第二章 数字图像基础

1、光和电磁波谱

波长 λ 和频率 v 的关系为 $\lambda = c/v$，其中 $c = 2.998 \times 10^8 m/s$

电磁波谱各分量的能量为 $E = hv$，其中 h 为普朗克常数 $h = 6.626 \times 10^{-34}$

相机成像大小计算："比例尺"性质。

2、三个基本量用于描述彩色光源：

*辐射强度*是从光源流出能量的总量，通常用瓦特（W）度量；*光通量*给出观察者从光源感受到的能量，用流明数度量；*亮度*是光感受的主观描绘，实际上不能测量，是描述彩色感觉的参数之一；*灰度级*用来描述单色光图像的亮度，因为它的范围从黑到灰，最后到白。

3、简单的成像模型

$f(x,y) = i(x,y)r(x,y)$，其中 $i(x,y)$ 为入射分量，$r(x,y)$ 为反射分量

其中 $0 \le f(x,y), i(x,y) < \infty$，$0 \le r(x,y) \le 1$

4、图像的取样和量化

对坐标值进行数字化称为*取样*（或*采样*），对幅度值进行数字化称为*量化*

一副 $m \times n$ 的图像表示为一个 $m \times n$ 的矩阵，每个矩阵的元素称为像素

注意原点位于图像的左上角，x 轴向下，y 轴向右

一般一个字节存放一个像素的信息，每个像素都有自己的位置和值两个属性

5、空间分辨率和灰度分辨率

分辨率为 5 线对每毫米，即 10 个像素每毫米。

*空间分辨率*是图像中最小可辨别细节的测度

*灰度分辨率*是指在灰度级中可分辨的最小变化，通常是指量化灰度时所用的比特数

6、内插

最近邻内插将原图像中最近邻的灰度赋给每个新位置

双线性内插有四个最邻近的灰度来计算给定位置的灰度，其中 $v(x,y) = ax + by + cxy + d$，四个系数可用 4 个最近邻点的 4 个未知方程求出

7、邻接

给定 $p(x,y)$ 有 4 个水平和垂直的相邻像素、其坐标分别为 $(x+1,y), (x-1,y), (x,y+1), (x,y-1)$，这个像素集称为 p 的 4 邻域，用 $N_4(p)$ 表示。

每个像素距 p 一个单位距离，如果 p 位于图像的边界，则 p 的某一邻像素位于数字图像的外部。

p 的 4 个对角邻像素有如下坐标：$(x+1,y+1), (x+1,y-1), (x-1,y+1), (x-1,y-1)$ 并用 $N_D(p)$ 表示。这四个对角像素与 4 邻域合称为 p 的 8 邻域，用 $N_8(p)$ 表示。

8、邻接关系

当像素在 $N_4(p)$ 中，则称为 4 邻接；当像素在 $N_8(p)$ 中，则称为 8 邻接。

m 邻接相当于 8 邻接去掉某些斜相连：q 在 $N_D(p)$ 中且存在他们的公共 4 邻接邻居时，p, q 不是 m 邻接。

对于同等区域，两点间 8 通路可达等价于 m 通路可达，但最短距离未必一致（m 邻接比 8 邻接少一些"斜线"）

4（或 8）连通子集：令 S 代表图像中像素的子集，如果 S 中全部像素之间存在一个 4（或 8）通路，那么称 S 是 4（或 8）连通子集。

第三章 灰度变换与空间滤波

1、灰度变换基本函数

（1）图像反转：$s = L - 1 - r$

（2）对数变换：$s = c\log(1+r)$

（3）幂律变换：$s = cr^\gamma$，当 $\gamma > 1$ 时变亮，$0 < \gamma < 1$ 时变暗

（4）分段线性变换函数：对比度拉伸、灰度级分层、比特平面分层

2、直方图处理

（1）f 的非归一化直方图定义：$h(r_k) = n_k$，其中 n_k 是 f 中灰度为 r_k 的像素的数量。细分的灰度级称为直方图容器。直方图反映了像素灰度值的分布。

（2）归一化直方图定义为

$$p(r_k) = \frac{h(r_k)}{MN} = \frac{n_k}{MN}$$

（3）直方图均衡化

$$\text{连续情形：} s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)dw$$

$$\text{离散情形：} s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j) = (L-1)\sum_{j=0}^{k}\frac{n_j}{MN}$$

（4）直方图匹配

连续形式算法：

$$\text{原始图像均衡化后的灰度：} s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)dw$$

$$\text{目标图像均衡化后的灰度：} s = G(z) = (L-1)\int_0^z p_z(v)dv$$

$$\text{目标图像均衡化后的灰度：} z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)]$$

离散形式算法：

$$\text{原始图像均衡化后的灰度：} s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$$

$$\text{目标图像均衡化后的灰度：} s_k = G(z_q) = (L-1)\sum_{i=0}^{q} p_z(z_i)$$

$$\text{目标图像均衡化后的灰度：} z_q = G^{-1}(s_k) = G^{-1}(T(r_k))$$

（5）直方图统计量

对于灰度级在区间 $[0, L-1]$ 内的图像，灰度值 r 相对于其均值 m 的第 n 阶矩定义为

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{L-1}(r_i - m)^n p(r_i), \quad m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$$

均值是平均灰度的测度，而方差（或标准差 σ）是图像对比度的测度

$$\sigma^2 = \mu_2 = \sum_{i=0}^{L-1}(r_i - m)^2 p(r_i)$$

3、空间滤波

（1）相关与卷积

$$\text{相关：} (w * f)(x,y) = \sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} w(s,t)f(x+s, y+t)$$

$$\text{卷积：} (w \star f)(x,y) = \sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} w(s,t)f(x-s, y-t)$$

（2）平滑（低通）空间滤波器

盒式滤波器、低通高斯滤波器（$w(s,t) = G(s,t) = Ke^{-\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}}$）、统计排序滤波器（非线性，中值滤波器可过滤椒盐噪声，胡椒噪声指灰度值低的噪声，盐粒噪声指灰度值高的噪声）。

（3）锐化（高通）空间滤波器

拉普拉斯滤波器（$\nabla^2 f(x,y) = f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y)$）

拉普拉斯锐化图像的基本方法：$g(x,y) = f(x,y) + c[\nabla^2 f(x,y)]$，其中 c 的取值与核的中间系数的符号相同。

钝化掩蔽和高提升滤波：$g_{mask}(x,y) = f(x,y) - \bar{f}(x,y)$，其中 $\bar{f}$ 为模糊后图像。则高提升图像为 $g(x,y) = f(x,y) + kg_{mask}(x,y)$

罗伯特交叉梯度算子，Sobel 算子

第四章 频率域滤波

1、二维取样定理与混淆

若取样间隔满足 $\Delta T < \frac{1}{2\mu_{max}}$ 和 $\Delta Z < \frac{1}{2\nu_{max}}$，则连续带限函数 $F(\mu,\nu) = 0, |\mu| \ge \mu_{max}$和$|\nu| \ge \nu_{max}$ 可由其一组样本无误地复原。

如果以低于函数最高频率的两倍的取样率来获得样本，连续带限函数会出现混淆现象。现实中混淆不可避免，可以通过平滑原函数减少高频来降低混淆的影响。

2、傅里叶变换

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M}, \qquad f_n = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M}$$

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M}, \quad f(x) = \frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{j2\pi ux/M}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-j2\pi kt/T}dt, \qquad F(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\mu - \frac{k}{T})$$

注：注意区分离散傅里叶变换与连续傅里叶变换。前四个式子用于离散周期傅里叶变换，后两个式子用于连续周期傅里叶变换。非周期的傅里叶变换在此不再赘述。

3、二维 DFT 变换性质小结

名称	表达式
DFT	$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy+N)}$
IDFT	$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$
谱	$\mid F(u,v) \mid = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}, R = \text{Real}(F), I = \text{Imag}(F)$
相角	$\phi(u,v) = \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$
极坐标表示	$F(u,v) = \mid F(u,v) \mid e^{j\phi(u,v)}$
功率谱	$P(u,v) = \mid F(u,v) \mid^2$
平均值	$\bar{f}(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = \frac{1}{MN}F(0,0)$
频域周期性	$F(u,v) = F(u+k_1M, v) = F(u, v+k_2N) = F(u+k_1M, v+k_2N)$
空域周期性	$f(x,y) = f(x+k_1M, y) = f(x, y+k_2N) = f(x+k_1M, y+k_2N)$
线性	$af_1(x,y) + bf_2(x,y) \Leftrightarrow aF_1(u,v) + bF_2(u,v)$
逆平移性	$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$
正平移性	$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$
旋转	$f(r, \theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \psi+\theta_0)$
正卷积定理	$(f \star h)(x,y) \Leftrightarrow (F \cdot H)(u,v)$
逆卷积定理	$(f \cdot h)(x,y) \Leftrightarrow (1/MN)[(F \star H)(u,v)]$
离散单位冲激	$\delta(x,y) \Leftrightarrow 1,\ 1 \Leftrightarrow MN\delta(u,v)$
冲激函数性质	$a\delta(au) = \delta(u), a > 0 \quad a\delta(au) = -\delta(u), a < 0$

4、频率域滤波步骤

（1）用 $(-1)^{x+y}$ 乘以输入图像，做频谱中心化处理；

（2）计算（1）结果的 DFT，即 $F(u,v)$；

（3）用滤波器函数 $H(u,v)$ 乘以 $F(u,v)$（在频谱域处理图像）；

（4）计算（3）中结果的 IDFT；

（5）得到（4）结果中的实部；

（6）用 $(-1)^{x+y}$ 乘以（5）中的结果。

5、频率域平滑滤波器

（1）理想低通滤波器

$$H(u,v)=\begin{cases}1, & D(u,v)\le D_0\\ 0, & D(u,v)>D_0\end{cases}$$

$$D(u,v)=[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]$$

其中一幅图像所包含的信息的百分比的计算方式为 $\alpha=100\cdot(\sum_u\sum_v P(u,v)/P_T)$
其中 $P_T=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}P(u,v)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\mid F(u,v)\mid^2$
(2) 巴特沃斯低通滤波器：$H(u,v)=\frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}}$
此处 $D(u,v)=[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]^{1/2}$，$D_0$ 为 50% 衰减频率
(3) 高斯低通滤波器：$H(u,v)=e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

6、频率域锐化滤波器

(1) 普通锐化滤波器：$H_{hp}(u,v)=1-H_{ip}(u,v)$

(2) 理想高通滤波器

$$H(u,v)=\begin{cases}0, & D(u,v)\le D_0\\ 1, & D(u,v)>D_0\end{cases}$$

(3) 巴特沃斯高通滤波器：$H(u,v)=\frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$
(4) 高斯高通滤波器：$H(u,v)=1-e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$
(5) 频率域的拉普拉斯算子：$H(u,v)=-(u^2+v^2)=-[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]$
(6) 高提升滤波：$H_{hb}(u,v)=(A-1)+H_{hp}(u,v)$
(7) 高频加强滤波：$H_{hfe}(u,v)=a+bH_{hp}(u,v)$

7、同态滤波器

$$H(u,v)=(\gamma_H-\gamma_L)[1-e^{-c(D^2(u,v)/D_0^2)}]+\gamma_L$$

其中 $\gamma_L<1$ 且 $\gamma_H>1$，c 用于控制滤波器函数斜面的锐化

第五章 图像复原与重建

1、图像退化模型

$$g(x,y)=(h\star f)(x,y)+\eta(x,y)$$
$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$$

2、噪声模型

(1) 高斯噪声

$$p(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(z-\bar z)^2/2\sigma^2}$$

(2) 瑞利噪声

$$p(z)=\begin{cases}\frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2-b} & ,z\ge a\\ 0 & ,z<a\end{cases}$$

其中 $\bar z=a+\sqrt{\pi b/4}$，$\sigma^2=\frac{b(4-\pi)}{4}$。

(3) 爱尔兰（伽马）噪声

$$p(z)=\begin{cases}\frac{a^bz^{b-1}}{(b-1)!}e^{-az} & ,z\ge 0\\ 0 & ,z<0\end{cases}$$

其中 $\bar z=\frac{b}{a}$，$\sigma^2=\frac{b}{a^2}$。

(4) 指数噪声

$$p(z)=\begin{cases}ae^{-az} & ,z\ge 0\\ 0 & ,z<0\end{cases}$$

其中 $\bar z=\frac{1}{a}$，$\sigma^2=\frac{1}{a^2}$。

(5) 均匀噪声

$$p(z)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & ,a\le z\le b\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

其中 $\bar z=\frac{a+b}{2}$，$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$。

(6) 椒盐噪声

$$p(z)=\begin{cases}P_s & ,z=2^{k-1}\\ P_p & ,z=0\\ 1-(P_s+P_p) & ,z=V\end{cases}$$

(7) 周期噪声（陷波）
(8) 参数估计

$$\mu=\sum_{z_i\in S}z_ip(z_i)\quad \sigma^2=\sum_{z_i\in S}(z_i-\mu)^2p(z_i)$$

2、仅有噪声的图像滤波

(1) 均值滤波器

算术平均滤波器：$\hat f(x,y)=\frac{1}{mn}\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)$

几何均值滤波器：$\hat f(x,y)=\left[\prod_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)\right]^{\frac{1}{mn}}$

谐波平均滤波器：$\hat f(x,y)=\frac{mn}{\sum_{(r,c)\in S_{xy}}\frac{1}{g(r,c)}}$

反谐波平均滤波器：$\hat f(x,y)=\frac{\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)^Q}$

(2) 统计排序滤波器

中值滤波器：$\hat f(x,y)=\mathrm{median}_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}$

最大值滤波器：$\hat f(x,y)=\max_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}$

最小值滤波器：$\hat f(x,y)=\min_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}$

中点滤波器：$\hat f(x,y)=\frac{1}{2}\left[\max_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}+\min_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}\right]$

修正阿尔法均值滤波器：$\hat f(x,y)=\frac{1}{mn-d}\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g_R(r,c)$

(3) 自适应滤波器

自适应局部降噪滤波器：$\hat f(x,y)=g(x,y)-\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_{S_{xy}}^2}[g(x,y)-\bar z_{S_{xy}}]$

自适应中值滤波器：

层次 A：　若 $z_{min}<z_{med}<z_{max}$，则转到层次 B
否则，增 S_{xy} 的尺寸
若 $S_{xy}\le S_{max}$，则重复层次 A
否则，输出 z_{med}
层次 B：　若 $z_{min}<z_{xy}<z_{max}$，则输出 z_{xy}
否则，输出 z_{med}

3、陷波滤波器

(1) 一般形式：$H_{NR}(u,v)=\prod_{k=1}^Q H_k(u,v)H_{-k}(u,v)$
其中 H_k 和 H_{-k} 分别是中心为 (u_k,v_k) 及 (u_{-k},v_{-k}) 的高通滤波器传递函数。同时

$$D_k(u,v)=[(u-M/2-u_k)^2+(v-N/2-v_k)^2]^{1/2}$$
$$D_{-k}(u,v)=[(u-M/2+u_k)^2+(v-N/2+v_k)^2]^{1/2}$$

(2) 陷波带通滤波器：$H_{NP}(u,v)=1-H_{NR}(u,v)$
(3) 最优陷波滤波器：$\hat f=g(x,y)-w(x,y)\eta(x,y)$，其中 $w(x,y)=\frac{\overline{g\eta}-\bar g\bar\eta}{\overline{\eta^2}-\bar\eta^2}$

4、线性移不变

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta$$

5、估计退化函数

(1) 观察法：$H_s(u,v)=\frac{G_s(u,v)}{\hat F_s(u,v)}$
(2) 试验法：$H(u,v)=\frac{G(u,v)}{A}$，这是由于 $A\delta(x,y)\to g(x,y)\Leftrightarrow A\to G(u,v)$
(3) 数学建模法，如运动模糊图像的退化函数为 $H(u,v)=\frac{T}{\pi(ua+vb)}\sin[\pi(ua+vb)]e^{-j\pi(ua+vb)}$

6、逆滤波

$$\hat F(u,v)=\frac{G(u,v)}{H(u,v)}\qquad \hat F(u,v)=F(u,v)+\frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

7、最小均方误差（维纳）滤波

$$\hat F(u,v)=\left[\frac{1}{H(u,v)}\frac{\mid H(u,v)\mid^2}{\mid H(u,v)\mid^2+S_\eta(u,v)/S_f(u,v)}\right]G(u,v)$$

$$\hat F(u,v)=\left[\frac{1}{H(u,v)}\frac{\mid H(u,v)\mid^2}{\mid H(u,v)\mid^2+K}\right]G(u,v)\quad\text{（噪声为白噪声）}$$

8、图像恢复好坏的度量

功率信噪比：$\mathrm{SNR}=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\mid F(u,v)\mid^2/\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\mid N(u,v)\mid^2$

均方误差：$\mathrm{MSE}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}[f(x,y)-\hat f(x,y)]^2$

均方根信噪比：$\mathrm{SNR}=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\hat f(x,y)^2/\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}[f(x,y)-\hat f(x,y)]^2$

9、约束最小二乘方滤波

$$\hat F(u,v)=\left[\frac{H^*(u,v)}{\mid H(u,v)\mid^2+\gamma\mid P(u,v)\mid^2}\right]G(u,v)$$

其中 $P(u,v)$ 为 $p(x,y)=$ 拉普拉斯空间卷积核 的傅里叶变换

10、几何均值滤波

$$\hat F(u,v)=\left[\frac{H^*(u,v)}{\mid H(u,v)\mid^2}\right]^\alpha\left[\frac{H^*(u,v)}{\mid H(u,v)\mid^2+\beta\left[\frac{S_\eta(u,v)}{S_f(u,v)}\right]}\right]^{1-\alpha}G(u,v)$$

- 当 $\alpha=1$ 时，滤波器退化为逆滤波器
- 当 $\alpha=0$ 时，滤波器退化为参数维纳滤波器
- 当 $\alpha=0$，$\beta=1$ 时，滤波器退化为标准维纳滤波器
- 当 $\alpha=1/2$，滤波器为几何均值滤波器
- 当 $\beta=1$，α 减到 1/2 以上，它接近逆滤波器
- 当 $\beta=1$，α 减到 1/2 以下，它接近维纳滤波器
- 当 $\beta=1$，$\alpha=1/2$，它被称为谱均衡滤波器