

CHAPTER 2

视觉感知要素

人视觉是由眼睛中锥状体和杆状体组成的。低照明级别杆状体起作用。在背景照明增强时锥状体起作用。

光和电磁波谱

$\lambda=\frac{c}{\nu}$ $E=h\nu$ 可见光的波长范围：约 400 700nm

$\Delta I_e/I$ 称为韦伯比

辐射强度:光源发出能量总量;光通量给出观察者从光源感受到的能量，用流明数度量;亮度是光感受的主观描绘，不能测量，描述彩色感觉参数之一；灰度级用来描述单色光图像的亮度

图像感知与获取

传感器:CCD,CMOS

简单的成像模型

$f(x,y)=i(x,y)r(x,y)$,其中 $i(x,y)$ 为入射分量(低频), $r(x,y)$ 为反射分量(高频)

其中 $0\leq f(x,y),i(x,y)<\infty$ $0\leq r(x,y)\leq 1$

$r=0$ 全吸收,1 全反射

图像取样和量化

对坐标值进行数字化称为取样,对幅度值进行数字化称为量化,原点位于图像的左上角，x 轴向下，y 轴向右

坐标索引：像二维坐标(x,y);线性索引通过计算到坐标(0, 0)的偏移量得到的,行/列扫描

空间分辨率：图像中可辨别的最小细节 灰度分辨率：灰度级中可分辨的最小变化;打印机单位距离可以分辨的最小线对数 DPI;数字图像:图像大小，即行数 x 列数 PPI

图像对比度：一幅图像中最高和最低灰度级间的灰度差为对比度。

基本的图像重取样方法：图像内插。有最近邻内插;常选用双线性(v(x, y) = ax + by + cxy + d 四个系数可用 4 个最近邻点的 4 个未知方程求出)和双三次内插。

像素间的一些基本关系

$N_4(p)$ 上下左右, $N_{D(p)}$ 四个对角, $N_8(p)=N_4(p)\cup N_{D(p)}$

值域 V，V 是 0 到 255 中的任一个子集

4 邻接:点 q 在 $N_4(p)$ 中，并 q 和 p 具有 V 中的数值

8 邻接:点 q 在 $N_8(p)$ 中，并 q 和 p 具有 V 中的数值

m 邻接(混合邻接): 1.q 在 p 的 $N_4(p)$ 或者 2.q 在 p 的 $N_{D(p)}$ 中， $N_4(P)\cap N_4(Q)$ 中没有 V 值的像素

欧氏距离(De): $D_e(p,q)=\sqrt{(x-s)^2+(y-t)^2}$ 街区距离(D4): $D_4(p,q)=|x-s|+|y-t|$

棋盘距离(D8): $D_8(p,q)=\max(|x-s|,|y-t|)$

对应元素运算和矩阵运算

图像相加：取平均降噪。相减：增强差别。相乘和相除：校正阴影。

三个基本量用于描绘彩色光源的质量：发光强度、光通量和亮度。

一幅数字图像占用的空间：M×N×k。

CHAPTER 3

基本的灰度变换

反转变换 $S=L-1-r$

对数变换 $S=c\log(1+r)$

幂律(伽马)变换 $s=cr^\gamma$ $\gamma<1$ 变亮,加强暗细节;反之变暗,加强亮细节

分段线性变换: 1.对比度拉伸,2.灰度级分层,3.比特平面分层

直方图处理

非归一化 $h(r_k)=n_k$ ， $k=0,1,2,\cdots,L-1$ n_k 是 f 中灰度为 r_k 的像素的数量 k 越大越白

归一化 $p(r_k)=\frac{h(r_k)}{MN}=\frac{n_k}{MN}$

无空间信息,不同图像可能直方图相似,同一图像切片的直方图有可加性

均衡化

产生灰度级丰富且动态范围大的图像灰度

a) 在 $0\leq r\leq L-1$ 区间内， $T(r)$ 是严格单调递增

b) 当 $0\leq r\leq L-1$ 时， $0\leq T(r)\leq L-1$ 。

变换前后的 pdf 为 $p_{r(r)},p_s(s)$

$s=T(r)=(L-1)\int_0^r p_r(w)dw$

$s_k=T(r_k)=(L-1)\sum_{j=0}^k p_r(r_j)$

映射前后的像素相对位置不变,然后部分会合并

若 $T(r)$ 严格单增且可微，有 $p_s(s)=p_r(r)|\frac{dr}{ds}|$

匹配(规定化)

输入原始图 $p_{r(r)}$ ，目标图像 $p_{z(z)}$ ，求输入 r 到输出 z 的变换公式

因为知道均衡化,把原始图像和目标图像都用均衡化的作为桥梁

连续：

$T(r)=(L-1)\int_0^r p_r(w)dw$

$G(z)=(L-1)\int_0^z p_z(\nu)d\nu$

$z=G^{-1}(s)=G^{-1}[T(r)]$

离散：

$T(r_k)=(L-1)\sum_{j=0}^k p_r(r_j)$ ， $k=0,1,2,\cdots,L-1$

$G(z_q)=(L-1)\sum_{i=0}^q p_z(z_i)$

$z_q=G^{-1}(s_k)$

局部处理

图像/图像块(全局/局部)的统计距计算

设 $p(r_i)=\frac{n_i}{n}$ ， $i=0,1,2,...,L-1$ ，则灰度级 r 相对于均值 m 的 n 阶中心矩为：

$\mu_n(r)=\sum_{i=0}^{L-1}(r_i-m)^np(r_i)$

其中， m 是 r 的均值。

$m=\sum_{i=0}^{L-1}r_ip(r_i)$

当 $n=2$ 为方差：

$\sigma^2=\mu_2(r)=\sum_{i=0}^{L-1}(r_i-m)^2p(r_i)$

空间滤波

线性空间滤波

对于大小为 $m\times n$ (行 x 列)的核， $m=2a+1$ 和 $n=2b+1$,其中 a 和 b 是非负整数。

$g(x,y)=\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)f(x+s,y+t)$

新像素是旧像素线性组合;w 是权重;核中心和原图左上角开始对齐运算,行填充 2a,列补 2b

空间相关与卷积

一维核旋转 180°相当于这个核绕相对于其轴进行翻转。二维旋转 180°等效于核关于其一个轴翻转，然后关于另一个轴翻转。

相关 $(w\star f)(x,y)=\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)f(x+s,y+t)$

大小为 $m\times n$ 的核 w 与图像 $f(x,y)$ 的卷积 $(w\star f)(x,y)$ 定义为

$(w\star f)(x,y)=\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)f(x-s,y-t)$ 等同于将核旋转 180 度后再做相关

卷积满足交换，结合，分配律;相关只满足分配律

N 输出大小，W 输入大小，P 填充大小，S 步长 F 卷积核大小

$N=\frac{(W-F+2P)}{S}+1$

两个滤波器大小为 MxM 和 NxN，卷积后的大小是 (M+N-1)x(M+N-1)

可分离滤波器核

大小为 $m\times n$ 的滤波核可表示为两个向量的积 $w=w_1w_2^T=w_1\star w_2$

一个列向量和一个行向量的积等于这两个向量的二维卷积

用可分离核执行卷积运算相对于使用不可分离核执行卷积运算的计算优势定义为 $C=\frac{MNm n}{MN(m+n)}=\frac{\frac{mn}{m+n}}{\frac{mn}{m+n}}$

可分离核条件： $rank(w)=1$

分离方法：在核中找到任何一个非零元素 a ,值为 E ；提取 a 所在的列与行，形成列向量 c 和 r ； $w_1=c$ ， $w_2^T=\frac{E}{E}$

平滑（低通）空间滤波器

降低相邻灰度的急剧过度，以减少无关节节（噪声）；核越大越模糊;平滑通过对相邻像素求和（积分）实现. 归一化确保亮度不变

$g(x,y)=\frac{\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)f(x+s,y+t)}{\sum_{s=-a}^a\sum_{t=-b}^bw(s,t)}$

盒式滤波器:每个元素相同;核越大,对越多像素做平均

高斯核函数 $w(s,t)=G(s,t)=Ke^{-\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}}$ 一般选核大小奇数接近 6σ 方差大就变宽,平滑效果更剧烈

锐化（高通）空间滤波器

凸显灰度的过渡部分，以增强图像中的细节。锐化则用相邻像素差分（导数）来实现。

一维差分 $\frac{\partial f}{\partial x}=f(x+1)-f(x)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)$

拉普拉斯算子

连续： $\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

离散： $\nabla^2 f=[f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)]-4f(x,y)$

1. 中心对称；2. 中间值的绝对值大；3. 和为零。

$g(x,y)=\frac{f(x,y)-\nabla^2 f(x,y)}{f(x,y)+\nabla^2 f(x,y)}$ ，当拉普拉斯滤波中心系数为负

$g(x,y)=\frac{f(x,y)+\nabla^2 f(x,y)}{f(x,y)+\nabla^2 f(x,y)}$ ，当拉普拉斯滤波中心系数为正

低通、高通、带阻和带通滤波器

单位冲激中心和滤波器核中心重合

低通 $lp(x,y)$ ，高通 $hp(x,y)=\delta(x,y)-lp(x,y)$

带阻 $br(x,y)=lp_1(x,y)+hp_2(x,y)$ ， $lp_1(x,y)=lp_1(x,y)+[\delta(x,y)-hp_2(x,y)]$ ，带通 $bp(x,y)=\delta(x,y)-br(x,y)=\delta(x,y)-[lp_1(x,y)+[\delta(x,y)-lp_2(x,y)]]$

CHAPTER 4

采样

冲激串采样 $s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma(x-n\Delta T)$

$\hat{f}(t)=f(t)s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-n\Delta T)$

单变量的离散傅里叶变换

DFT: $F(u)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j2\pi ux/M}$ $u=0,1,\cdots,M-1$

IDFT: $f(x)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}F(u)e^{j2\pi ux/M}$ $x=0,1,\cdots,M-1$

二变量函数的傅里叶变换

二维傅里叶变换是一维情形向两个方向的简单扩展

$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,z)e^{-j2\pi(ut+vs)}dtdz$

$f(t,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)e^{j2\pi(\mu t+vz)}dudv$

采样： $\hat{f}(t,z)=f(t,z)s_{\Delta T\Delta Z}(t,z)=\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f(t,z)\sigma(t-m\Delta T,z-n\Delta Z)$

DTF: $F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$

IDFT: $f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$

二维 DFT 和 IDFT 性质

谱 $|F(u,\nu)|=[R^2(u,\nu)+I^2(u,\nu)]^{1/2}$ ， $R=\text{Real}(F)$, $I=\text{Imag}(F)$ 相角 $\phi(u,\nu)=\arctan\left[\frac{I(u,\nu)}{R(u,\nu)}\right]$

极坐标 $F(u,\nu)=|F(u,\nu)|e^{j\phi(u,\nu)}$

周期性(k 为整数) $F(u,v)=F(u+k_1,v+k_2N)$

$f(x,y)=f(x+k_1M,y+k_2N)$

卷积 $(f\star h)(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$

相关 $(f\star h)(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f^*(m,n)h(x+m,y+n)$

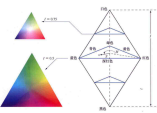
可分离性 使用 DFT 算法求 IDFT $MNf^*(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F^*(u,v)e^{-j2\pi(ux/M+\nu y/N)}$ 结果取 复共轭并除以 MN 就可得到反变换

离散单位冲激 $\delta(x,y)\Leftrightarrow 1,1\Leftrightarrow MN\delta(u,v)$

卷积定理 $(f\star h)(x,y)\Leftrightarrow (F\cdot H)(u,v)\parallel(f\cdot h)(x,y)\Leftrightarrow \frac{1}{MN}(F\star H)(u,v)$

平移性 $f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)\parallel f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+\nu y_0/N)}$

HSI
h 色调(角度),s 饱和度(鲜艳程度),i 强度(颜色的明暗程度)



RGB->HSI

$$H = 360 - \arccos\left(\frac{(R-G)+(R-B)}{2\sqrt{(R-G)^2+(R-B)(G-B)}}\right) (G < B)$$
$$H = \arccos\left(\frac{(R-G)+(R-B)}{2\sqrt{(R-G)^2+(R-B)(G-B)}}\right) (G \geq B)$$
$$S = 1 - \frac{3}{R+G+B} \cdot \min(R, G, B)$$
$$I = \frac{R+G+B}{3}$$

HSI->RGB

$$1.0^\circ \leq H < 120^\circ$$
$$R = I \cdot \left(1 + \frac{S \cdot \cos(H)}{\cos(60^\circ - H)}\right); G = I \cdot (1 + S \cdot (1 - \cos(H) / \cos(60^\circ - H))); B = I \cdot (1 - S)$$
$$2.120^\circ \leq H < 240^\circ$$
$$H' = H - 120^\circ$$
$$G = I \cdot \left(1 + \frac{S \cdot \cos(H')}{\cos(60^\circ - H')}\right); B = I \cdot (1 + S \cdot (1 - \cos(H') / \cos(60^\circ - H'))); R = I \cdot (1 - S)$$
$$3.240^\circ \leq H < 360^\circ$$
$$H' = H - 240^\circ$$
$$B = I \cdot \left(1 + \frac{S \cdot \cos(H')}{\cos(60^\circ - H')}\right); R = I \cdot (1 + S \cdot (1 - \cos(H') / \cos(60^\circ - H'))); G = I \cdot (1 - S)$$

CIELAB

$$L_* = 116 * h\left(\frac{Y}{Y_W}\right) - 16$$
$$a_* = 500 * \left[h\left(\frac{X}{X_W}\right) - h\left(\frac{Y}{Y_W}\right)\right]$$
$$b_* = 200 * \left[h\left(\frac{Y}{Y_W}\right) - h\left(\frac{Z}{Z_W}\right)\right]$$
$$h(q) = \begin{cases} q > 0.008856 \Rightarrow \left(\frac{q}{4}\right) * q^{\frac{1}{3}} \\ q \leq 0.008856 \Rightarrow 7.787 * q + \frac{16}{116} \end{cases}$$

L 表示亮度，范围从 0（黑色）到 100（白色）。a 表示从绿色到红色的轴。b 表示从蓝色到黄色的轴。h(q)是一个辅助函数，用于处理非线性变换。

假彩色
[0,L-1]灰度级别,分为 P+1 个区间, $I_1, I_2, \cdots, I_{P+1}$,属于某个区间就赋值一个彩色
若 $f(x, y) \in I_k$, 则令 $f(x, y) = c_k$
也可以设置 f_R, f_G, f_B 把灰度映射为不同通道的颜色

彩色变换
 $s_i = T_i(r_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n$
提高亮度:RGB 三个分量乘以常数 k;CMY 求线性变化 $s_i = kr_i + (1 - k), \quad i = 1, 2, 3$;CMYK 只需改变第四个分量(K) $s_i = kr_i + (1 - k), \quad i = 4$

彩色分层
突出图像中某个特定的彩色范围，有助于将目标从周围分离出来
感兴趣的颜色被宽度为 W、中心在原型(即平均)颜色并具有分量 a_j 的立方体(n>3 时为超立方体)包围，

$$s_i = \begin{cases} 0.5, & ||r_j - a_j| > W/2|_{1 \leq j \leq n} \\ r_{i1}, & \text{其他} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

用一个球体来规定感兴趣的颜色时

$$s_i = \begin{cases} 0.5, & \sum_{j=1}^n (r_j - a_j)^2 > R_0^2 \\ r_{i1}, & \text{其他} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

平滑和锐化

平滑

$$\bar{c}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{K} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} R(s, t) \\ \frac{1}{K} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} G(s, t) \\ \frac{1}{K} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} B(s, t) \end{pmatrix}$$

锐化

$$\nabla^2 c(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla^2 R(x, y) \\ \nabla^2 G(x, y) \\ \nabla^2 B(x, y) \end{pmatrix}$$

分割图像
HSI:用饱和度(S),大于某个阈值分割

RGB: 令 z 表示 RGB 空间中的任意一点,RGB 向量 a 来表示平均颜色

$$D(z, a) = |z - a|$$
$$= [(z - a)^T (z - a)]^{\frac{1}{2}}$$

欧氏距离为

$$= [(z_R - a_R)^2 + (z_G - a_G)^2 + (z_B - a_B)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$D(z, a) \leq D_0$ 的点的轨迹是半径为 D_0 的一个实心球体

马哈拉诺比斯距离 $D(z, a) = [(z - a)^T C^{-1} (z - a)]^{\frac{1}{2}}$

$D(z, a) \leq D_0$ 的点的轨迹是半径为 D_0 的一个实心三维椭球体

两个方法都计算代价也很高昂,一般用边界盒关于 a 居中，它沿各坐标轴的长度与样本沿坐标轴的标准差成比例

CHAPTER 9

二值图像形态学运算小结

运算	公式	注释
平移	$(B)_z = \{c \mid c = b + z, b \in B\}$	将B的原点平移到点z
反射	$\hat{B} = \{w \mid w = -b, b \in B\}$	相对于B的原点反射

补集	$A^c = \{w \mid w \notin A\}$	不属于A的点集
差集	$A - B = \{w \mid w \in A, w \notin B\} = A \cap B^c$	属于A但不属于B的点集
腐蚀	$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\} = \{z \mid (B)_z \cap A^c = \emptyset\}$	腐蚀A的边界(I)
膨胀	$A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$	膨胀A的边界(I)
开运算	$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$	平滑轮廓，断开狭窄区域，删除小孤岛和尖刺(I)
闭运算	$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$	平滑轮廓，弥合狭窄断裂和细长沟道，删除小孔洞(I)
击中与击中不中	$I \otimes B_{1,2} = \left\{z \mid \begin{matrix} (B_1)_z \subseteq A \\ \text{和} \\ (B_2)_z \subseteq A^c \end{matrix} \right\}$	在图像I中寻找结构元B的实例
边界提取	$\beta(A) = A - (A \ominus B)$	提取集合A的边界上的点集(I)
孔洞填充	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap I^c, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$	填充A中的孔洞， X_0 初始化为I边框(I)
连通分量	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap I, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$	寻找I中的连通分量(I)
凸壳	$X_k^i = (X_{k-1}^i \otimes B^i) \cup X_{k-1}^i, i = 1, 2, 3, 4$	计算I中前景像素的凸壳(I)
细化	$A \otimes B = A - (A \oplus B)$	细化集合A，移除多余分支(I)
粗化	$A \odot B = A \cup (A \otimes B)$	使用结构元粗化集合A(I)
骨架	$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_{k(A)}, \quad S_{k(A)} = (A \ominus k_B) - (A \ominus k_B) \circ B$	寻找集合A的骨架(I)
裁剪	$X_1 = A \otimes \{B\} \quad X_2 = \bigcup_{k=1}^8 (X_1 \otimes B^k)$ $X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A \quad X_4 = X_1 \cup X_3$	X_4 是裁剪集合A后的结果。结构元(V)用于前两个公式，H用于第三个公式(I)

大小为 1 的测地膨胀	$D_1^L(F) = (F \oplus B) \cap G$	F和G分别称为标记图像和模板图像(I)
大小为 1 的测地腐蚀	$E_{\{G\}}^1(F) = (F \odot B) \cup G$	F和G分别称为标记图像和模板图像(I)
大小为 n 的测地腐蚀	$E_{\{G\}}^n(F) = E_{\{G\}}^1(E_{\{G\}}^{n-1}(F))$	n表示重复迭代次数(I)
膨胀形态学重建	$R_G^D(F) = D_G^k(F), \quad k \leq t.$ $D_G^k(F) = D_G^{k+1}(F)$	通过迭代膨胀完成形态学重建(I)
腐蚀形态学重建	$R_G^{E(F)} = E_G^k(F), \quad k \leq t.$ $E_G^k(F) = E_G^{k+1}(F)$	通过迭代腐蚀完成形态学重建(I)
重建开运算	$O_R^n(F) = R_F^{D(F \oplus n_B)}$	$(F \odot n_B)$ 表示B对F的n次腐蚀，B的形式依赖于应用(I)
重建闭运算	$C_R^n(F) = R_F^{E(F \oplus n_B)}$	$(F \oplus n_B)$ 表示B对F的n次膨胀，B的形式依赖于应用(I)
孔洞填充	$H = \left[R_{I^c}^{D(F)}\right]^c$	H等于输入图像I，但所有孔洞均被填充(I)
边界清除	$X = I - R_I^{D(F)}$	X等于输入图像I，但删除了所有接触边界的标记(I)

灰度级形态学

灰度腐蚀 $[f \odot b](x, y) = \min_{(s, t) \in b} \{f(x + s, y + t)\}$ 非平坦 $[f \ominus b_N](x, y) = \min_{(s, t) \in b_N} \{f(x + s, y + t) - b_N(s, t)\}$

灰度膨胀 $[f \oplus b](x, y) = \max_{(s, t) \in b} \{f(x - s, y - t)\}$ 非平坦 $[f \oplus b_N](x, y) = \max_{(s, t) \in b_N} \{f(x - s, y - t) + \hat{b}_N(s, t)\}$

开运算 $f \circ b = (f \odot b) \oplus b$ 闭运算 $f \bullet b = (f \oplus b) \odot b$

形态学梯度 $g = (f \oplus b) - (f \oplus \hat{b})$

顶帽变换 $T_{hat}(f) = f - (f \circ b)$ 底帽变换 $B_{hat}(f) = (f \bullet b) - f$

CHAPTER 10

背景知识

差分: 前向 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x + 1) - f(x)$ 后向 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x) - f(x - 1)$ 中值 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$ 二阶 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = f(x + 1) - 2f(x) + f(x - 1)$

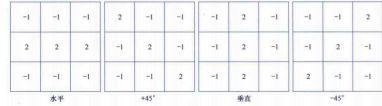
(1)一阶导产生粗边缘；(2)二阶导对精细细节(如细线、孤立点和噪声)有更强的响应；(3)二阶导在灰度斜坡和台阶过渡处会产生双边缘响应；(4)二阶导的符号可用于确定边缘的过渡是从亮到暗(正)还是从暗到亮(负)。

孤立点检测

$$\text{拉普拉斯 } \nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1) - 4f(x, y)$$

超过阈值 T 的标记 $g(x, y) = \begin{cases} 1, & |Z(x, y)| > T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \nabla^2 f = Z$

直线检测



边缘检测

$$\text{梯度 } \nabla f(x, y) \equiv \text{grad}[f(x, y)] \equiv \begin{bmatrix} g_x(x, y) \\ g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

欧几里得向量范数 $M(x, y) = \|\nabla f(x, y)\| = \sqrt{g_x^2(x, y) + g_y^2(x, y)}$ 绝对值来近似梯度幅度：

$$M(x,y)\approx |g_x|+|g_y|$$

梯度方向(垂直边缘) $\alpha(x,y)=\arctan\left[\frac{g_y(x,y)}{g_x(x,y)}\right]$

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix}$$

罗伯算子 $g_x=\frac{\partial f}{\partial x}=(z_9-z_5) \quad g_y=\frac{\partial f}{\partial y}=(z_8-z_6)$

Prewitt 算子 $g_x=\frac{\partial f}{\partial x}=(z_7+z_8+z_9)-(z_1+z_2+z_3) \quad g_y=\frac{\partial f}{\partial y}=(z_3+z_6+z_9)-(z_1+z_4+z_7)$

Sobel 算子 $g_x=\frac{\partial f}{\partial x}=(z_7+2z_8+z_9)-(z_1+2z_2+z_3) \quad g_y=\frac{\partial f}{\partial y}=(z_3+2z_6+z_9)-(z_1+2z_4+z_7)$

二维高斯函数, $G(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

高斯拉普拉斯(LogG)函数: $\nabla^2G(x,y)=\left(\frac{x^2+y^2-2\sigma^2}{\sigma^4}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

Marr-Hildreth 算法 $g(x,y)=[\nabla^2G(x,y)]\star f(x,y)=\nabla^2[G(x,y)\star f(x,y)]$ 寻找 g(x,y)的过零点来确定 f(x,y)中边缘的位置

高斯差分(DoG)来近似式的 LoG 函数 $D_G(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_1^2}}-\frac{1}{2\pi\sigma_2^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_2^2}}$

连接边缘点

满足条件则连接 $|M(s,t)-M(x,y)|\leq E\left|\alpha(s,t)-\alpha(x,y)\right|\leq A$

霍夫变换 $\rho(\theta)=x\cos\theta+y\sin\theta=R\cos(\theta-\phi)=\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta-\arctan\frac{x}{y})$

阈值处理

多分类 $g(x,y)=\begin{cases} a, & f(x,y)>T_2 \\ b,T_1<f(x,y)\leq T_2 \\ c,f(x,y)\leq T_1 \end{cases}$

基本的全局阈值化

- 1. 为全局阈值T选择一个初始估计值。
- 2. 在 $g(x,y)=\begin{cases} 1,f(x,y)>T \\ 0,f(x,y)\leq T \end{cases}$ 中用T分割图像。这将产生两组像素：由灰度值大于T的所有像素组成的G₁,由所有小于等于T的像素组成的G₂
- 3. 对 G₁ 和 G₂ 中的像素分别计算平均灰度值(均值)m₁和 m₂
- 4. 在m₁和 m₂之间计算一个新的阈值: $T=\frac{m_1+m_2}{2}$
- 5. 重复步骤 2 到步骤 4,直到连续迭代中的两个T值间的差小于某个预定义的值ΔT为止。

OSTU 方法 n_i 表示灰度级 i 的像素数, $M\ast N=\sum_{i=0}^{L-1}n_i;p_i=\frac{n_i}{MN};\sum_{i=0}^{L-1}p_i=1, \quad p_i\geq 0$

分为两类 c₁, c₂ 累计概率 $P_1(k)=\sum_{i=0}^k p_i;P_2(k)=\sum_{i=k+1}^{L-1} p_i=1-P_1(k)$ 平均灰度 $m_1(k)=\frac{P_1(k)}{P_1(k)}\sum_{i=0}^k ip_i;m_2(k)=\frac{1}{P_2(k)}\sum_{i=k+1}^{L-1} ip_i$ k 级累计灰度 $m(k)=\sum_{i=0}^k ip_i$ 整个图像平均灰度 $m_G=\sum_{i=0}^{L-1} ip_i$

约束条件 $P_1m_1+P_2m_2=m_G;P_1+P_2=1$

全局方差 $\sigma_G^2=\sum_{i=0}^{L-1}(i-m_G)^2p_i$ 类间方差 $\sigma_B^2=P_1(m_1-m_G)^2+P_2(m_2-m_G)^2=P_1P_2(m_1-m_2)^2=\frac{m_GP_1-m_1^2}{P_1(1-P_1)}$ (选择 k 最大化 σ_B²)

也可以多个阈值约束 $\sigma_B^2(k_1^*,k_2^*,\cdots,k_{K-1}^*)=\max_{0<k_1<k_2<\cdots k_{K-1}<L-1}\sigma_B^2(k_1,k_2,\cdots,k_{K-1})$

区域生长 分离 聚合

区域生长

- 1. **种子选择**: 选择一组“种子”点，这些种子点通常是具有某些特定属性的像素，如灰度或颜色范围。种子点的选择可以根据问题的性质或图像的特性来确定。
- 2. **相似性准则**: 定义一个相似性准则，用于判断邻域像素是否应被添加到当前区域。相似性准则可以基于灰度、颜色、纹理等属性。
- 3. **区域扩展**: 从种子点开始，将满足相似性准则的邻域像素逐步添加到当前区域中。这个过程会不断重复，直到没有更多的像素满足加入准则。
- 4. **连通性考虑**: 在区域生长过程中，必须考虑像素的连通性，以确保生成的区域是连通的。通常使用 8 连通或 4 连通来定义邻域。
- 5. **停止规则**: 定义一个停止规则，当没有更多的像素满足加入准则时，区域生长过程停止。
- 6. **区域标记**: 使用不同的标记（如整数或字母）来标识每个生成的区域，形成分割后的图像。

分离聚合

- 1. **初始分割**: 将图像初步划分为一组不相交的区域（如基于像素的颜色、灰度值等），形成初始区域。这些区域可以用细网格单元表示。
- 2. **分离规则**:
 - 根据定义的判别准则（如区域的均值、方差、纹理等特性），对某一特定区域 R 判断其是否满足某些属性。如果不满足，则将其细分为更小的不相交区域。
 - 例如，可以将 $Q(R)=\text{FALSE}$ 的任何区域划分为 4 个子区域。
- 3. **聚合规则**:
 - 如果满足某些逻辑条件（如两个相邻区域的属性接近，满足 $Q(R_i\cup R_j)=\text{TRUE}$ ），则将这些区域进行合并。
 - 通过不断聚合区域，减少过度分割的可能性。
- 4. **停止条件**:
 - 当区域无法进一步分割或聚合时，停止操作。
 - 最终的分割结果应满足所有区域均符合准则。
- 5. **应用示例**:
 - 结合区域的统计特性（如均值 m_R 和标准差 σ_R）和用户定义的阈值范围，可以定义规则 $Q(R)$ （例如： $\sigma_R>a$, AND, $m_R<b$ ）。

分水岭变换

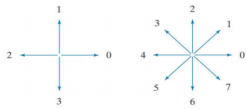
- 1. 梯度图像：，算法使用图像的梯度图像 $g(x,y)$ ，其中包含多个区域极小值 $M_{\{1\}},M_{\{2\}},M_{\{g\}}$ 。这些极小值对应于图像中的局部低谷。
- 2. 汇水盆地：每个区域极小值 $M_{\{i\}}$ 都有一个与之相关联的汇水盆地 $C(M_i)$ ，这些汇水盆地中的点形成一个连通分量。
- 3. 淹没过程：算法通过模拟水位从最小值 min 逐渐上升到最大值 max 的过程来分割图像。在每个水位 n，集合 T[n] 包含所有灰度值小于 n 的点。
- 4. 二值图像：在每个水位 n，T[n] 可以被视为一幅二值图像，其中黑点表示位于平面 $g(x,y)=n$ 下方的点。
- 5. 汇水盆地分割：随着水位上升，算法通过比较当前水位 n 的连通分量与前一水位 n-1 的汇水盆地，来确定是否需要构建水坝以防止不同汇水盆地的水流溢出。
- 6. 水坝构建：当水位上升到某个点时，如果发现有多个汇水盆地的水流可能溢出，算法会在这些汇水盆地之间构建水坝（即分割线），以防止水流混合。

缺点:受噪声影响大;容易过度分割

边界预处理

跟踪二值图像中 1 值区域 R 的边界算法:从左上角标记为 1 的点开始,按顺时针找 8 邻域中下一个 1,然后继续从下一个 1 开始执行算法,直到回到起点

弗里曼链码：基于线段的 4 连通或 8 连通，使用一种编号方案对每个线段的方向进行编码。用于表示由顺次连接的具有指定长度和方向的直线段组成的边界。



从起点开始,往哪个箭头方向走就标记哪个数字,直到回到起点;形状和链码是一一对应的;改变起点会让链码循环位移

归一化:循环位移后数字最小的链码

差分:两两相邻的做差,自己-前面一个(如果是起点则-终点);之后对 4 或者 8 取 mod

形状数(差分+归一化)：将码按一个方向循环，使其构成的自然数最小序列;形状数的阶n 定义为形状数中的数字的数量。

斜率链码：在曲线周围放置**等长**的直线段得到，其中的直线段的端点与曲线相接,直线段的斜率记录链码

最小周长多边形:使用尽量少的线段来得到给定边界的基本形状;abc 三点行列式,逆时针为正,顺时针为负,共线为 0;先找所有凸起和凹陷点,然后凹顶点需要镜像;

标记图:把**质心到边界的距离**画成**角度的函数**。将原始的二维边界简化为一维函数表示。

边界特征描述子

边界 B 的直径 diameter(B)=max_{i,j}[D(pi,pj)] 式中 D 为距离测度, pi 和 pj 是边界上的点。

长度length_m = [(x₂-x₁)² + (y₂-y₁)²]^{1/2} 方向angle_m = arctan[$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$]

曲线的曲折度定义为斜率链码链元素的绝对值之和:τ = ∑_{i=1}ⁿ |α_i|,式中的 n 是斜率链码中的元素数量, |α_i|是链码中元素的值(斜率变化)。

傅里叶描述子:二维边界可以被视为复数从而一维化表示为 s(k)=x(k)+jy(k)

边界的傅里叶描述子 $a(u)=\sum_{k=0}^{K-1}s(k)e^{-j2\pi uk/K}$
 $s(k)=\frac{1}{K}\sum_{u=0}^{K-1}a(u)e^{j2\pi uk/K}$;只采用前 P 个系数 $s(k)=\frac{1}{K}\sum_{u=0}^{P-1}a(u)e^{j2\pi uk/K}$

统计矩: 1.把 g(r)的幅度视为离散随机变量 z，形成幅度直方图 p(zi),A 是灰度值最大的区间数量。将 p 归一化，使其元素之和等于 1，那么 p(zi)是灰度值 zi 的概率估计；z 关于其平均值的 n 阶矩为 μ_n(z)=∑_{i=0}^{A-1} (z_i-m)ⁿp(z_i) m 是 z 的均值，μ₂是 z 的方差，只需要前几个矩来区分明显不同形状的标记图。

2.将 g(r)面积归一化为 1，并视为直方图，g(ri)可被视为值 ri 出现的概率。r 是随机变量 K 是边界上的点数， μ_{n(r)} 与标记图 g(r)形状直接相关
矩是 μ_n(r)=∑_{i=0}^{K-1} (r_i-m)ⁿg(r_i) 其中 $m=\sum_{i=0}^{K-1}r_ig(r_i)$

区域特征描述子

面积 A 为区域中的像素数量。周长 p 是其边界的长度;紧致度（无量纲） $\frac{p^2}{A}$;圆度（无量纲） $\frac{4\pi A}{p^2}$;有效直径 $d_e=2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$

离心率 标准椭圆 eccentricity = $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-(b/a)^2} \quad a\geq b$
任意方向椭圆(协方差矩阵的特征值) eccentricity = $\sqrt{1-(\lambda_2/\lambda_1)^2} \quad \lambda_1\geq \lambda_2$

拓朴描述子:孔洞的数量 H 和通分量 C 的数量,定义欧拉数 E = C - H
顶点数表示为 V，将边数表示为 Q，将面数表示为 F 时，V-Q+F=E

纹理:统计方法(和统计矩 1 类似),光滑度 $R=1-\frac{1}{1+\sigma^2(g)}$ σ² 是方差 μ₂ ;一致性 $U=\sum_{i=0}^{L-1}p^2(z_i)$ 熵 $p=-\sum_{i=0}^{L-1}p(z_i)\log_2p(z_i)$

共生矩阵 (KxK) 的描述子, p_{ij} 等于 G 中第 i,j 项处于 G 的元素之和

描 述 子	解 释	公 式
最大概率	度量 G 的最强响应, 值域是[0, 1]	$\max_{i,j} p_{ij}$
相关	一个像素在整个图像上与其相邻像素有多相关的测度, 值域是 [-1, -1], 1 对应于完全正相关, -1 对应于完全负相关。标准差为零时, 这个测度无定义	$\frac{\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^K(i-m_i)(j-m_j)p_{ij}}{\sigma_{\epsilon}\sigma_{\epsilon}}, \quad \sigma_{\epsilon}\neq 0, \sigma_{\epsilon}\neq 0$
对比度	一个像素在整个图像上与其相邻像素之间的灰度对比度的测度, 值域是从 0 到 (G 为常数时) 到(K-1) ²	$\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^K(i-j)^2p_{ij}$
均匀性 (也称能量)	均匀性的一个测度, 值域为[0, 1]。恒定图像的均匀性为 1	$\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^Kp_{ij}^2$
同质性	G 中对角分布的元素的空间接近度的测度, 值域是[0, 1], G 是对角阵时同质性为最大值, 即 1	$\frac{\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^Kp_{ij}}{\sum_{i=1}^K1+ \sum_{j=1}^Kp_{ij} }$
熵	G 中元素的随机性的测度。当所有 P _{ij} 均为 0 时, 熵是 0; 当 P _{ij} 均匀分布时, 熵取最大值, 因此最大值为 2log ₂ K	$-\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^Kp_{ij}\log_2p_{ij}$

极坐标下的频谱函数 $S(r)=\sum_{\theta=0}^{\pi}S_{\theta}(r) \quad S(\theta)=\sum_{r=1}^{R_0}S_r(\theta)$

矩不变量:大小为 MxN 的数字图像 f(x,y)的二维(p+q)阶矩为 $m_{pq}=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}x^py^qf(x,y)$;
(p+q)阶中心矩为 $\mu_{pq}=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(x-\bar{x})^p(y-\bar{y})^qf(x,y) \quad \bar{x}=\frac{m_{10}}{m_{00}}, \quad \bar{y}=\frac{m_{01}}{m_{00}}$

归一化(p+q)阶中心矩为 $\eta_{pq}=\frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{(p+q)/2+1}}$

主成分描述子

x 是 n 维列向量,总体平均向量 $m_x=E(x)$,向量总体的协方差矩阵(nxn) $C_x=E\{(x-m_x)(x-m_x)^T\}$

霍特林变换:令 A 是一个矩阵，这个矩阵的各行由 Cx 的特征向量构成; $y=A(x-m_x)$