不同于空域像素的调整，对频谱系数修改会作用于整个空域图像。空域适合：局部特征、实时操作、简单的像素级调整。频域适合：全局特征、复杂操作、周期性噪声去除、压缩等。

采样

周期冲激串 $s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta T)$
取样后函数$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$
积分得到取样点的值$f_k(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T)\mathrm{d}t = f(k\Delta T)$
采样定理:采样率f_s应大于等于信号最高频率的两倍，即$f_s > 2f_{\max}$，否则会出现混叠现象。

单变量的傅里叶变换

连续 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t}d\mu \quad F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty}$; $f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt$
离散 $u, x \in [0, M-1]$
$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M}$; $f(x) = \frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{j2\pi ux/M}$
冲激性质:$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = 2\pi\delta(t)$; $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$
$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-i2\pi\frac{mk}{n}} = \begin{cases} n, & \text{如果}\ m \equiv 0 \pmod{n} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$;$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$; $\sum_{x=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi kx}{M}} = M\delta(k)$
$\delta(k,l) = \delta(k)\cdot\delta(l)$; $\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} e^{-j\left(\frac{2\pi kx}{M} + \frac{2\pi ly}{N}\right)} = MN\delta(k,l)$

二变量函数的傅里叶变换

二维傅里叶变换是一维情形向两个方向的简单扩展
$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,z)e^{-j2\pi(ut+vz)}dtdz$; $f(t,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)e^{j2\pi(\mu t+vz)}dudv$
采样：$\tilde{f}(t,z) = f(t,z)s_{\Delta T\Delta Z}(t,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t,z)\sigma(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$
DFT：$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$
IDFT：$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$

二维 DFT 和 IDFT 性质

谱 $|F(u,\nu)| = \left[R^2(u,\nu) + I^2(u,\nu)\right]^{1/2})$ 相角$\phi(u,v) = \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$ R 实部,I 虚部
极坐标 $F(u,\nu) = |F(u,\nu)|e^{j\phi(u,v)}$
周期性(k 为整数) $F(u,v) = F(u + k_1 M, v + k_2 N)$
$f(x,y) = f(x + k_1 M, y + k_2 N)$

卷积 $(f\star h)(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$

相关 $(f\star h)(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f^*(m,n)h(x+m,y+n)$

使用 DFT 算法求 IDFT $MNf^*(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F^*(u,v)e^{-j2\pi(ux/M+\nu y/N)}$ 结果取复共轭并除以 MN 就可得到反变换; **共轭对称性**$F(-u,-v)=F^*(u,v)$

离散单位冲激 $\delta(x,y)\Leftrightarrow 1, 1\Leftrightarrow MN\delta(u,v)$

卷积定理$(f\star h)(x,y)\Leftrightarrow (F\cdot H)(u,v)\parallel (f\cdot h)(x,y)\Leftrightarrow \frac{1}{MN}(F\star H)(u,v)$

平移性 $f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$
$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+\nu y_0/N)}$
$\delta(x-a,y-b)\Leftrightarrow e^{-j2\pi(ua+vb)}$

频率域滤波

(1)对图像 f(x,y)进行零填充(长宽均变为两倍，变为$P\times Q$
(2)频谱中心化：用$(-1)^{x+y}=e^{j\pi(x+y)}$乘以填充后的图像
(3)计算(2)结果的 DFT，即$F(u,v)$;
(4)用滤波器函数(中心在(P/2,Q/2))$H(u,v)$乘以$F(u,v)$：$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$
(5)计算(4)中结果的 IDFT，$g(x,y)=F^{-1}(G(u,v))$理论值为实数，计算误差会导致出现寄生复成分
(6)得到(5)结果中的实部;
(7) 用$(-1)^{\{(x+y)\}}$乘以(6)中的结果
(8)提取(7)中的左上角(与输入图像同大小)。

低通频率域滤波器

理想低通滤波器 ILPF D_0为截止频率;$D(u,v)=\left[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2\right]$; $H(u,v)=\{^{1,\ \ D(u,v)\le D_0}_{0,\ \ D(u,v)>D_0};$
截止频率位置 D0 决定了通过的频率成分所包含的功率, 以及在总功率中所占的比例
总功率$P_T=\sum_{u=0}^{P-1}\sum_{v=0}^{Q-1}P(u,v)=\sum_{u=0}^{P-1}\sum_{v=0}^{Q-1}|F(u,v)|^2$
在 D(u,v)内的功率占比 $\alpha=100\sum_u\sum_v \dot{P}(u,v)/P_T \quad where \quad D(u,v)\le D_0$
理想的低通滤波器无法通过电子元件实现;通过计算机模拟会出现模糊与振铃现象
巴特沃斯 BLPF $H(u,v)=\frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}}$; 高斯 GLPF $H(u,v)=e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$ 无振铃效应
例子:低分辨率文本字符修复,面部柔和,去除传感器扫描线

高通滤波器

对低通滤波相反操作得到高通：
$H_{HP}(u,v)=1-H_{LP}(u,v)$; $h_{HP}=\delta(x,y)-h_{LP}(x,y)\neq 1-h_{LP}(x,y)$
理想 IHPF：$H(u,v)=\{^{0,\ \ D(u,v)\le D_0}_{1,\ \ D(u,v)>D_0}$
巴特沃斯：$H(u,v)=\frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$; 高斯：$H(u,v)=1-e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$
频域拉普拉斯算子： $H(u,v)=-4\pi^2(u^2+v^2)$ 中心化版 $H(u,v)=-4\pi^2[(u-P/2)^2+(v-Q/2)^2]=-4\pi^2D^2(u,v)$
基于锐化滤波的图像增强$g(x,y)=f(x,y)+c\nabla^2f(x,y)$;其中二阶梯度傅里叶变换为 H*F
高提升滤波：$H_{hb}(u,v)=(A-1)+H_{hp}(u,v)$
高频加强滤波：$H_{hfe}(u,v)=a+bH_{hp}(u,v)$ a 控制原始贡献，b 控制高通贡献
同态滤波 $H(u,v)=(\gamma_H-\gamma_L)\left[1-e^{-c\left(D^2(u,v)/D_0^2\right)}\right]+\gamma_L$ 衰减图像的低频成分（光照分量），增强高频成分（反射分量）
其中$\gamma_L<1$低频成分增益因且$\gamma_H>1$高频成分增益因子;c用于控制滤波器函数斜面的锐化

带阻滤波器

理想带阻(IBRF) $H(u,v)=\begin{cases}0 & C_0-\frac{W}{2}\le D(u,v)\le C_0+\frac{W}{2}\\ 1 & 其他情况\end{cases}$ 高斯带阻(GBRF) $H(u,v)=1-e^{-\left(\frac{D^2(u,v)-C_0^2}{D(u,v)W}\right)^2}$

巴特沃斯带阻 (BBRF) $H(u,v)=\frac{1}{1+\left(\frac{D(u,v)W}{D^2(u,v)-C_0^2}\right)^{2n}}$ 带阻作用: 去除摩尔纹;去除周期干扰

快速傅里叶变换

利用傅里叶变换基底性质，将M个数据的傅里叶变换转为 2 组$\frac{M}{2}$个数据的傅里叶变换，此时计算量从 M^2 降低为 $\frac{M^2}{2}$
$F(u)=\sum_{x=0}^{K-1}f(2x)W_{2K}^{u(2x)}+\sum_{x=0}^{K-1}f(2x+1)W_{2K}^{u(2x+1)}$ 偶数部分+奇数部分
$W_M=e^{-j2\pi/\mathrm{M}}$; $W_M^{ux}=(W_M)^{ux}=e^{-j2\pi ux/M}$; ${W_{2K}}^{2ux}={W_k}^{ux}$

$F_{even}(u)=\sum_{x=0}^{K-1}f(2x)W_K^{ux} \quad F_{odd}(u)=\sum_{x=0}^{K-1}f(2x+1)W_K^{ux}$
$F(u)=F_{even}(u)+F_{odd}(u)W_{2K}^u$
$F(u+K)=F_{even}(u)-F_{odd}(u)W_{2K}^u$

第五章：图像复原与重建

图像退化/复原模型

建模图像退化为用 h 算子和 f 运算,加上加性噪声η,生成一幅退化图像 g
空域：$g(x,y)=(h\star f)(x,y)+\eta(x,y)$; 频域：$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$

噪声模型

高斯 $p(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2}$; **瑞利** $p(z)=\begin{cases}\frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b} & ,z\ge a\\ 0 & ,z<a\end{cases}\parallel \bar{z}=a+\sqrt{\pi b/4},\sigma^2=\frac{b(4-\pi)}{4}$
爱尔兰（伽马）$p(z)=\begin{cases}\frac{a^bz^{b-1}}{(b-1)!}e^{-az} & ,z\ge 0\\ 0 & ,z<0\end{cases}\parallel \bar{z}=\frac{b}{a},\sigma^2=\frac{b}{a^2}$
a>0,b 正整数
指数 $p(z)=\begin{cases}ae^{-az} & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}\parallel \bar{z}=\frac{1}{a},\sigma^2=\frac{1}{a^2}$
均匀 $p(z)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & ,a\le z\le b\\ 0 & ,otherwise\end{cases}\parallel \bar{z}=\frac{a+b}{2},\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$; **椒盐** $p(z)=\begin{cases}P_s & ,z=2^k-1\\ P_p & ,z=0\\ 1-(P_s+P_p) & ,z=V\end{cases}$
场景:高斯电子电路随机波动引起,或者传感器在低光照高温工作产生的噪声;瑞利模拟随机波动;伽马和指数模拟激光成像;均匀:随机数在指定范围内均匀分布;椒盐:成像设备中的瞬时故障或错误
噪声估计参数参数$\bar{z}=\sum_{i=0}^{L-1}z_ip_S(z_i) \quad \sigma^2=\sum_{i=0}^{L-1}(z_i-\bar{z})^2p_S(z_i)$

只存在噪声的复原——空间滤波

仅被加性噪声退化后: $g(x,y)=f(x,y)+\eta(x,y)$ $G(u,v)=F(u,v)+N(u,v)$ (噪声未知)
当仅有加性噪声时，可考虑空间滤波方法，利用图像相邻像素之间的的相似性，降低噪声的影响，甚至可以有效去除噪声。

均值滤波

S_{xy}表示中心在(x,y)，尺寸为$m\times n$的矩形子图像窗口
算术平均 $\hat{f}(x,y)=\frac{1}{mn}\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)$; ;平滑图像的局部变化;在模糊了结果的同时减少了噪声
几何平均滤波 $\hat{f}(x,y)=\left[\prod_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)\right]^{\frac{1}{mn}}$; 平滑度可以与算术均值相比;图像细节丢失更少
谐波平均滤波 $\hat{f}(x,y)=\frac{mn}{\sum_{(r,c)\in S_{xy}}\frac{1}{g(r,c)}}$ 适用“盐粒” 和 类似高斯噪声的噪声，不适用于“胡椒”;
反谐波平均 $\hat{f}(x,y)=\frac{\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)^{Q}}$ Q 称为滤波器的阶数,>0 用于胡椒, <0 用于盐粒,=0 变为算数平均,=-1 变为谐波平均

统计排序

中值 $\hat{f}(x,y)=median_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}$ 与大小相同的线性平滑(均值)滤波相比，有效地降低某些随机噪声，且模糊度要小得多;对于单极和双极冲激噪声效果好
最大值 $\hat{f}(x,y)=\max_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}$ 发现最亮点;过滤胡椒
最小值 $\hat{f}(x,y)=\min_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}$ 发现最暗点;过滤盐粒
中点$\hat{f}(x,y)=\frac{1}{2}\left[\max_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}+\min_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}\right]$统计排序滤波器和平均滤波器;适合处理随机分布的噪声，如高斯噪声和均匀噪声
修正后的阿尔法均值滤波 $\hat{f}(x,y)=\frac{1}{mn-d}\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g_R(r,c)$
在S邻域内去掉g(r, c)最高灰度值的d/2 和最低灰度值的 d/2 $g_R(r,c)$代表剩余的$mn-d$个像素.$d=0$变为算数平均;$d=mn-1$变为中值;当 d 取其它值时，适用于包括多种噪声的情况下，例如高斯噪声和椒盐噪声混合的情况。

自适应

用S_{xy}的区域内图像的统计特征进行处理

自适应局部降噪
$g(x,y)$表示噪声图像在点(x,y)上的值;σ_η^2噪声方差 $\bar{z}_{S_{xy}}$ 在S_{xy}上像素点的局部平均灰度;$\sigma_{S_{xy}}^2$ 在S_{xy}上像素点的局部方差;假设 $\sigma_\eta^2\le\sigma_{S_{xy}}^2$
$\hat{f}(x,y)=g(x,y)-\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_{S_{xy}}^2}\left[g(x,y)-\bar{z}_{S_{xy}}\right]$

自适应中值
z_{min}是S_{xy}中的最小灰度值;z_{max}是S_{xy}中的最大灰度值;z_{med}是S_{xy}中的灰度值的中值;z_{xy}是坐标(x,y)处的灰度值;S_{max}是S_{xy}允许的最大尺寸。
层次 A: 若$z_{min}<z_{med}<z_{max}$,则转到层次B 否则，增S_{xy}的尺寸，
若$S_{xy}\le S_{max}$,则重复层次 A 否则，输出z_{med}
层次 B: 若$z_{min}<z_{xy}<z_{max}$,则输出 z_{xy} 否则，输出z_{med}
普通的中值消除噪声的同时导致图像细节明显缺失;自适应中值能够额外保留图像细节

频域滤波降低周期噪声

陷波滤波器:阻止或通过事先定义的频率矩形邻域中的频率
$H_{\mathrm{NR}}(u,\nu)=\prod_{k=1}^{Q}H_k(u,\nu)H_{-k}(u,\nu)$
$H_{k(u,\nu)}$ 和 $H_{-k}(u,\nu)$分别是中心为 (u_k,ν_k) 和 $(-u_k,-\nu_k)$ 的高通滤波器传递函数;$D_k(u,v)=\left[(u-M/2-u_k)^2+(v-N/2-v_k)^2\right]^{1/2}$;$D_{-k}(u,v)=\left[(u-M/2+u_k)^2+(v-N/2+v_k)^2\right]^{1/2}$
n 阶巴特沃斯陷波带阻(3 陷波对) $H_{\mathrm{NR}}(u,\nu)=\prod_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{1+[D_{0k}/D_k(u,\nu)]^n}\right]\left[\frac{1}{1+[D_{0k}/D_{-k}(u,\nu)]^n}\right]$
陷波带通滤波器(NR 为带阻) $H_{\mathrm{NP}}(u,\nu)=1-H_{\mathrm{NR}}(u,\nu)$

存在多个干扰分量时，简单的滤波器传递函数在滤波过程中可能过多地滤除图像信息
最优陷波:1.分离干扰模式的各个主要贡献;2.从被污染图像中减去该模式的一个可变加权部分
假设 G 是被污染图像 DFT 1.算出η, $N(u,\nu)=H_{\mathrm{NP}}(u,\nu)G(u,\nu)$ $\eta(x,y)=F^{-1}\{H_{\mathrm{NP}}(u,\nu)G(u,\nu)\}$
$\hat{f}(x,y)=g(x,y)-w(x,y)\eta(x,y)$
2.求可变加权部分$w(x,y)=\frac{\overline{g\cdot\eta}-\bar{g}\cdot\bar{\eta}}{\overline{\eta^2}-\bar{\eta}^2}$

线性位置不变退化

如果退化模型为线性和位置不变的,则满足 Ch5 顶部建模的空域,频域表达式.许多退化类型可以近似表示为线性的位置不变过程；而非线性的与位置有关的技术难以求解。

估计退化函数

1.观察法:收集图像自身的信息来估计 H; 2.试验法:使用与获取退化图像的设备相似的装置; 3.数学建模法:建立退化模型，模型要把引起退化的环境因素考虑在内

逆滤波

$\hat{F}(u,v)=\frac{G(u,v)}{H(u,v)}=F(u,v)+\frac{N(u,v)}{H(u,v)}$;问题:N 一般未知,挡 H 的任何元素为 0 或者较小时,后面分数项主导了结果;解决方法:限制滤波频率, 从而减少遇到零值的可能性(H(0,0)的值最大).

最小均方误差（维纳）滤波

$S_{f(u,v)}=|F(u,v)|^2$为未退化函数功率； $S_\eta(u,v)=|\ N(u,v)\ |^2$ 为噪声功率谱；
$\hat{F}(u,v)=\left[\frac{1}{H(u,v)}\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2+S_\eta(u,v)/S_f(u,v)}\right]G(u,v)$
假设两个功率谱之比为常数 K,有 $\hat{F}(u,v)=\left[\frac{1}{H(u,v)}\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2+K}\right]G(u,v)$ K 通常在复原时调整
信噪比:频域 SNR $=\frac{\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{\nu=0}^{N-1}|F(u,\nu)\ |^2}{\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{\nu=0}^{N-1}|N(u,\nu)\ |^2}$ 空域SNR $=\frac{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\hat{f}(x,y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x,y)-\hat{f}(x,y)\right]^2}$ 均方误差 MSE $=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x,y)-\hat{f}(x,y)\right]^2$

约束最小二乘方滤波

约束$|g-H\hat{f}|^2=|\eta|^2$ 准则函数最小化$C=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[\nabla^2f(x,y)\right]^2$
最佳问题的解$\hat{F}(u,v)=\left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)\ |^2+\gamma\ |P(u,v)\ |^2}\right]G(u,v)$ 当$\gamma=0$ 时,退变成逆滤波
P (u, v) 为 p(x, y) 的傅里叶变换 p(x,y)为拉普拉斯空间卷积核
估计γ:设$\|r\|^2=\|g-H\hat{f}\|^2$,通过$\|\mathbf{r}\|^2=\|\eta\|^2\pm a$,由于 r 关于$\gamma$单调,$\|\mathbf{r}\|^2<\|\eta\|^2-a$增加$\gamma$;$\|\mathbf{r}\|^2>\|\eta\|^2+a$减少$\gamma$
估计$\|\eta\|^2$:$\|\eta\|^2=MN\left[\sigma_\eta^2+\bar{\eta}^2\right]$ 用方差和均值

几何均值滤波

$\hat{F}(u,v)=\left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2}\right]^a\left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2+\beta\left[\frac{S_\eta(u,v)}{S_f(u,v)}\right]}\right]^{1-\alpha}$
当 $\alpha=0$ 时,滤波器退化为逆滤波器;当 $\alpha=0$ 时,滤波器退化为参数维纳滤波器;当 $\alpha=0,\beta=1$ 时,滤波器退化为标准维纳滤波器;当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,滤波器为几何均值滤波器;当 $\beta=1,\alpha$ 减到 $\frac{1}{2}$ 以上,它接近逆滤波器,当 $\beta=1,\alpha$ 减到 $\frac{1}{2}$ 以下,它接近维纳滤波器;当 $\beta=1,\alpha=\frac{1}{2}$ 时,它被称为谱均衡滤波器;

第六章：彩色图像处理

彩色基础

红,绿,蓝量用 X,Y,Z 表示,叫三色值 ; 三色系数定义: $x=\frac{X}{X+Y+Z}$; ...; $x+y+z=1$;
描述彩色光源的质量的三个基本量：辐射亮度：从光源流出的总能量，单位为瓦特(W)；发光强度：观察者从光源感知的总能量，单位为流明(红外的光强接近零)；亮度：主观描绘子，不可测量，体现发光强度的消色概念。
区分不同颜色:色调: 感知的主导色，跟主波长相关;饱和度: 相对纯度，与一种色调混合的白光量;亮度: 发光强度的消色概念.色调和饱和度一起称为色度

彩色模型

RGB

针对彩色显色器和彩色摄像机开发,一个颜色有 8 比特,$2^8=256$种颜色,全彩色则是 24 比特图像

CMYK
颜料颜色,针对彩色打印开发;CMY(青色、深红、黄色)是RGB 的补色;K 是黑色,用于调节色彩

RGB->CMY: $\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$

RGB->CMYK:$K = 1 - \max(R, G, B); C = \frac{1-R-K}{1-K}; M = \frac{1-G-K}{1-K}; Y = \frac{1-B-K}{1-K}$

CMY->CMYK: $K = \min(C, M, Y) K = 1$则 CMY 都是 0; $K \neq 1$则$C = (C-K)/(1-K); M = (M-K)/(1-K); Y = (Y-K)/(1-K)$

CMYK->CMY: $C = C(1-K) + K; M = M(1-K) + K; Y = Y(1-Y) + K$

HSI
针对人们描述和解释颜色的方式开发，解除了亮度和色彩信息的联系; h 色调(角度),s 饱和度(鲜艳程度),i 强度(颜色的明暗程度,平均灰度)

RGB->HSI
$\theta = \arccos\left(\frac{(R-G)+(R-B)}{2\sqrt{(R-G)^2+(R-B)(G-B)}}\right)$ $H = \begin{cases} 360-\theta & G<B \\ \theta & G \geq B \end{cases}$
$S = 1 - \frac{3}{R+G+B} \cdot \min(R, G, B)$ $I = \frac{R+G+B}{3}$

HSI->RGB
1.RG 扇区$0^\circ \leq H < 120^\circ$
$R = I \cdot \left(1 + \frac{S \cdot \cos(H)}{\cos(60^\circ - H)}\right); G = 1 - (R+B); B = I \cdot (1-S)$
2.GB 扇区($120^\circ \leq H < 240^\circ$
$H' = H - 120^\circ$
$G = I \cdot \left(1 + \frac{S \cdot \cos(H')}{\cos(60^\circ - H')}\right); B = 1 - (R+G); R = I \cdot (1-S)$
3.BR 扇区$240^\circ \leq H < 360^\circ$
$H' = H - 240^\circ$
$B = I \cdot \left(1 + \frac{S \cdot \cos(H')}{\cos(60^\circ - H')}\right); R = 1 - (G+B); G = I \cdot (1-S)$

CIE LAB
基于人眼视觉感知的模型，不依赖于具体的设备（如显示器、打印机等），因此可以在不同设备之间保持颜色的一致性。
$X_w = 0.95047, Y_w = 1.000, Z_w = 1.08883$
$L_\star = 116 * h\left(\frac{Y}{Y_W}\right) - 16; a_\star = 500 * \left[h\left(\frac{X}{X_W}\right) - h\left(\frac{Y}{Y_W}\right)\right];$
$b_\star = 200 * \left[h\left(\frac{Y}{Y_W}\right) - h\left(\frac{Z}{Z_W}\right)\right]$
$h(q) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right) * q^{\frac{1}{3}} & q > 0.008856 \\ 7.787 * q + \frac{16}{116} & q \leq 0.008856 \end{cases}$
L 表示亮度，范围从 0（黑色）到 100（白色）。a 表示从绿色到红色的轴。b 表示从蓝色到黄色的轴。h(q)是一个辅助函数，用于处理非线性变换。

假彩色
采用多种颜色进行灰度分层：[0,L-1]灰度级别,分为 P+1 个区间,$I_1, I_2, \cdots, I_{P+1}$,属于某个区间就赋值一个彩色;若$f(x,y) \in I_k$则令$f(x,y) = c_k$ **假彩色增强：**设置f_R, f_G, f_B三个函数,把灰度映射为不同通道的颜色

全彩色图像处理基础
1.标量框架：分别处理每幅灰度级分量图像（像素值为标量），将处理后的各分量图 像合成一幅彩色图像。 2.向量框架：直接处理彩色像素，将彩色像素视为向量处理。

彩色变换
$s_i = T_i(r_i), \quad i \in [i, n]$ n 为分量图像总数,ri 为输入 i 分量灰度,s_i为输出 i 分量灰度
三种颜色模型下提高亮度: RGB 三个分量乘以常数 k;CMY 求线性变化$s_i = kr_i + (1-k), \quad i = 1,2,3$;CMYK 只需改变第四个分量(K)$s_i = kr_i + (1-k), \quad i = 4$
补色:彩色环：首先等距离地放置三原色，其次将二次色等距离地放置在原色之间 在彩色环上，与一种色调直接相对立的另一色调称为补色

彩色分层
突出图像中某个特定的彩色范围，有助于将目标从周围分离出来;基于假设：在同一色彩空间下，相邻的点具有相近的颜色。
感兴趣的颜色被宽度为 W、中心在原型(即平均)颜色并具有分量a_j的立方体(n>3 时为超立方体)包围，
$s_i = \begin{cases} 0.5,, & \left[|r_j - a_j| > W/2\right]_{1 \leq j \leq n} \\ r_i,, & \text{其他} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$
用一个球体来规定感兴趣的颜色时
$s_i = \begin{cases} 0.5,, & \sum_{j=1}^{n} (r_j - a_j)^2 > R_0^2 \\ r_i,, & \text{其他} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$

平滑和锐化
平滑 $\overline{c}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{K}\sum_{(s,t)\in S_{sy}} R(s,t) \\ \frac{1}{K}\sum_{(s,t)\in S_{sy}} G(s,t) \\ \frac{1}{K}\sum_{(s,t)\in S_{sy}} B(s,t) \end{pmatrix}$; 锐化 $\nabla^2 c(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla^2 R(x,y) \\ \nabla^2 G(x,y) \\ \nabla^2 B(x,y) \end{pmatrix}$

分割图像
HSI:如果按颜色分割,考虑色调(H);可以用饱和度(S),大于某个阈值分割
RGB: 令 z 表示 RGB 空间中的任意一点,RGB 向量 a 来表示分割颜色样本集平均颜色
欧氏距离为 $D(z,a) = |z-a| = \left[(z-a)^{\mathrm{T}}(z-a)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(z_R - a_R)^2 + (z_G - a_G)^2 + (z_B - a_B)^2\right]^{\frac{1}{2}}$
$D(z,a) \leq D_0$的点的轨迹是半径为D_0的一个实心球体
马哈拉诺比斯距离 $D(z,a) = \left[(z-a)^{\mathrm{T}} C^{-1} (z-a)\right]^{\frac{1}{2}}$;
$D(z,a) \leq D_0$的点的轨迹是半径为D_0的一个实心三维椭球体
两个方法都计算代价也很高昂,一般用边界盒关于 a 居中，它沿各坐标轴的长度与样本沿坐标轴的标准差成比例

RGB 边缘检测
Di Zenzo 法:不分通道计算梯度的处理方法 ; $\mathbf{u} = \frac{\partial R}{\partial x}\mathbf{r} + \frac{\partial G}{\partial x}\mathbf{g} + \frac{\partial B}{\partial x}\mathbf{b} \quad \mathbf{v} = \frac{\partial R}{\partial y}\mathbf{r} + \frac{\partial G}{\partial y}\mathbf{g} + \frac{\partial B}{\partial y}\mathbf{b}$
$g_{xx} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{u} = \left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial B}{\partial x}\right|^2$ $g_{yy} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{v} = \left|\frac{\partial R}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial B}{\partial y}\right|^2$
$g_{xy} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}$ 最大变化率方向$\theta(x,y) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2g_{xy}}{g_{xx} - g_{yy}}\right]$
坐标 x,y 处θ方向的变化率为$F_\theta(x,y) = \left\{\frac{1}{2}\left[(g_{xx} + g_{yy}) + (g_{xx} - g_{yy})\cos 2\theta(x,y) + 2g_{xy}\sin 2\theta(x,y)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$

噪声
只有一个 RGB 通道受到噪声污染时，到 HSI 的转换会将噪声分布到所有 HSI 分量图像上

第九章：形态学图像处理
目标通常定义为前景像素集合;结构元可以按照前景像素和背景像素来规定,原点用黑色点。

平移 $(B)_z = \{c \mid c = b + z, b \in B\}$ 将 B 的原点平移到点 z
反射 $\hat{B} = \{w \mid w = -b, b \in B\}$ 相对于 B 的原点反射(转 180°)
补集 $A^c = \{w \mid w \notin A\}$ 不属于 A 的点集
差集 $A - B = \{w \mid w \in A, w \notin B\} = A \bigcap B^c$ 属于 A 但不属于 B 的点集

腐蚀 $A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\} = \{z \mid (B)_z \cap A^c = \emptyset\}$ 腐蚀 A 的边界(I);能缩小、细化二值图像中的目标

膨胀 $A \oplus B = \left\{z \mid \left(\hat{B}\right)_z \cap A \neq \varnothing\right\}$ 膨胀 A 的边界(I);可修复图像中的断裂字符
对偶性 $(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}; (A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$

开运算 $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B = \bigcup\{(B)_z \mid (B)_z \subseteq A\}$ 平滑轮廓，断开狭窄区域，删除小孤岛和尖刺(I);幂等律;当 B 在 A 的边界**内侧**滚动时，B 所能到达的 A 的边界的最远点;B 的所有平移的并集。
闭运算 $A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B = \left[\bigcup\{(B)_z | (B)_z \cap A = \emptyset\}\right]^c$ 平滑轮廓，弥合狭窄断裂和细长沟道，删除小孔洞(I);幂等律;当 B 在 A 的边界**外侧**滚动时，B 所能到达的 A 的边界的最远点;B 的所有不与 A 重叠的平移的并集的补集。
对偶性 $(A \circ B)^c = A^c \bullet \hat{B}; (A \bullet B)^c = A^c \circ \hat{B}$

击中与击不中 $I \circledast B_{1,2} = \left\{z \mid (B_1)_z \subseteq A \wedge (B_2)_z \subseteq A^c\right\} = (A \ominus B_1) \bigcap (A^c \ominus B_2)$ 前景中检测形状的 B1，在背景中检测形状的 B2 同时满足的保留

边界提取 $\beta(A) = A - (A \ominus B)$ 提取集合 A 的边界上的点集(I)
孔洞填充 $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \bigcap I^c, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$ 填充 A 中的孔洞， X_0 初始化为 I大小,在每个孔洞中填充 1.在其他位置填充 0
提取连通分量 $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap I, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$ 寻找 I 中的连通分量(I)
凸壳 $X_k^i = \left(X_{k-1}^i \circledast B^i\right) \bigcup X_{k-1}^i, i = 1, 2, 3, 4$ 计算 I 中前景像素的凸壳(I)
细化 $A \otimes B = A - (A \circledast B)$ 细化集合 A，移除多余分支(I)
粗化 $A \odot B = A \bigcup (A \circledast B)$ 使用结构元粗化集合 A (I)
骨架 $S(A) = \bigcup_{k=0}^{K} S_{k(A)}, \quad S_{k(A)} = (A \ominus k_B) - (A \ominus k_B) \circ B$ 寻找集合 A 的骨架(I)
裁剪 $X_1 = A \otimes \{B\}$; $X_2 = \bigcup_{k=1}^{8}\left(X_1 \otimes B^k\right)$; $X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$; $X_4 = X_1 \cup X_3$ X_4 是裁剪集合 A 后的结果。结构元(V)用于前两个公式， H 裁剪用于第三个公式(I)
通常用于细化和骨架绘制算法的后处理.用于消除“毛刺”—比较短的像素端点，比如说小于等于 3 个像素长度.

灰度级形态学
把膨胀、腐蚀、开运算和闭运算的基本运算扩展到灰度图像
平坦结构元:内部灰度值相同;非平坦结构元的灰度值会随它们的定义域变化
补集定义$f^{c(x,y)} = -f(x,y)$ 反射定义$\hat{b}(x,y) = b(-x,-y)$
灰度腐蚀 平坦$[f \ominus b](x,y) = \min_{(s,t)\in b}\{f(x+s, y+t)\}$ 非平坦$[f \ominus b_N](x,y) = \min_{(s,t)\in b_N}\{f(x+s, y+t) - b_N(s,t)\}$
灰度膨胀 平坦$[f \oplus b](x,y) = \max_{(s,t)\in \hat{b}}\{f(x-s, y-t)\}$ 非平坦$[f \oplus b_N](x,y) = \max_{(s,t)\in \hat{b}_N}\left\{f(x-s, y-t) + \hat{b}_N(s,t)\right\}$
灰度腐蚀和膨胀相对于补集和反射是对偶的(这里省略参数)
$(f \ominus b)^c = f^c \oplus \hat{b} \quad (f \oplus b)^c = f^c \ominus \hat{b}$

开运算$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b$ 闭运算$f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b$ 它们也是对偶的
开运算经常用于去除小而明亮的细节；闭运算经常用于去除小而黑暗的细节
从信号图像看开削峰，闭填谷;两个都满足图片中的性质

灰度级**开操作**满足下列性质：
(i) $f \circ b \dashv f$
(ii) 如果 $f_1 \dashv f_2$ 则 $f_1 \circ b \dashv f_2 \circ b$
(iii) $(f \circ b) \circ b = f \circ b$
符号 $q \dashv r$ 表示q的域是r的域的子集，且对q的域内的任何(x,y)有 $q(x,y) \leq r(x,y)$

形态学梯度 $g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$; 显示边缘 顶帽变换
$T_{hat}(f) = f - (f \circ b)$ 亦称“白顶帽”变换，用于暗背景上亮物体;暗背景下亮目标分割
底帽变换 $B_{hat}(f) = (f \bullet b) - f$ 亦称“黑底帽”变换，用于亮背景上暗物体;亮背景下暗目标分割
粒度测定:使用逐渐增大的结构元对图像进行开运算。某个特殊尺寸的开运算对包含类似尺寸的颗粒的输入图像的区域产生最大的效果。

第十章：图像分割

背景知识
差分: 前向 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x+1) - f(x)$ 后向 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x) - f(x-1)$ 中值 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$ 二阶 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$
一阶导 a）在恒定灰度区域为零；b）在灰度台阶和斜坡开始处不为零；c）在灰度斜坡上不为零
二阶导 a）在恒定灰度区域为零；b）在灰度台阶和斜坡开始处不为零；c）在灰度斜坡上为零
(1)一阶导产生粗边缘；(2)二阶导对精细细节(如细线、孤立点和噪声)有更强的响应；(3)二阶导在灰度斜坡和台阶过渡处会产生双边缘响应；(4)二阶导的符号可用于确定边缘的过渡是从亮到暗(正)还是从暗到亮(负)。
滤波器在核的中心点的响应是$Z = \sum_{k=1}^{9} w_k z_k$ w 1,2,3 为核第一行,以此类推

孤立点检测
拉普拉斯 $\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y)$
超过阈值 T 的标记 $g(x,y) = \begin{cases} 1, & |Z(x,y)| > T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $\nabla^2 f = Z$

线检测
拉普拉斯核是各向同性的、特殊方向线检测通常采用如下 4 种摸板
水平：$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ +45°：$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 垂直：$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ -45°:
如果上述 4 种模板产生的响应分别为：Ri，如果|Ri(x,y)|>|Rj(x,y)|,并且 i≠j，则认为此点与模板 i 方向的线有关。

边缘检测
梯度 $\nabla f(x,y) \equiv \mathrm{grad}[f(x,y)] \equiv \begin{bmatrix} g_x(x,y) \\ g_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$
梯度幅度(L2) $M(x,y) = \|\nabla f(x,y)\| = \sqrt{g_x^2(x,y) + g_y^2(x,y)}$
绝对值来近似梯度幅度(L1)：$M(x,y) \approx |g_x| + |g_y|$
梯度方向(垂直边缘) $\alpha(x,y) = \arctan\left[\frac{g_y(x,y)}{g_x(x,y)}\right]$

$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix}$

Robert 算子 $g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_9 - z_5)$ $g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_8 - z_6)$
Prewitt 算子 $g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + z_8 + z_9) - (z_1 + z_2 + z_3)$ $g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + z_6 + z_9) - (z_1 + z_4 + z_7)$
Sobel 算子 $g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$
$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$
与 Sobel 相比，Prewitt 更简单，但 Sobel 能更好抑制（平滑）噪声。
Kirsch 罗盘核：用于检测 8 个罗盘方向的边缘幅度和方向
二维高斯函数， $G(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$; 高斯拉普拉斯(LoG)函数: $\nabla^2 G(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-2\sigma^2}{\sigma^4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$
Marr-Hildreth 算法 $g(x,y) = \left[\nabla^2 G(x,y)\right] \star f(x,y) = \nabla^2\left[G(x,y) \star f(x,y)\right]$ 寻找 g(x,y)的过零点来确定 f(x,y)中边缘的位置
高斯差分(DoG)来近似式的 LoG 函数 $D_G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_1^2}} - \frac{1}{2\pi\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_2^2}}$
Canny 坎尼 1.用一个高斯滤波器平滑输入图$f_s(x,y) = G(x,y) \star f(x,y)$ 2.计算梯度幅值图像M_S(L2)和角度图像

$\alpha(x,y)=\tan^{-1}\left[\frac{g_y(x,y)}{g_x(x,y)}\right]$ 3.对梯度幅值图像应用非极大值抑制进行细化边缘 4.用双阈值处理和连通性分析来检测与连接边缘

非极大值抑制 寻找最接近 α 方向 dk,修改值$g_N(x,y)=\begin{cases}0 & M_s(x,y)\text{小于 }d_k\text{ 方向上的两个邻点值}\\ M_s(x,y) & \text{否则}\end{cases}$

双阈值化处理$g_{NH}(x,y)=g_N(x,y)\geq T_H$强边缘(存在间断)

$g_{NL}(x,y)=g_N(x,y)\geq T_L$强边缘+弱边缘 $g_{NL}(x,y)=g_{NL}(x,y)-g_{NH}(x,y)$ 弱边缘

连接边缘点

满足条件则连接 $|M(s,t)-M(x,y)|\leq E$ $|\alpha(s,t)-\alpha(x,y)|\leq A$

霍夫变换 $\rho(\theta)=x\cos\theta+y\sin\theta=R\cos(\theta-\phi)=\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\theta-\arctan\frac{x}{y}\right)$

阈值处理

单阈值 $g(x,y)=\begin{cases}1 & f(x,y)\geq T\\ 0 & f(x,y)\leq T\end{cases}$ **双阈值** $g(x,y)=\begin{cases}a, & f(x,y)>T_2\\ b, & T_1<f(x,y)\leq T_2\\ c, & f(x,y)\leq T_1\end{cases}$

基本的全局阈值化

1. 为全局阈值T选择一个初始估计值。
2. 在 $g(x,y)=\begin{cases}1, & f(x,y)>T\\ 0, & f(x,y)\leq T\end{cases}$ 中用T分割图像。这将产生两组像素：由灰度值大于T的所有像素组成的G_1,由所有小于等于T的像素组成的G_2
3. 对 G_1 和 G_2中的像素分别计算平均灰度值(均值)m_1和m_2
4. 在m_1和 m_2之间计算一个新的阈值：$T=\frac{m_1+m_2}{2}$
5. 重复步骤 2 到步骤 4,直到连续迭代中的两个T值间的差小于某个预定义的值ΔT为止。

OSTU 方法:

n_i 表示灰度级 i 的像素数, $M*N=\sum_{i=0}^{L-1}n_i; p_i=\frac{n_i}{MN}; \sum_{i=0}^{L-1}p_i=1,\quad p_i\geq 0$

分为两类 c_1,c_2 累计概率 $P_1(k)=\sum_{i=0}^{k}p_i; P_2(k)=\sum_{i=k+1}^{L-1}p_i=1-P_1(k)$

平均灰度 $m_1(k)=\frac{1}{P_1(k)}\sum_{i=0}^{k}ip_i; m_2(k)=\frac{1}{P_2(k)}\sum_{i=k+1}^{L-1}ip_i$

k 级累计灰度 $m(k)=\sum_{i=0}^{k}ip_i$ 整个图像平均灰度 $m_G=\sum_{i=0}^{L-1}ip_i$

约束条件 $P_1m_1+P_2m_2=m_G; P_1+P_2=1$

全局方差 $\sigma_G^2=\sum_{i=0}^{L-1}(i-m_G)^2p_i$

类间方差 $\sigma_B^2=P_1(m_1-m_G)^2+P_2(m_2-m_G)^2=P_1P_2(m_1-m_2)^2=\frac{(m_GP_1-m)^2}{P_1(1-P_1)}$

(选择 k 最大化 σ_B^2)

扩展到多阈值$\sigma_B^2=\sum_{k=1}^{K}P_k(m_k-m_G)^2$;

$\sigma_B^2(k_1^*,k_2^*,\cdots,k_{K-1}^*)=\max_{0<k_1<k_2<\cdots k_K<L-1}\sigma_B^2(k_1,k_2,\cdots,k_{K-1})$

区域生长 分离 聚合

区域生长

1. **初始种子区域**：从种子数组 S(x,y)中找到所有连通分量，并将这些区域标记为 1，其他位置标记为 0。
2. **条件筛选**：根据谓词 Q 对图像 f(x,y)进行筛选，形成新的图像 f，其中满足条件的像素标记为 1，否则为 0。
3. **区域扩展**：将所有在图像 f 中 8 连通到种子点的 1 值点添加到 S 中，形成新的图像 g。
4. **连通区域标记**：用不同的标签标记图像 g 中的每个连通分量，得到最终的区域生长分割结果。

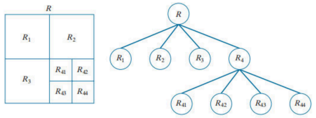
分离聚合 令 R 表示整个图像区域，Q 是针对区域的一个逻辑谓词比如

$Q=\begin{cases}\text{true} & \sigma>\alpha\wedge 0<m<b\\ \text{false otherwise}\end{cases}$

1 把满足 Q(Ri)=FALSE 的任何 Ri 区域分离为四个不相交的子象限区域；

2 无法进一步分离时，聚合满足谓词逻辑$Q(R_j\cup R_k)=$ TRUE的任意两个邻接区域 Rj 和 Rk;

3 在无法进一步聚合时停止。



分水岭变换

1. 梯度图像：，算法使用图像的梯度图像 $g(x,y)$，其中包含多个区域极小值 $M_{\{1\}},M_{\{2\}},M_{\{g\}}$。这些极小值对应于图像中的局部低谷。
2. 汇水盆地：每个区域极小值 $M_{\{i\}}$ 都有一个与之相关联的汇水盆地 $C(M_i)$，这些汇水盆地中的点形成一个连通分量。
3. 淹没过程：算法通过模拟水位从最小值 min 逐渐上升到最大值 max 的过程来分割图像。在每个水位 n，集合 $T[n]$ 包含所有灰度值小于 n 的点。
4. 二值图像：在每个水位 n，$T[n]$ 可以被视为一幅二值图像，其中黑点表示位于平面 $g(x,y)=n$ 下方的点。
5. 汇水盆地分割：随着水位上升，算法通过比较当前水位 n 的连通分量与前一水位 $n-1$ 的汇水盆地，来确定是否需要构建水坝以防止不同汇水盆地的水流溢出。
6. 水坝构建：当水位上升到某个点时，如果发现有多个汇水盆地的水流可能溢出，算法会在这些汇水盆地之间构建水坝（即分割线），以阻止水流混合。

缺点:受噪声影响大;容易过度分割

分割中运动的使用

基本方法: 逐像素地比较 t_i 和 t_j 两帧图像 $f(x,y)$ 可以获得相应的差值图像：$d_{ij}(x,y)=\begin{cases}1 & |f(x,y,t_i)-f(x,y,t_j)|>T\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 其中 T 是一个非负阈值。

累积差值:将参考图像 $R(x,y)$ 与序列中的每个后续图像进行比较。当当前图像中的像素与参考图像**不同**时，累积差分图像中每个像素的计数器会增加。在检查第 t 帧时，累积差分图像显示该像素与参考图像中对应像素的差异次数。

绝对 ADI: $A_k(x,y)=\begin{cases}A_{k-1}(x,y)+1 & \text{如果 }|R(x,y)-f(x,y,t_x)|>T\\ A_{k-1}(x,y) & \text{否则}\end{cases}$

正 ADI:$P_k(x,y)=\begin{cases}P_{k-1}(x,y)+1 & \text{如果 }R(x,y)-f(x,y,t_x)>T\\ P_{k-1}(x,y) & \text{否则}\end{cases}$

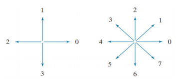
负 ADI:$N_k(x,y)=\begin{cases}N_{k-1}(x,y)+1 & \text{如果 }R(x,y)-f(x,y,t_x)<-T\\ N_{k-1}(x,y) & \text{否则}\end{cases}$

第十一章 特征提取

边界预处理

跟踪二值图像中 1 值区域 R 的边界算法:从左上角标记为 1 的点开始,按顺时针找 8 邻域中下一个 1,然后继续从下一个 1 开始执行算法,直到回到起点

弗里曼链码 基于线段的 4 连通或 8 连通，使用一种编号方案对每个线段的方向进行编码。用于表示由顺次连接的具有指定长度和方向的直线段组成的边界。



从起点开始,往哪个箭头方向走就标记哪个数字,直到回到起点;形状和链码是一一对应的;改变起点会让链码循环位移

归一化:循环位移后数字最小的链码

差分:相邻的做差,i 为当前 a[i+1] - a[i],最后加一个起点-终点;之后对 4 或者 8 取 mod;$D=[(C_2-C_1)\bmod m,(C_3-C_2)\bmod m,\ldots,(C_1-C_n)\bmod m]$

形状数(差分+归一化) 将码按一个方向循环，使其构成的自然数最小序列;形状数的阶n 定义为形状数中的数字的数量。

斜率链码 在曲线周围放置**等长**的直线段得到，其中的直线段的端点与曲线相接,直线段的斜率记录链码

最小周长多边形:使用尽量少的线段来得到给定边界的基本形状;;先找所有凸起和凹陷点,然后凹顶点需要镜像;$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_x & a_y & 1\\ b_x & b_y & 1\\ c_x & c_y & 1\end{bmatrix}$ abc 三点行列式,逆时针行列式为正,顺时针为负,共线为 0

1. **初始化**：定义起始点 V_0、W 爬行点 W_c、B 爬行点 B_c。设置当前检查的顶点为 V_k。
2. **条件检查**： 从 $W_c=B_c=V_0$ 开始，依次检查 V_k 和 V_k+1 是否满足以下任一条件：
   1. V_k 位于线段对 (V_L,W_c) 的直线的正侧（即符号函数 $sgn(V_L,W_c,V_k)>0$）。
   2. V_k 位于线段对 (V_L,W_c) 的直线负侧或共线，同时 V_k 位于线段对 (V_L,B_c) 的直线的正侧（即 $sgn(V_L,W_c,V_k)<0$ 且 $sgn(V_L,B_c,V_k)>0$）。
   3. V_k 位于线段对 (V_L,B_c) 的直线的负侧（即 $sgn(V_L,B_c,V_k)<0$）。
3. **爬行更新**：若满足以上条件之一，则更新爬行点 W_c 或 B_c，并继续搜索下一个顶点。
4. **终止条件**：当再次到达起始点（第一个顶点）时停止。所找到的点（多边形的顶点）即为 MPP 的顶点集合。

标记图:把**质心到边界的距离**画成**角度的函数**。将原始的二维边界简化为一维函数表示。

边界特征描述子

边界 B 的直径 $\text{diameter(B)}=\max_{i,j}[\text{D(pi, pj)}]$ D 为距离测度，pi 和 pj 是边界上的点。

长度$\text{length}_m=\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right]^{1/2}$**方向**$\text{angle}_m=\arctan\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]$ 由长轴端点定义

曲线的**曲折度**定义为斜率链码链元素的绝对值之和:$\tau=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$,式中的 n 是斜率链码中的元素数量,$|\alpha_i|$是链码中元素的值(斜率变化)。

傅里叶描述子:二维边界可以被视为复数从而一维化表示为 s(k) = x(k) + jy(k)

边界的傅里叶描述子$a(u)=\sum_{k=0}^{K-1}s(k)e^{-j2\pi uk/K}$ $s(k)=\frac{1}{K}\sum_{u=0}^{K-1}a(u)e^{j2\pi uk/K}$

只采用前 P 个系数(去除高频系数) $\hat{s}(k)=\frac{1}{K}\sum_{u=0}^{P-1}a(u)e^{j2\pi uk/K}$

性质: 旋转：$s_{r(k)}=s(k)e^{i\theta}$，$a_{r(u)}=a(u)e^{i\theta}$; 平移：$s_{r(k)}=s(k)+\Delta_{iy}$，$a_{r(u)}=a(u)+\Delta_{iy}\delta(u)$; 缩放：$s_{s(k)}=\alpha s(k)$，$a_{s(u)}=\alpha a(u)$; 起点：$s_{p(k)}=s(k-k_0)$，$a_{p(u)}=\alpha(u)e^{-j2\pi k_0\mu/K}$

统计矩: 1.把 g(r)的幅度视为离散随机变量 z，形成幅度直方图 p(zi),A 是灰度值最大的区间数量。将 p 归一化，使其元素之和等于 1，那么 p(zi)是灰度值 zi 的概率估计;

z 关于其平均值的 n 阶矩为 $\mu_n(z)=\sum_{i=0}^{A-1}(z_i-m)^np(z_i)$;m 是 z 的均值$m=\sum_{i=0}^{A-1}z_ip(z_i)$，$\mu_2$ 是 z 的方差，只需要前几个矩来区分明显不同形状的标记图。

2.将 g(r)面积归一化为 1，并视为直方图，g(ri)可被视为值 ri 出现的概率。r 是随机变量 K 是边界上的点数，$\mu_{n(r)}$ 与标记图 g(r)形状直接相关

矩是 $\mu_n(r)=\sum_{i=0}^{K-1}(r_i-m)^ng(r_i)$ 其中$m=\sum_{i=0}^{K-1}r_ig(r_i)$

区域特征描述子

面积 A 为区域中的**像素数量**。**周长** p 是其边界的长度;**紧致度**（无量纲）$\frac{p^2}{A}$;**圆度**（无量纲）$\frac{4\pi A}{p^2}$; **有效直径** $d_e=2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$

偏心率 标准椭圆 eccentricity $=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-(b/a)^2}\quad a\geq b$

任意方向椭圆(协方差矩阵的特征值) eccentricity $=\sqrt{1-(\lambda_2/\lambda_1)^2}\quad \lambda_1\geq\lambda_2$

拓扑描述子:孔洞的数量 H 和连通分量 C 的数量,定义欧拉数 E = C - H

顶点数表示为 V，将边数表示为 Q，将面数表示为 F 时，V-Q+F=E

纹理:统计方法(和统计矩 1 类似),**光滑度** $R=1-\frac{1}{1+\sigma^2(z)}$ σ^2 是方差 μ_2 ;**一致性** $U=\sum_{i=0}^{L-1}p^2(z_i)$ **熵** $p=-\sum_{i=0}^{L-1}p(z_i)\log_2 p(z_i)$

共生矩阵中的元素g_{ij}值定义为图像 f 中灰度(z_i,z_j)的像素对**出现的次数**;像素对不一定是左右的,可以跨格子;从z_i到z_j

下面是共生矩阵（$K\times K$）的描述子, p_{ij} 等于 G 中第 i,j 项处于 G 的元素之和

- **最大概率**:$\max_{\{i,j\}}p_{ij}$度量 G 的最强响应，值域是 [0,1]
- **相关**:$\frac{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}(i-m_r)(j-m_c)p_{ij}}{\sigma_r\sigma_c}$ $\sigma_r\neq 0,\sigma_c\neq 0$一个像素在整个图像上与其相邻像素有多相关的测度，值域是 [−1,1]。-1 对应完全负相关，1 对应完全正相关。标准差为 0 时，该测度无定义
- **对比度**: $\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}(i-j)^2p_{ij}$ 一个像素在整个图像上与其相邻像素之间的灰度对比度的测度，值域是从 0 到 $(K-1)^2$
- **均匀性（也称能量）**: $\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}p_{ij}^2$ 均匀性的一个测度，值域为 [0,1]，恒定图像的均匀性为 1
- **同质性** $\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\frac{p_{ij}}{1+|i-j|}$ G 中对角分布的元素的空间接近度的测度，值域为 [0,1]。当 G 是对角阵时，同质性达到最大值
- **熵** $-\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}p_{ij}\log_2 p_{ij}$ G 中元素的随机性的测度。当所有 p_{ij} 均匀分布时，熵取最大值，因此最大值为 $2\log_2 K$

极坐标下的频谱函数 $S(r)=\sum_{\theta=0}^{\pi}S_\theta(r)$ $\quad S(\theta)=\sum_{r=1}^{R_0}S_r(\theta)$

矩不变量:大小为 MxN 的数字图像 f(x,y)的二维(p+q)阶矩为 $m_{pq}=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}x^py^qf(x,y)$;

(p+q)阶中心矩为 $\mu_{pq}=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(x-\overline{x})^p(y-\overline{y})^qf(x,y)$ $\overline{x}=\frac{m_{10}}{m_{00}},\quad \overline{y}=\frac{m_{01}}{m_{00}}$

归一化(p+q)阶中心矩为 $\eta_{pq}=\frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{(p+q)/2+1}}$

主成分描述子

x 是 n 维列向量,总体平均向量$m_x=E(x)$,向量总体的协方差矩阵(nxn)$C_x=E\left\{(x-m_x)(x-m_x)^T\right\}$

霍特林变换:令 A 是一个矩阵，这个矩阵的各行由 Cx 的特征向量构成;$y=A(x-m_x)$

可以证明：$\quad m_y=E\{y\}=0$

y 的协方差矩阵：$C_y=AC_xA^T$; $C_y=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$ 对角阵对角元。

可通过 y 恢复 x ：$x=A^{-1}y+m_x=A^Ty+m_x$

近似恢复 x ：$\hat{x}=A_k^Ty+m_x$

代表 k 个最大特征值的 k 个特征向量形成的矩阵。

恢复误差：$\quad e_{ms}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=\sum_{j=k+1}^{n}\lambda_j$