

## CHAPTER 2

### 视觉感知要素

人视觉是由眼睛中锥状体和杆状体组成的。低照明级别杆状体起作用。在背景照明增强时锥状体起作用。

### 光和电磁波谱

$\lambda=\frac{c}{\nu}$   $E=h\nu$  可见光的波长范围：约 400 700nm  $\Delta I_c/I$  称为韦伯比

辐射强度:光源流出能量总量;光通量给出观察者从光源感受到的能量，用流明数量度;亮度是光感受的主观描绘，不能测量，描述彩色感觉参数之一；灰度级用来描述单色光图像的亮度

### 图像感知与获取

传感器:CCD,CMOS

#### 简单的成像模型

$f(x,y)=i(x,y)r(x,y)$ ,其中*i(x,y)*为入射分量(低频)，*r(x,y)*为反射分量(高频)

其中0≤*f(x,y)*,*i(x,y)* < ∞ 0≤*r(x,y)* ≤ 1,r=0 全吸收,l 全反射

### 图像取样和量化

对坐标值进行数字化称为取样,对幅度值进行数字化称为量化,原点位于图像的左上角，x 轴向下，y 轴向右

坐标索引：像二维坐标(x, y);线性索引通过计算到坐标(0, 0)的偏移量得到的,行/列扫描

空间分辨率：图像中可辨别的最小细节 灰度分辨率：灰度级中可分辨的最小变化;打印机单位距离可以分辨的最小线对数 DPI;数字图像:图像大小，即行数 x 列数 PPI

图像对比度：一幅图像中最高和最低灰度级间的灰度差为对比度。

基本的图像重取样方法：图像内插。有最近邻内插;常选用双线性(v(x, y) = ax + by + cxy + d 四个系数可用 4 个最近邻点的 4 个未知方程求出)和双三次内插。

### 像素间的一些基本关系

$N_4(p)$  上下左右, $N_{D(p)}$  四个对角, $N_8(p)=N_4(p)\cup N_{D(p)}$

值域 V，V 是 0 到 255 中的任一个子集

4 邻接:点 q 在 $N_4(p)$ 中，并 q 和 p 具有 V 中的数值

8 邻接:点 q 在 $N_8(p)$ 中，并 q 和 p 具有 V 中的数值

m 邻接(混合邻接): 1.q 在 p 的 $N_4(p)$  或者 2.q 在 p 的 $N_{D(p)}$ 中， $N_4(P)\cap N_4(Q)$ 中没有 V 值的像素

欧氏距离(De):  $D_e(p,q)=\sqrt{(x-s)^2+(y-t)^2}$  街区距离(D4):  $D_4(p,q)=|x-s|+|y-t|$

棋盘距离(D8):  $D_8(p,q)=\max(|x-s|,|y-t|)$

### 对应元素运算和矩阵运算

图像相加：取平均降噪。相减：增强差别。相乘和相除：校正阴影。

三个基本量用于描绘彩色光源的质量：发光强度、光通量和亮度。

一幅数字图像占用的空间：M×N×k。

## CHAPTER 3

### 基本的灰度变换

反转变换 $S=L-1-r$  ;增强暗色区域中的白色或灰色细节;

对数变换 $S=c\log(1+r)$  ;将范围较窄的低灰度值映射为范围较宽的

幂律(伽马)变换 $S=cr^\gamma$  ;  $\gamma < 1$  变亮,加强暗细节;反之变暗,加强亮细节;可增强对比度

分段线性变换:

- 1.对比度拉伸:提高灰度级的动态范围,改善对比度;
- 2.灰度级分层:突出某区间灰度,其他位置可不变也可降级;
- 3.比特平面分层:8bit 灰度图分割成 8 个比特面,(左)高位表示主体信息,低位给出不同程度的细节

### 直方图处理

直方图容器: $h(r_k)=n_k$ ,  $k=0,1,2,\cdots,L-1$ ;  $n_k$ 是 f 中灰度为 $r_k$ 的像素的数量 ; k 越大越白

直方图:对容器归一化 $p(r_k)=\frac{h(r_k)}{MN}=\frac{n_k}{MN}$

无空间信息,不同图像可能直方图相似,同一图像切片的直方图有可加性;若一幅图像其像素占有全部可能的灰度级并且分布均匀，这样的图像灰度对比度 高、细节会相对明显

#### 均衡化

假设 $s=T(r)$ 在 $0\leq r\leq L-1$ ， $T(r)$ 严格单调递增且 $0\leq T(r)\leq L-1$ 。

变换前后的 pdf 为 $p_{r(r)}$ , $p_{s(s)}$

若 $T(r)$ 还可微，有 $p_s(s)=p_r(r)|\frac{dr}{ds}|$

连续情况 $s=T(r)=(L-1)\int_0^r p_r(w)dw$  变换后 $p_s=\frac{1}{L-1}$  完全平坦

离散情况 $s_k=T(r_k)=(L-1)\sum_{j=0}^k p_r(r_j)=(L-1)\sum_{j=0}^k \frac{n_k}{MN}$  无法得到完全平坦的分布

目的:使图像产生灰度级丰富且动态范围大的图像灰度;期望得到均匀分布直方图;数字图像均衡化只是连续情况的近似;简并:灰度级减少了（不同的灰度变换到同一灰度）

#### 匹配(规范化)

使得直方图变换到规定的分布;均衡可以看作是匹配的特例

输入原始图 $p_{r(r)}$ ，目标图像 $p_{z(z)}$ ，求输入 r 到输出 z 的变换公式

把原始图像和目标图像都用均衡化的作为桥梁

连续：原图均衡化 $s=T(r)=(L-1)\int_0^r p_r(w)dw$ ; 目标图均衡化 $s=G(z)=(L-1)\int_0^s p_z(\nu)d\nu$

均衡化图求逆得到目标 $z=G^{-1}(s)=G^{-1}[T(r)]$

离散：  $q,k\in[0,L-1]$   $s_k=T(r_k)=(L-1)\sum_{j=0}^k p_r(r_j)$  ;  $s_k=G(z_q)=(L-1)\sum_{i=0}^q p_z(z_i)$  ;  $z_q=G^{-1}(s_k)$

$s_k$  定义域和值域都是离散且有限,可用一表格记录其对应关系，并采样遍历方式找到最优匹配值,无需求逆

#### 局部处理

图像/图像块(全局/局部)的统计距计算

设 $p(r_i)=\frac{n_i}{n}$ ， $i=0,1,2,...,L-1$

灰度级 r 相对于均值 m 的 n 阶中心矩为： $\mu_n(r)=(\sum_{i=0}^{L-1}(r_i-m)^n p(r_i)$

m 是 r 的均值: $m=\sum_{i=0}^{L-1}r_i p(r_i)$  衡量明暗程度

$n=2$ 为方差: $\sigma^2=\mu_2(r)=\sum_{i=0}^{L-1}(r_i-m)^2 p(r_i)$  衡量灰度变化的程度

局部直方图处理:设置一个函数,对满足特定的 m 和σ的邻域进行变换,其他不变

### 空间滤波

#### 线性空间滤波

对于大小为 m×n(行 x 列)的核，m=2a+1 和 n=2b+1,其中 a 和 b 是非负整数。

w 是个二维矩阵,左上角从(-a,-b)开始,f 左上角从(0,0)开始

$g(x,y)=\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)f(x+s,y+t)$

新像素是旧像素线性组合;核中心和原图左上角开始对齐运算

#### 空间相关与卷积

一维核旋转 180°相当于这个核绕相对于其轴进行翻转。

二维旋转 180°等效于核关于其一个轴翻转，然后关于另一个轴翻转。

相关 $(w\star f)(x,y)=\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)f(x+s,y+t)$

卷积 $(w\star f)(x,y)=\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)f(x-s,y-t)$  等同于将核旋转 180 度后再做相关

卷积满足交换，结合，分配律;相关只满足分配律

N 输出大小，W 输入大小，P 填充大小，S 步长 F 卷积核大小

$N=(\frac{W-F+2P}{S})+1$

两个滤波器大小为 MxM 和 NxN，卷积后的大小是(M+N-1)x(M+N-1)

#### 可分离滤波器核

大小为 m x n 的滤波核可表示为两个向量的积  $w=w_1w_2^T=w_1\star w_2$

$w_1w_2$ 为 m x l,n x l 列向量

(一个列向量和一个行向量的积等于这两个向量的二维卷积)

可分离核执行卷积相对不可分离核执行卷积的计算优势: $C=\frac{MNm n}{MN(m+n)}=\frac{m n}{m+n}$

可分离核条件：**rank(w)=1**

分离方法：在核 w 中找到任何一个非零元素a,值为E；提取a所在的列与行，形成列向量c和r<sub>i</sub>；

$w_1=c,w_2^T=\frac{E}{c}$

#### 平滑（低通）空间滤波器

降低相邻灰度的急剧过度，以减少无细节（噪声）；平滑通过对相邻像素求和（积分）实现. 归一化确保亮度不变；低通滤波可去除“无关”细节：即比其核小很多的点/区域

$g(x,y)=\frac{\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)f(x+s,y+t)}{\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)}$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

盒式模糊滤波核

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

一般线性平滑滤波核

盒式滤波器:每个元素相同;核越大,对越多像素做平均,其平滑程度越明显，细节丢失越多；

高斯核函数  $w(s,t)=G(s,t)=Ke^{-\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}}$  一般选核大小奇数接近6σ 对同一图像，高斯核越大越模糊；

圆对称：到中心点距离r一样，则对应系数一样的;可分离：可写成两个一维的高斯分布相乘形式

对比：高斯核更适合去噪和平滑处理;盒式核更适合锐化和边缘增强。

#### 锐化（高通）空间滤波器

凸显灰度的过渡部分，以增强图像中的细节。锐化用相邻像素差分（导数）来实现.

一维差分  $\frac{\partial f}{\partial x}=f(x+1)-f(x)$   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)$

#### 拉普拉斯算子

连续： $\nabla^2f=\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}$

离散： $\nabla^2f=[f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)]-4f(x,y)$

常见拉普拉斯滤波器特点:1. 中心对称； 2. 中间值的绝对值大； 3. 和为零。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$g(x,y)=\begin{cases}f(x,y)-\nabla^2f(x,y), & \text{当拉普拉斯滤波中心系数为负} \\ f(x,y)+\nabla^2f(x,y), & \text{当拉普拉斯滤波中心系数为正}\end{cases}$

#### 钝化掩蔽和高提升滤波

用于增强图像的细节和边缘

模糊图像 $f(x,y)$  模板 $g_{mask}(x,y)=f(x,y)-\hat{f}(x,y)$  加权相加  $g(x,y)=f(x,y)+kg_{mask}(x,y)$

k=1 为钝化掩蔽 k>1 为高提升滤波 k<1 不强调钝化模板的贡献

#### 低通、高通、带阻和带通滤波器

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

单位冲激中心和滤波器核中心重合

低通  $lp(x,y)$ ，高通  $hp(x,y)=\delta(x,y)-lp(x,y)$

带阻  $br(x,y)=lp_1(x,y)+hp_2(x,y)=lp_1(x,y)+[\delta(x,y)-hp_2(x,y)]$ ，带通  $bp(x,y)=\delta(x,y)-br(x,y)=\delta(x,y)-[lp_1(x,y)+[\delta(x,y)-lp_2(x,y)]]$

## CHAPTER 4

### 采样

冲激串采样  $s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\Delta T)$

$\tilde{f}(t)=f(t)s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-n\Delta T)$

### 单变量的离散傅里叶变换

DFT： $F(u)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j2\pi ux/M}$   $u=0,1,\cdots,M-1$

IDFT： $f(x)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{j2\pi ux/M}$   $x=0,1,\cdots,M-1$

### 二变量函数的傅里叶变换

二维傅里叶变换是一维情 形向两个方向的简单扩展

$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,z)e^{-j2\pi(ut+ vz)}dtdz$

$f(t,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)e^{j2\pi(\mu t+ \nu z)}dudv$

采样： $\tilde{f}(t,z)=f(t,z)s_{\Delta T\Delta Z}(t,z)=\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f(t,z)\sigma(t-m\Delta T,z-n\Delta Z)$

DTF： $F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$

IDFT： $f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$

#### 二维 DFT 和 IDFT 性质

谱  $|F(u,\nu)|=[R^2(u,\nu)+I^2(u,\nu)]^{1/2}$ ， $R=\text{Real}(F)$ , $I=\text{Imag}(F)$  相角 $\phi(u,\nu)=\arctan[\frac{I(u,\nu)}{R(u,\nu)}$

极坐标  $F(u,\nu)=|F(u,\nu)|e^{j\phi(u,\nu)}$

周期性(k 为整数)  $F(u,v)=F(u+k_1M,v+k_2N)$

$f(x,y)=f(x+k_1M,y+k_2N)$

卷积  $(f\star h)(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$

相关  $(f\star h)(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f^*(m,n)h(x+m,y+n)$

可分离性 使用 DFT 算法求 IDFT  $MNf^*(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F^*(u,v)e^{-j2\pi(ux/M+\nu y/N)}$  结果取 复共轭并除以 MN 就可得到反变换

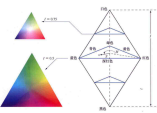
离散单位冲激  $\delta(x,y)\Leftrightarrow 1,1\Leftrightarrow MN\delta(u,v)$

卷积定理  $(f\star h)(x,y)\Leftrightarrow (F\cdot H)(u,v)\parallel(f\cdot h)(x,y)\Leftrightarrow \frac{1}{MN}(F\star H)(u,v)$

平移性  $f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)\parallel f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+\nu y_0/N)}$



**HSI**  
h 色调(角度),s 饱和度(鲜艳程度),i 强度(颜色的明暗程度)



RGB->HSI

$$H = 360 - \arccos\left(\frac{(R-G)+(R-B)}{2\sqrt{(R-G)^2+(R-B)(G-B)}}\right) (G < B)$$
$$H = \arccos\left(\frac{(R-G)+(R-B)}{2\sqrt{(R-G)^2+(R-B)(G-B)}}\right) (G \geq B)$$
$$S = 1 - \frac{3}{R+G+B} \cdot \min(R, G, B)$$
$$I = \frac{R+G+B}{3}$$

HSI->RGB

$$1.0^\circ \leq H < 120^\circ$$
$$R = I \cdot \left(1 + \frac{S \cdot \cos(H)}{\cos(60^\circ - H)}\right); G = I \cdot (1 + S \cdot (1 - \cos(H) / \cos(60^\circ - H))); B = I \cdot (1 - S)$$
$$2.120^\circ \leq H < 240^\circ$$
$$H' = H - 120^\circ$$
$$G = I \cdot \left(1 + \frac{S \cdot \cos(H')}{\cos(60^\circ - H')}\right); B = I \cdot (1 + S \cdot (1 - \cos(H') / \cos(60^\circ - H'))); R = I \cdot (1 - S)$$
$$3.240^\circ \leq H < 360^\circ$$
$$H' = H - 240^\circ$$
$$B = I \cdot \left(1 + \frac{S \cdot \cos(H')}{\cos(60^\circ - H')}\right); R = I \cdot (1 + S \cdot (1 - \cos(H') / \cos(60^\circ - H'))); G = I \cdot (1 - S)$$

**CIELAB**

$$L_* = 116 * h\left(\frac{Y}{Y_W}\right) - 16$$
$$a_* = 500 * \left[h\left(\frac{X}{X_W}\right) - h\left(\frac{Y}{Y_W}\right)\right]$$
$$b_* = 200 * \left[h\left(\frac{Y}{Y_W}\right) - h\left(\frac{Z}{Z_W}\right)\right]$$
$$h(q) = \begin{cases} q > 0.008856 \Rightarrow \left(\frac{q}{4}\right) * q^{\frac{1}{5}} \\ q \leq 0.008856 \Rightarrow 7.787 * q + \frac{16}{116} \end{cases}$$

L 表示亮度，范围从 0（黑色）到 100（白色）。a 表示从绿色到红色的轴。b 表示从蓝色到黄色的轴。h(q)是一个辅助函数，用于处理非线性变换。

**假彩色**  
[0,L-1]灰度级别,分为 P+1 个区间, $I_1, I_2, \cdots, I_{P+1}$ ,属于某个区间就赋值一个彩色  
若 $f(x, y) \in I_k$ , 则令  $f(x, y) = c_k$   
也可以设置 $f_R, f_G, f_B$ 把灰度映射为不同通道的颜色

**彩色变换**  
 $s_i = T_i(r_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n$   
提高亮度:RGB 三个分量乘以常数 k;CMY 求线性变化 $s_i = kr_i + (1 - k), \quad i = 1, 2, 3$ ;CMYK 只需改变第四个分量(K) $s_i = kr_i + (1 - k), \quad i = 4$

**彩色分层**  
突出图像中某个特定的彩色范围，有助于将目标从周围分离出来  
感兴趣的颜色被宽度为 W、中心在原型(即平均)颜色并具有分量 $a_j$ 的立方体(n>3 时为超立方体)包围，

$$s_i = \begin{cases} 0.5, & [|r_j - a_j| > W/2]_{1 \leq j \leq n} \\ r_{i1}, & \text{其他} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

用一个球体来规定感兴趣的颜色时

$$s_i = \begin{cases} 0.5, & \sum_{j=1}^n (r_j - a_j)^2 > R_0^2 \\ r_{i1}, & \text{其他} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

## 平滑和锐化

**平滑**

$$\bar{c}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{K} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} R(s, t) \\ \frac{1}{K} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} G(s, t) \\ \frac{1}{K} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} B(s, t) \end{pmatrix}$$

**锐化**

$$\nabla^2 c(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla^2 R(x, y) \\ \nabla^2 G(x, y) \\ \nabla^2 B(x, y) \end{pmatrix}$$

**分割图像**  
HSI:用饱和度(S),大于某个阈值分割

RGB: 令 z 表示 RGB 空间中的任意一点,RGB 向量 a 来表示平均颜色

$$D(z, a) = |z - a|$$

$$= [(z - a)^T (z - a)]^{\frac{1}{2}}$$
$$= [(z_R - a_R)^2 + (z_G - a_G)^2 + (z_B - a_B)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$D(z, a) \leq D_0$ 的点的轨迹是半径为 $D_0$ 的一个实心球体

马哈拉诺比斯距离  $D(z, a) = [(z - a)^T C^{-1} (z - a)]^{\frac{1}{2}}$

$D(z, a) \leq D_0$ 的点的轨迹是半径为 $D_0$ 的一个实心三维椭球体

两个方法都计算代价也很高昂,一般用边界盒关于 a 居中，它沿各坐标轴的长度与样本沿坐标轴的标准差成比例

## CHAPTER 9

### 二值图像形态学运算小结

运算	公式	注释
平移	$(B)_z = \{c \mid c = b + z, b \in B\}$	将B的原点平移到点z
反射	$\hat{B} = \{w \mid w = -b, b \in B\}$	相对于B的原点反射

补集	$A^c = \{w \mid w \notin A\}$	不属于A的点集
差集	$A - B = \{w \mid w \in A, w \notin B\} = A \cap B^c$	属于A但不属于B的点集
腐蚀	$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\} = \{z \mid (B)_z \cap A^c = \emptyset\}$	腐蚀A的边界(I)
膨胀	$A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$	膨胀A的边界(I)
开运算	$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$	平滑轮廓，断开狭窄区域，删除小孤岛和尖刺(I)
闭运算	$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$	平滑轮廓，弥合狭窄断裂和细长沟道，删除小孔洞(I)
击中与击中不中	$I \otimes B_{1,2} = \left\{z \mid \begin{matrix} (B_1)_z \subseteq A \\ \text{和} \\ (B_2)_z \subseteq A^c \end{matrix} \right\}$	在图像I中寻找结构元B的实例
边界提取	$\beta(A) = A - (A \ominus B)$	提取集合A的边界上的点集(I)
孔洞填充	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap I^c, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$	填充A中的孔洞， $X_0$ 初始化为I边框(I)
连通分量	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap I, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$	寻找I中的连通分量(I)
凸壳	$X_k^i = (X_{k-1}^i \otimes B^i) \cup X_{k-1}^i, i = 1, 2, 3, 4$	计算I中前景像素的凸壳(I)
细化	$A \otimes B = A - (A \oplus B)$	细化集合A，移除多余分支(I)
粗化	$A \odot B = A \cup (A \otimes B)$	使用结构元粗化集合A(I)
骨架	$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_{k(A)}, \quad S_{k(A)} = (A \ominus k_B) - (A \ominus k_B) \circ B$	寻找集合A的骨架(I)
裁剪	$X_1 = A \otimes \{B\} \quad X_2 = \bigcup_{k=1}^8 (X_1 \otimes B^k)$ $X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A \quad X_4 = X_1 \cup X_3$	$X_4$ 是裁剪集合A后的结果。结构元(V)用于前两个公式，H用于第三个公式(I)

大小为 1 的测地膨胀	$D_G^1(F) = (F \oplus B) \cap G$	F和G分别称为标记图像和模板图像(I)
大小为 1 的测地腐蚀	$E_{\{G\}}^1(F) = (F \odot B) \cup G$	F和G分别称为标记图像和模板图像(I)
大小为 n 的测地腐蚀	$E_{\{G\}}^n(F) = E_{\{G\}}^1(E_{\{G\}}^{n-1}(F))$	n表示重复迭代次数(I)
膨胀形态学重建	$R_G^D(F) = D_G^k(F), \quad k \leq t.$ $D_G^k(F) = D_G^{k+1}(F)$	通过迭代膨胀完成形态学重建(I)
腐蚀形态学重建	$R_G^{E(F)} = E_G^k(F), \quad k \leq t.$ $E_G^k(F) = E_G^{k+1}(F)$	通过迭代腐蚀完成形态学重建(I)
重建开运算	$O_R^n(F) = R_F^{D(F \oplus n_B)}$	$(F \odot n_B)$ 表示B对F的n次腐蚀，B的形式依赖于应用(I)
重建闭运算	$C_R^n(F) = R_F^{E(F \oplus n_B)}$	$(F \oplus n_B)$ 表示B对F的n次膨胀，B的形式依赖于应用(I)
孔洞填充	$H = \left[R_{I^c}^{D(F)}\right]^c$	H等于输入图像I，但所有孔洞均被填充(I)
边界清除	$X = I - R_I^{D(F)}$	X等于输入图像I，但删除了所有接触边界的标记(I)

### 灰度级形态学

灰度腐蚀 $[f \odot b](x, y) = \min_{(s, t) \in b} \{f(x + s, y + t)\}$  非平坦 $[f \ominus b_N](x, y) = \min_{(s, t) \in b_N} \{f(x + s, y + t) - b_N(s, t)\}$

灰度膨胀 $[f \oplus b](x, y) = \max_{(s, t) \in b} \{f(x - s, y - t)\}$  非平坦 $[f \oplus b_N](x, y) = \max_{(s, t) \in b_N} \{f(x - s, y - t) + \hat{b}_N(s, t)\}$

开运算 $f \circ b = (f \odot b) \oplus b$  闭运算 $f \bullet b = (f \oplus b) \odot b$

形态学梯度  $g = (f \oplus b) - (f \oplus \hat{b})$

顶帽变换  $T_{hat}(f) = f - (f \circ b)$  底帽变换  $B_{hat}(f) = (f \bullet b) - f$

## CHAPTER 10

### 背景知识

差分: 前向  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x + 1) - f(x)$  后向  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x) - f(x - 1)$  中值  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$  二阶  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = f(x + 1) - 2f(x) + f(x - 1)$

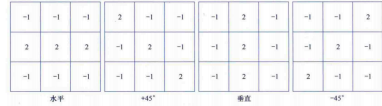
(1)一阶导产生粗边缘；(2)二阶导对精细细节(如细线、孤立点和噪声)有更强的响应；(3)二阶导在灰度斜坡和台阶过渡处会产生双边缘响应；(4)二阶导的符号可用于确定边缘的过渡是从亮到暗(正)还是从暗到亮(负)。

### 孤立点检测

$$\text{拉普拉斯 } \nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1) - 4f(x, y)$$

超过阈值 T 的标记  $g(x, y) = \begin{cases} 1, & |Z(x, y)| > T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \nabla^2 f = Z$

### 直线检测



### 边缘检测

$$\text{梯度 } \nabla f(x, y) \equiv \text{grad}[f(x, y)] \equiv \begin{bmatrix} g_x(x, y) \\ g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

欧几里得向量范数  $M(x, y) = \|\nabla f(x, y)\| = \sqrt{g_x^2(x, y) + g_y^2(x, y)}$  绝对值来近似梯度幅度：



$M(x,y) \approx |g_x| + |g_y|$

梯度方向(垂直边缘)  $\alpha(x,y) = \arctan\left[\frac{g_y(x,y)}{g_x(x,y)}\right]$

$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix}$

Robert 算子  $g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_9 - z_5)$   $g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_8 - z_6)$

Prewitt 算子  $g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + z_8 + z_9) - (z_1 + z_2 + z_3)$   $g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + z_6 + z_9) - (z_1 + z_4 + z_7)$

Sobel 算子  $g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$   $g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$

二维高斯函数,  $G(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

高斯拉普拉斯(LogG)函数:  $\nabla^2 G(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-\sigma^2}{\sigma^4}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

Marr-Hildreth 算法  $g(x,y) = [\nabla^2 G(x,y)] \star f(x,y) = \nabla^2[G(x,y) \star f(x,y)]$  寻找 g(x,y)的过零点来确定 f(x,y)中边缘的位置

高斯差分(DoG)来近似式的 LoG 函数  $D_G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_1^2}} - \frac{1}{2\pi\sigma_2^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_2^2}}$

连接边缘点

满足条件则连接  $|M(s,t)-M(x,y)| \leq E \left| \alpha(s,t)-\alpha(x,y) \right| \leq A$

霍夫变换  $\rho(\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta = R\cos(\theta - \phi) = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\left(\theta - \arctan\frac{y}{x}\right)$

阈值处理

多分类  $g(x,y) = \begin{cases} a_i, & f(x,y)>T_2 \\ b_i,T_1<f(x,y)\leq T_2 \\ c_i,f(x,y)\leq T_1 \end{cases}$

基本的全局阈值化

- 1. 为全局阈值T选择一个初始估计值。
- 2. 在  $g(x,y) = \begin{cases} 1, & f(x,y)>T \\ 0, & f(x,y)\leq T \end{cases}$  中用T分割图像。这将产生两组像素：由灰度值大于T的所有像素组成的G<sub>1</sub>,由所有小于等于T的像素组成的G<sub>2</sub>
- 3. 对 G<sub>1</sub> 和 G<sub>2</sub>中的像素分别计算平均灰度值(均值)m<sub>1</sub>和 m<sub>2</sub>
- 4. 在m<sub>1</sub>和 m<sub>2</sub>之间计算一个新的阈值:  $T = \frac{m_1+m_2}{2}$
- 5. 重复步骤 2 到步骤 4,直到连续迭代中的两个T值间的差小于某个预定义的值ΔT为止。

OSTU 方法 n<sub>i</sub> 表示灰度级 i 的像素数,  $M * N = \sum_{i=0}^{L-1} n_i; p_i = \frac{n_i}{MN}; \sum_{i=0}^{L-1} p_i = 1, \quad p_i \geq 0$

分为两类 c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub> 累计概率  $P_1(k) = \sum_{i=0}^k p_i; P_2(k) = \sum_{i=k+1}^{L-1} p_i = 1 - P_1(k)$  平均灰度  $m_1(k) = \frac{P_1(k)}{P_1(k)} \sum_{i=0}^k ip_i; m_2(k) = \frac{1}{P_2(k)} \sum_{i=k+1}^{L-1} ip_i$  k 级累计灰度  $m(k) = \sum_{i=0}^k ip_i$  整个图像平均灰度  $m_G = \sum_{i=0}^{L-1} ip_i$

约束条件  $P_1m_1 + P_2m_2 = m_G; P_1 + P_2 = 1$

全局方差  $\sigma_G^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (i - m_G)^2 p_i$  类间方差  $\sigma_B^2 = P_1(m_1 - m_G)^2 + P_2(m_2 - m_G)^2 = P_1P_2(m_1 - m_2)^2 = \frac{P_1G P_1 - m^2}{P_1(1 - P_1)}$  (选择 k 最大化  $\sigma_B^2$ )

也可以多个阈值约束  $\sigma_B^2(k_1^*, k_2^*, \cdots, k_{K-1}^*) = \max_{0 < k_1 < k_2 < \cdots k_{K-1} < L-1} \sigma_B^2(k_1, k_2, \cdots, k_{K-1})$

区域生长 分离 聚合

区域生长

- 1. **种子选择**: 选择一组“种子”点，这些种子点通常是具有某些特定属性的像素，如灰度或颜色范围。种子点的选择可以根据问题的性质或图像的特性来确定。
- 2. **相似性准则**: 定义一个相似性准则，用于判断邻域像素是否应被添加到当前区域。相似性准则可以基于灰度、颜色、纹理等属性。
- 3. **区域扩展**: 从种子点开始，将满足相似性准则的邻域像素逐步添加到当前区域中。这个过程会不断重复，直到没有更多的像素满足加入准则。
- 4. **连通性考虑**: 在区域生长过程中，必须考虑像素的连通性，以确保生成的区域是连通的。通常使用 8 连通或 4 连通来定义邻域。
- 5. **停止规则**: 定义一个停止规则，当没有更多的像素满足加入准则时，区域生长过程停止。
- 6. **区域标记**: 使用不同的标记（如整数或字母）来标识每个生成的区域，形成分割后的图像。

分离聚合

- 1. **初始分割**: 将图像初步划分为一组不相交的区域（如基于像素的颜色、灰度值等），形成初始区域。这些区域可以用细网格单元表示。
- 2. **分离规则**:
  - 根据定义的判别准则（如区域的均值、方差、纹理等特性），对某一特定区域 R 判断其是否满足某些属性。如果不满足，则将其细分为更小的不相交区域。
  - 例如，可以将  $Q(R) = \text{FALSE}$  的任何区域划分为 4 个子区域。
- 3. **聚合规则**:
  - 如果满足某些逻辑条件（如两个相邻区域的属性接近，满足  $Q(R_i \cup R_j) = \text{TRUE}$ ），则将这些区域进行合并。
  - 通过不断聚合区域，减少过度分割的可能性。
- 4. **停止条件**:
  - 当区域无法进一步分割或聚合时，停止操作。
  - 最终的分割结果应满足所有区域均符合准则。
- 5. **应用示例**:
  - 结合区域的统计特性（如均值 m<sub>R</sub> 和标准差 σ<sub>R</sub>）和用户定义的阈值范围，可以定义规则  $Q(R)$ （例如: σ<sub>R</sub> > a, AND, m<sub>R</sub> < b）。

分水岭变换

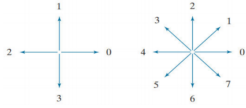
- 1. 梯度图像：，算法使用图像的梯度图像  $g(x,y)$ ，其中包含多个区域极小值  $M_{\{1\}}, M_{\{2\}}, M_{\{g\}}$ 。这些极小值对应于图像中的局部低谷。
- 2. 汇水盆地：每个区域极小值  $M_{\{i\}}$  都有一个与之相关联的汇水盆地  $C(M_i)$ ，这些汇水盆地中的点形成一个连通分量。
- 3. 淹没过程：算法通过模拟水位从最小值 min 逐渐上升到最大值 max 的过程来分割图像。在每个水位 n，集合  $T[n]$  包含所有灰度值小于 n 的点。
- 4. 二值图像：在每个水位 n， $T[n]$  可以被视为一幅二值图像，其中黑点表示位于平面  $g(x,y) = n$  下方的点。
- 5. 汇水盆地分割：随着水位上升，算法通过比较当前水位 n 的连通分量与前一水位 n - 1 的汇水盆地，来确定是否需要构建水坝以防止不同汇水盆地的水流溢出。
- 6. 水坝构建：当水位上升到某个点时，如果发现有多个汇水盆地的水流可能溢出，算法会在这些汇水盆地之间构建水坝（即分割线），以防止水流混合。

缺点:受噪声影响大;容易过度分割

边界预处理

**跟踪二值图像中 1 值区域 R 的边界算法**:从左上角标记为 1 的点开始,按顺时针找 8 邻域中下一个 1,然后继续从下一个 1 开始执行算法,直到回到起点

弗里曼链码：基于线段的 4 连通或 8 连通，使用一种编号方案对每个线段的方向进行编码。用于表示由顺次连接的具有指定长度和方向的直线段组成的边界。



从起点开始,往哪个箭头方向走就标记哪个数字,直到回到起点;形状和链码是一一对应的;改变起点会让链码循环位移

**归一化**:循环位移后数字最小的链码

**差分**-相邻的做差,i 为当前 a[i+1] - a[i],最后加一个起点-终点;之后对 4 或者 8 取 mod;D = [(C<sub>2</sub> - C<sub>1</sub>) mod m, (C<sub>3</sub> - C<sub>2</sub>) mod m, ..., (C<sub>1</sub> - C<sub>n</sub>) mod m]

**形状数**(差分+归一化): 将码按一个方向循环，使其构成的自然数最小序列;形状数的阶n 定义为形状数中的数字的数量。

**斜率链码**: 在曲线周围放置**等长**的直线段得到，其中的直线段的端点与曲线相接,直线段的斜率记录链码

**最小周长多边形**:使用尽量少少的线段来得到给定边界的基本形状;abc 三点行列式,逆时针为正,顺时针为负,共线为 0;先找出所有凸起和凹陷点,然后凹顶点需要镜像;

**标记图**:把**质心到边界的距离**画成**角度的函数**。将原始的二维边界简化为一维函数表示。

边界特征描述子

边界 B 的直径 diameter(B) = max<sub>i,j</sub>[D(pi, pj)] 式中 D 为距离测度, pi 和 pj 是边界上的点。

长度length<sub>m</sub> = [(x<sub>2</sub> - x<sub>1</sub>)<sup>2</sup> + (y<sub>2</sub> - y<sub>1</sub>)<sup>2</sup>]<sup>1/2</sup> 方向angle<sub>m</sub> = arctan[ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ]

曲线的曲折度定义为斜率链码链元素的绝对值之和:τ = ∑<sub>i=1</sub><sup>n</sup> |α<sub>i</sub>|,式中的 n 是斜率链码中的元素数量, |α<sub>i</sub>|是链码中元素的值(斜率变化)。

**傅里叶描述子**:二维边界可以被视为复数从而一维化表示为 s(k) = x(k) + jy(k)

边界的傅里叶描述子  $a(u) = \sum_{k=0}^{K-1} s(k)e^{-j2\pi uk/K}$   
 $s(k) = \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} a(u)e^{j2\pi uk/K}$ ;只采用前 P 个系数  $\hat{s}(k) = \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{P-1} a(u)e^{j2\pi uk/K}$

**统计矩**: 1.把 g(r)的幅度视为离散随机变量 z，形成幅度直方图 p(zi),A 是灰度值最大的区间数量。将 p 归一化，使其元素之和等于 1，那么 p(zi)是灰度值 zi 的概率估计;  
z 关于其平均值的 n 阶矩为  $\mu_n(z) = \sum_{i=0}^{A-1} (z_i - m)^n p(z_i)$   
m 是 z 的均值,  $\mu_2$ 是 z 的方差，只需要前几个矩来区分明显不同形状的标记图。

2.将 g(r)面积归一化为 1，并视为直方图，g(r)可被视为值 ri 出现的概率。r 是随机变量 K 是边界上的点数,  $\mu_{n(r)}$  与标记图 g(r)形状直接相关  
矩是  $\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{K-1} (r_i - m)^n g(r_i)$  其中  $m = \sum_{i=0}^{K-1} r_i g(r_i)$

区域特征描述子

面积 A 为区域中的像素数量。周长 p 是其边界的长度;紧致度（无量纲）  $\frac{p^2}{A}$  ;圆度（无量纲）  $\frac{4\pi A}{p^2}$  ;有效直径  $d_e = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$

偏心率 标准椭圆 eccentricity =  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1 - (b/a)^2}$   $a \geq b$   
任意方向椭圆(协方差矩阵的特征值) eccentricity =  $\sqrt{1 - (\lambda_2/\lambda_1)^2}$   $\lambda_1 \geq \lambda_2$

拓扑描述子:孔洞的数量 H 和连通分量 C 的数量,定义欧拉数 E = C - H

顶点数表示为 V，将边数表示为 Q，将面数表示为 F 时，V-Q+F=E

纹理:统计方法(和统计矩 1 类似),光滑度  $R = 1 - \frac{1}{1+\sigma^2(r)}$  σ<sup>2</sup> 是方差  $\mu_2$ ;一致性  $U = \sum_{i=0}^{L-1} p^2(z_i)$  熵  $p = - \sum_{i=0}^{L-1} p(z_i) \log_2 p(z_i)$

共生矩阵中的元素 g<sub>ij</sub> 值定义为图像 f 中灰度(z<sub>i</sub>,z<sub>j</sub>)的像素对出现的次数;像素对不一定是左右的,可以跨格子;从 z<sub>i</sub> 到 z<sub>j</sub>

共生矩阵 (KxK) 的描述子, p<sub>i,j</sub> 等于 G 中第 i,j 项处于 G 的元素之和

描 述 子	解 释	公 式
最大概率	度量 G 的最强响应, 值域是[0, 1]	$\max_{i,j} p_{ij}$
相关	一个像素在整个图像上与其相邻像素有多相关的测度, 值域是 [-1, -1], 1 对应于完全正相关, -1 对应于完全负相关。标准差为零时, 这个测度无定义	$\frac{\sum_{i,j} (i-m_i)(j-m_j)p_{ij}}{\sum_{i,j} p_{ij} \sigma_i \sigma_j}, \quad \sigma_i \neq 0, \sigma_j \neq 0$
对比度	一个像素在整个图像上与其相邻像素之间的灰度对比度的测度, 值域是从 0 到 (G 为常数时) 到(K-1) <sup>2</sup>	$\sum_{i,j} (i-j)^2 p_{ij}$
均匀性 (也称能量)	均匀性的一个测度, 值域为[0, 1]。恒定图像的均匀性为 1	$\sum_{i,j} p_{ij}^2$
同质性	G 中对角分元的元素的空间接近度的测度, 值域是[0, 1], G 是对角阵时同质性为最大值, 即 1	$\sum_{i,j} p_{ij} \frac{1}{1+ i-j }$
熵	G 中元素的随机性的测度。当所有 p <sub>ij</sub> 均为 0 时, 熵是 0; 当 p <sub>ij</sub> 均匀分布时, 熵取最大值, 因此最大值为 2log <sub>2</sub> K	$-\sum_{i,j} p_{ij} \log_2 p_{ij}$

极坐标下的频谱函数  $S(r) = \sum_{\theta=0}^{\pi} S_{\theta}(r)$   $S(\theta) = \sum_{r=1}^{R_0} S_r(\theta)$

矩不变量:大小为 MxN 的数字图像 f(x,y)的二维(p+q)阶矩为  $m_{pq} = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x,y)$   $\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}}, \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$

归一化(p+q)阶中心矩为  $\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{(p+q)/2+1}}$

主成分描述子

x 是 n 维列向量,总体平均向量  $m_x = E(x)$ ,向量总体的协方差矩阵(nxn) $C_x = E\{(x - m_x)(x - m_x)^T\}$

霍特林变换:令 A 是一个矩阵，这个矩阵的各行由 Cx 的特征向量构成; $y = A(x - m_x)$