

BG math

高斯积分

∫

−
∞

+
∞

e

−

x

2

d
x
=

√
π

{\displaystyle \int _{-\infty }^{+\infty }e^{-x^{2}}dx={\sqrt {\pi }}}

傅里叶级数

f
(
t
)
=

∑

n
=
−
∞

∞

c
(
n
)

e

j

2
π
n
t

c
(
n
)
=

1

T

∫

−
T

/

2

T

/

2

f
(
t
)

e

−
j

2
π
n
t

d
t

{\displaystyle f(t)=\sum _{n=-\infty }^{\infty }c(n)e^{j2\pi nt}c(n)={\frac {1}{T}}\int _{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-j2\pi nt}dt}

傅里叶变换

f
(
t
)
=

∫

−
∞

∞

F
(
μ
)

e

j
2
π
μ
t

d
μ

F
(
μ
)
=

∫

−
∞

∞

f
(
t
)

e

−
j
2
π
μ
t

d
t

{\displaystyle f(t)=\int _{-\infty }^{\infty }F(\mu)e^{j2\pi \mu t}d\mu \quad F(\mu)=\int _{-\infty }^{\infty }f(t)e^{-j2\pi \mu t}dt}

Chapter 2

视觉感知要素

人视觉是由眼睛中锥状体和杆状体组成的。低照明级别杆状体起作用。在背景照明增强时锥状体起作用。

光和电磁波谱

λ= c/ν E= hν 可见光的波长范围：约 400 700nm

Δ*I_v*/*I* 称为韦伯比

辐射强度:光源流出能量总量;光通量给出观察者从光源感受到的能量，用流明数量度;亮度是光感受的主观描绘，不能测量，描述彩色感觉参数之一；灰度级用来描述单色光图像的亮度

图像感知与获取

传感器:CCD,CMOS

简单的成像模型

f(*x*,*y*) = *i*(*x*,*y*)*r*(*x*,*y*),其中*i*(*x*,*y*)为入射分量(低频)，*r*(*x*,*y*)为反射分量(高频)

其中0 ≤ *f*(*x*,*y*),*i*(*x*,*y*) < ∞ 0 ≤ *r*(*x*,*y*) ≤ 1

r=0 全吸收,1 全反射

图像取样和量化

对坐标值进行数字化称为取样,对幅度值进行数字化称为量化,原点位于图像的左上角，x 轴向下，y 轴向右

坐标索引：像二维坐标(*x*,*y*);线性索引通过计算到坐标(0, 0)的偏移量得到的,行/列扫描

空间分辨率：图像中可辨别的最小细节 灰度分辨率：灰度级中可分辨的最小变化;打印机单位距离可以分辨的最小线对数 DPI;数字图像:图像大小，即行数 x 列数 PPI

图像对比度：一幅图像中最高和最低灰度级间的灰度差为对比度。

基本的图像重取样方法：图像内插。有最近邻内插;常选用双线性(v(x, y)= ax + by + cxy + d 四个系数可用 4 个最近邻点的 4 个未知方程求出)和双三次内插。

像素间的一些基本关系

N_i(*p*)上下左右,*N_D*(*p*)四个对角,*N_S*(*p*) = *N_i*(*p*) ∪ *N_D*(*p*)

值域 V，V 是 0 到 255 中的任一子集

4 邻接:点 q 在*N_i*(*p*)中，并 q 和 p 具有 V 中的数值 8 邻接:点 q 在*N_S*(*p*)中，并 q 和 p 具有 V 中的数值 m 邻接(混合邻接): 1.q 在 p 的*N_i*(*p*) 或者 2.q 在 p 的*N_D*(*p*)中， N₄(*P*) ∩ *N₄*(*Q*)中没有 V 值的像素

欧氏距离(Dc): *D_c*(*p*,*q*) = √(*x* − *s*)² + (*y* − *t*)² 街区距离(D4): *D₄*(*p*,*q*) = |*x* − *s*| + |*y* − *t*|

棋盘距离(D8): *D₈*(*p*,*q*) = max(|*x* − *s*|, |*y* − *t*|)

对应元素运算和矩阵运算

图像相加：取平均降噪。相减：增强差别。相乘和相除：校正阴影。

三个基本量用于描绘彩色光源的质量：发光强度、光通量和亮度。

一幅数字图像占用的空间：M×N×k。

Chapter 3

基本的灰度变换

反转变换*S* = *L* − 1 − *r*

对数变换*S* = c log(1 + *r*)

幂律(伽马)变换*s* = *c* *r*^γ γ < 1 变亮,加强暗细节;反之变暗,加强亮细节

分段线性变换: 1.对比度拉伸,2.灰度级分层,3.比特平面分层

直方图处理

非归一化*h*(*r_k*) = *n_k*, k = 0, 1, 2, ..., *L* − 1 *n_k*是*f*中灰度为*r_k*的像素的数量

归一化*p*(*r_k*) =

h
(

r

k

)

M
N

=

n

k

M
N

{\displaystyle p(r_{k})={\frac {h(r_{k})}{MN}}={\frac {n_{k}}{MN}}}

无空间信息,不同图像可能直方图相似,同一图像切片的直方图有可加性

均衡化

产生灰度级丰富且动态范围大的图像灰度

a) 在0 ≤ *r* ≤ *L* − 1区间内，*T*(*r*)是严格单调递增

b) 当0 ≤ *r* ≤ *L* − 1时，0 ≤ *T*(*r*) ≤ *L* − 1。

变换前后的 pdf 为*p_r*(*r*),*p_s*(*s*)

s = *T*(*r*) = (*L* − 1) ∫₀^{*r*} *p_r*(*w*)*dw*

s_k = *T*(*r_k*) = (*L* − 1) ∑_{*j*=0}^{*k*} *p_r*(*r_j*)

映射前后的像素相对位置不变,然后部分会合并

若*T*(*r*)严格单增且可微，有*p_s*(*s*) = *p_r*(*r*)|

d
r

d
s

{\displaystyle {\frac {dr}{ds}}}

匹配(规定化)

输入原始图*p_r*(*r*)，目标图像*p_s*(*s*)，求输入*r*到输出*z*的变换公式

因为知道均衡化,把原始图像和目标图像都用均衡化的作为桥梁

连续：

T(*r*) = (*L* − 1) ∫₀^{*r*} *p_r*(*w*)*dw*

G(*z*) = (*L* − 1) ∫₀^{*z*} *p_r*(*ν*) *dν*

z = *G*^{−1}(*s*) = *G*^{−1}[*T*(*r*)]

离散：

T(*r_k*) = (*L* − 1) ∑_{*j*=0}^{*k*} *p_r*(*r_j*), k = 0, 1, 2, ..., *L* − 1

G(*z_q*) = (*L* − 1) ∑_{*i*=0}^{*q*} *p_s*(*z_i*)

z_q = *G*^{−1}(*s_k*)

局部处理

图像/图像块(全局/局部)的统计距计算

设*p*(*r_i*) =

n

i

n

{\displaystyle p(r_{i})={\frac {n_{i}}{n}}}

, i = 0, 1, 2, ..., *L* − 1，则灰度级*r*相对于均值 m 的*n*阶中心矩为：

μ_{*n*}(*r*) = ∑_{*i*=0}^{*L*−1} (*r_i* − *m*)^{*n*}*p*(*r_i*)

其中，m 是 **r** 的均值。

m = ∑_{*i*=0}^{*L*−1} *r_i**p*(*r_i*)

当 n=2 为方差：

σ² = μ₂(*r*) = ∑_{*i*=0}^{*L*−1} (*r_i* − *m*)²*p*(*r_i*)

空间滤波

线性空间滤波

对于大小为 m×n(行 x 列)的核，m=2a+1 和 n=2b+1,其中 a 和 b 是非负整数。

g(*x*,*y*) = ∑_{*s*=−*a*}^{*a*} ∑_{*t*=−*b*}^{*b*} *w*(*s*,*t*)*f*(*x* + *s*,*y* + *t*)

新像素是旧像素线性组合;*w* 是权重;核中心和原图左上角开始对齐运算,行填充 2a,列补 2b

空间相关与卷积

一维核旋转 180°相当于这个核绕相对于其轴进行翻转。二维旋转 180°等效于核关于其一个轴翻转，然后关于另一个轴翻转。

相关(*w* ∗ *f*)(*x*,*y*) = ∑_{*s*=−*a*}^{*a*} ∑_{*t*=−*b*}^{*b*} *w*(*s*,*t*)*f*(*x* + *s*,*y* + *t*)

大小为 *m* × *n* 的核*w*与图像*f*(*x*,*y*)的卷积(*w* ∗ *f*)(*x*,*y*) 定义为

(*w* ∗ *f*)(*x*,*y*) = ∑_{*s*=−*a*}^{*a*} ∑_{*t*=−*b*}^{*b*} *w*(*s*,*t*)*f*(*x* − *s*,*y* − *t*) 等同于将核旋转 180 度后再做相关

卷积满足交换，结合，分配律;相关只满足分配律

N 输出大小，W 输入大小，P 填充大小，S 步长 F 卷积核大小

N = (*W*−*F*+2*P*)/*S* + 1

两个滤波器大小为 MxM 和 NxN，卷积后的大小是(M+N)x(M+N-1)

可分离滤波器核

大小为 *m* × *n* 的滤波核可表示为两个向量的积 *w* = *w₁* *w₂*^{*T*} = *w₁* ∗ *w₂*

一个列向量和一个行向量的积等于这两个向量的二维卷积

用可分离核执行卷积运算相对于使用不可分离核执行卷积运算的计算优势定义为*C* =

M
N
m
n

M
N
(
m
+
n
)

=

m
n

m
+
n

{\displaystyle C={\frac {MNmn}{MN(m+n)}}={\frac {mn}{m+n}}}

可分离核条件：*rank*(*w*) = 1

分离方法：在核中找到任何一个非零元素*a*,值为*E*；提取*a*所在的列与行，形成列向量*c*和*r*_{*i*}；*w₁* = *c*, *w₂*^{*T*} =

r

E

{\displaystyle w_{2}^{T}={\frac {r}{E}}}

平滑（低通）空间滤波器

降低相邻灰度的急剧过度，以减少无关节节（噪声）；核越大越模糊;平滑通过对相邻像素求和（积分）实现. 归一化确保亮度不变

g
(
x
,
y
)
=

∑

a
=
−
a

b

w
(
s
,
t
)
f
(
x
+
s
,
y
+
t
)

∑

a
=
−
a

b

w
(
s
,
t
)

{\displaystyle g(x,y)={\frac {\sum _{s=-a}^{b}w(s,t)f(x+s,y+t)}{\sum _{s=-a}^{b}\sum _{t=-b}^{b}w(s,t)}}}

盒式滤波器:每个元素相同;核越大,对越多像素做平均

高斯核函数 *w*(*s*,*t*) = *G*(*s*,*t*) = *K* *e*<sup>−

s

2

+

t

2

2
σ

2

{\displaystyle -{\frac {s^{2}+t^{2}}{2\sigma ^{2}}}}</sup> 一般选核大小奇数接近6σ 方差大就变宽,平滑效果更剧烈

锐化（高通）空间滤波器

凸显灰度的过渡部分，以增强图像中的细节。锐化则用相邻像素差分（导数）来实现.

一维差分

∂
f

∂
x

=
f
(
x
+
1
)
−
f
(
x
)

∂

2

f

∂

x

2

=
f
(
x
+
1
)
+
f
(
x
−
1
)
−
2
f
(
x
)

{\displaystyle {\frac {\partial f}{\partial x}}=f(x+1)-f(x){\frac {\partial ^{2}f}{\partial x^{2}}}=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)}

拉普拉斯算子

连续：

∇

2

f
=

∂

2

f

∂

x

2

+

∂

2

f

∂

y

2

{\displaystyle \nabla ^{2}f={\frac {\partial ^{2}f}{\partial x^{2}}}+{\frac {\partial ^{2}f}{\partial y^{2}}}}

离散：

∇

2

f
=
[
f
(
x
+
1
,
y
)
+
f
(
x
−
1
,
y
)
+
f
(
x
,
y
+
1
)
+
f
(
x
,
y
−
1
)
]
−
4
f
(
x
,
y
)

{\displaystyle \nabla ^{2}f=[f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)]-4f(x,y)}

1. 中心对称；2. 中间值的绝对值大； 3. 和为零。

g(*x*,*y*) =

f
(
x
,
y
)
−

∇

2

f
(
x
,
y
)

,
当拉普拉斯滤波中心系数为负

f
(
x
,
y
)
+

∇

2

f
(
x
,
y
)

,
当拉普拉斯滤波中心系数为正

{\displaystyle g(x,y)={\frac {f(x,y)-\nabla ^{2}f(x,y)}{2}},当拉普拉斯滤波中心系数为负f(x,y)+\nabla ^{2}f(x,y),当拉普拉斯滤波中心系数为正}

低通、高通、带阻和带通滤波器

单位冲激中心和滤波器核中心重合

低通 *lp*(*x*,*y*)，高通 *hp*(*x*,*y*) = δ(*x*,*y*) − *lp*(*x*,*y*)

带阻 *br*(*x*,*y*) = *lp*₁(*x*,*y*) + *hp*₂(*x*,*y*) = *lp*₁(*x*,*y*) + [δ(*x*,*y*) − *hp*₂(*x*,*y*)], 带通 *bp*(*x*,*y*) = δ(*x*,*y*) − *br*(*x*,*y*) = δ(*x*,*y*) − [*lp*₁(*x*,*y*) + [δ(*x*,*y*) − *lp*₂(*x*,*y*)]]

Chapter 4

采样

冲激串采样

s

Δ
T

(
t
)
=

∑

n
=
−
∞

∞

σ
(
x
−
n
Δ
T
)

{\displaystyle s_{\Delta T}(t)=\sum _{n=-\infty }^{\infty }\sigma (x-n\Delta T)}

f
˜
(
t
)
=
f
(
t
)

s

Δ
T

(
t
)
=

∑

n
=
−
∞

∞

f
(
t
)
δ
(
t
−
n
Δ
T
)

{\displaystyle {\tilde {f}}(t)=f(t)s_{\Delta T}(t)=\sum _{n=-\infty }^{\infty }f(t)\delta (t-n\Delta T)}

单变量的离散傅里叶变换

DFT:

F
(
u
)
=

∑

x
=
0

M
−
1

f
(
x
)

e

−
j
2
π
u
x

/

M

u
=
0
,
1
,
⋯
,
M
−
1

{\displaystyle F(u)=\sum _{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j2\pi ux/M}\quad u=0,1,\cdots ,M-1}

IDFT:

f
(
x
)
=

1

M

∑

u
=
0

M
−
1

F
(
u
)

e

j
2
π
u
x

/

M

x
=
0
,
1
,
⋯
,
M
−
1

{\displaystyle f(x)={\frac {1}{M}}\sum _{u=0}^{M-1}F(u)e^{j2\pi ux/M}\quad x=0,1,\cdots ,M-1}

二变量函数的傅里叶变换

二维傅里叶变换是一维情 形向两个方向的简单扩展

F
(
u
,
v
)
=

∫

−
∞

+
∞

∫

−
∞

+
∞

f
(
t
,
z
)

e

−
j
2
π
(
u
t
+
v
z
)

d
t
d
z

{\displaystyle F(u,v)=\int _{-\infty }^{+\infty }\int _{-\infty }^{+\infty }f(t,z)e^{-j2\pi (ut+vz)}dtdz}

f
(
t
,
z
)
=

∫

−
∞

+
∞

∫

−
∞

+
∞

F
(
u
,
v
)

e

j
2
π
(
u
t
+
v
z
)

d
u
d
v

{\displaystyle f(t,z)=\int _{-\infty }^{+\infty }\int _{-\infty }^{+\infty }F(u,v)e^{j2\pi (ut+vz)}dudv}

采样：

f
˜
(
t
,
z
)
=
f
(
t
,
z
)

s

Δ
T
Δ
Z

(
t
,
z
)
=

∑

m
=
−
∞

∞

∑

n
=
−
∞

∞

f
(
t
,
z
)
σ
(
t
−
m
Δ
T
,
z
−
n
Δ
Z
)

{\displaystyle {\tilde {f}}(t,z)=f(t,z)s_{\Delta T\Delta Z}(t,z)=\sum _{m=-\infty }^{m=\infty }\sum _{n=-\infty }^{n=\infty }f(t,z)\sigma (t-m\Delta T,z-n\Delta Z)}

DTF:

F
(
u
,
v
)
=

∑

x
=
0

M
−
1

∑

y
=
0

N
−
1

f
(
x
,
y
)

e

−
j
2
π
(
u
x
/
M
+
v
y
/
N
)

{\displaystyle F(u,v)=\sum _{x=0}^{M-1}\sum _{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi (ux/M+vy/N)}}

IDFT:

f
(
x
,
y
)
=

1

M
N

∑

u
=
0

M
−
1

∑

v
=
0

N
−
1

F
(
u
,
v
)

e

j
2
π
(
u
x
/
M
+
v
y
/
N
)

{\displaystyle f(x,y)={\frac {1}{MN}}\sum _{u=0}^{M-1}\sum _{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi (ux/M+vy/N)}}

二维 DFT 和 IDFT 性质

谱

|
F
(
u
,
ν
)
|
=
[

R

2

(
u
,
ν
)
+

I

2

(
u
,
ν
)

]

1

/

2

,

R
=
R
e
a
l
(
F
)
,
I
=
I
m
a
g
(
F
)

相
角

ϕ
(
u
,
ν
)
=
a
r
c
t
a
n
⁡

[

I
(
u
,
ν
)

R
(
u
,
ν
)

]

{\displaystyle |F(u,\nu)|=[R^{2}(u,\nu)+I^{2}(u,\nu)]^{1/2},\quad R=\mathrm {Real} (F),I=\mathrm {Imag} (F)\quad 相角\phi (u,\nu)=\arctan \left[{\frac {I(u,\nu)}{R(u,\nu)}}\right]}

极坐标 *F*(*u*,*ν*) = |*F*(*u*,*ν*)|*e*^{*jϕ*(*u*,*ν*)}

周期性(*k* 为整数) *F*(*u*,*v*) = *F*(*u* + *k₁*,*v* + *k₂**N*)

f(*x*,*y*) = *f*(*x* + *k₁**M*,*y* + *k₂**N*

$$H(u,v)=\begin{cases}1,&D(u,v)\leq D_0\\0,&D(u,v)>D_0\end{cases}$$

$$D(u,v)=[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]$$

$$总功率P_T=\sum_{u=0}^{P-1}\sum_{v=0}^{Q-1}P(u,v)=\sum_{u=0}^{P-1}\sum_{v=0}^{Q-1}|F(u,v)|^2$$

$$在D(u,v)内的功率占比\alpha=100\sum_u\sum_vP(u,v)/P_T\quad where\quad D(u,v)\leq D_0$$

$$巴特沃斯H(u,v)=\frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}}\quad D(u,v)=[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]^{1/2}$$

$$高斯H(u,v)=e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

高通滤波器

$$普通锐化:H_{hp}(u,v)=1-H_p(u,v)$$

$$理想:H(u,v)=\begin{cases}0,&D(u,v)\leq D_0\\1,&D(u,v)>D_0\end{cases}$$

$$巴特沃斯:H(u,v)=\frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

$$高斯:H(u,v)=1-e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

$$频率域的拉普拉斯算子:H(u,v)=-\left[{\left(u-\frac{M}{2}\right)}^2+{\left(v-\frac{N}{2}\right)}^2\right]$$

$$高提升滤波:H_hb(u,v)=(A-1)+H_{hp}(u,v)$$

$$高频加强滤波:H_{hfe}(u,v)=a+bH_{hp}(u,v)$$

$$同态滤波器H(u,v)=(\gamma_H-\gamma_L)\Big[1-e^{-c(D^2(u,v)/D_0^2)}\Big]+\gamma_L$$

$$其中\gamma_L<1且\gamma_H>1,c用于控制滤波器函数斜面的锐化$$

快速傅里叶变换

基本思想：利用傅里叶变换基底性质，将M个数据的傅里叶变换转为为2组 $\frac{M}{2}$ 个数据的傅里叶变换，此时计算量从M^2降低为 $\frac{M^2}{2}$

$$F(u)=\sum_{x=0}^{K-1}f(2x)W_{2K}^{u(2x)}+\sum_{x=0}^{K-1}f(2x+1)W_{2K}^{u(2x+1)}\quad 偶数部分+奇数部分$$

$$W_M=e^{-j2\pi/M},\quad W_{2K}^{2ux}=W_K^{ux}$$

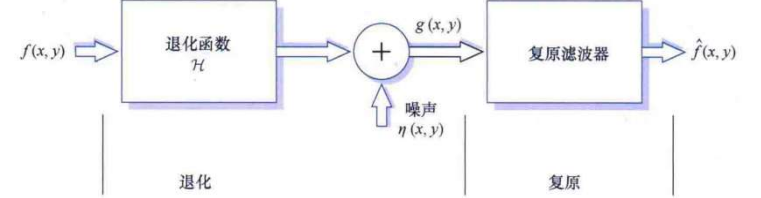
$$F_{even}(u)=\sum_{x=0}^{K-1}f(2x)W_K^{ux}\quad F_{odd}(u)=\sum_{x=0}^{K-1}f(2x+1)W_K^{ux}$$

$$F(u)=F_{even}(u)+F_{odd}(u)W_{2K}^u$$

$$F(u+K)=F_{even}(u)-F_{odd}(u)W_{2K}^u$$

Chapter 5

图像退化/复原模型



$$空域:g(x,y)=(h\star f)(x,y)+\eta(x,y)$$

$$频域:G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$$

噪声模型

$$高斯p(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2}$$

$$瑞利p(z)=\frac{z}{\sigma^2}(z-\sigma)e^{-(z-\sigma)^2-\frac{z}{\sigma}}\quad ,z\geq\sigma\quad ||\bar{z}=a+\sqrt{\pi b/4},\sigma^2=\frac{b(4-\pi)}{4}$$

$$伽马p(z)=\frac{1}{\gamma}z^{\gamma-1}e^{-z-\gamma}$$

$$指数p(z)=\frac{a^b e^{b-1}}{(b-1)!}e^{-ax}\quad ,z\geq 0\quad ||\bar{z}=\frac{1}{a},\sigma^2=\frac{1}{a^2}$$

$$均匀p(z)=\frac{1}{b-a}\quad ,a\leq z\leq b\quad ||\bar{z}=\frac{a+b}{2},\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$椒盐p(z)=\begin{cases}P_s& ,z=2^{b-1}\\P_p& ,z=0\\1-(P_s+P_p)& ,z=V\end{cases}$$

$$参数估计\mu=\sum_{z_i\in S}z_ip(z_i)\quad \sigma^2=\sum_{z_i\in S}(z_i-\mu)^2p(z_i)$$

只存在噪声的复原——空间滤波

$$加性噪声退化后:g(x,y)=f(x,y)+\eta(x,y)\quad G(u,v)=F(u,v)+N(u,v)\quad (噪声未知)$$

算术平均滤波

$$\hat{f}(x,y)=\frac{1}{mn}\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)$$

S表示中心在(x,y)，尺寸为mxn的图像;平滑了一幅图像的局部变化;在模糊了结果的同时减少了噪声

几何平均滤波

$$\hat{f}(x,y)=\left[\prod_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)\right]^{\frac{1}{mn}}\quad 平滑度可以与算术均值滤波器相比;图像细节丢失更少$$

谐波平均滤波

$$\hat{f}(x,y)=\frac{mn}{\sum_{(r,c)\in S_{xy}}\frac{1}{g(r,c)}}$$

对于“盐粒”效果好，不适用于“胡椒”;善于处理像高斯噪声的噪声

反谐波平均

$$\hat{f}(x,y)=\frac{\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)^Q}$$

Q称为滤波器的阶数,>0用于胡椒,<0用于盐粒,=0变为算数平均,=-1变为谐波平均

中值滤波

$$\hat{f}(x,y)=median\{(r,c)\in S_{xy}\}\{g(r,c)\}$$

与大小相同的线性平滑滤波相比，有效地降低某些随机噪声，且模糊度要小得多;对于单极和双极冲激噪声效果好。

统计排序

$$最大值\hat{f}(x,y)=\max_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)\quad 发现最亮点,过滤胡椒$$

$$最小值\hat{f}(x,y)=\min_{(r,c)\in S_{xy}}g(r,c)\quad 发现最暗点,过滤盐粒$$

$$中点\hat{f}(x,y)=\frac{1}{2}[\max_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}+\min_{(r,c)\in S_{xy}}\{g(r,c)\}]适合处理随机分布的噪声，如高斯噪声和均匀噪声$$

修正后的阿尔法均值滤波

$$\hat{f}(x,y)=\frac{1}{mn-d}\sum_{(r,c)\in S_{xy}}g_R(r,c)$$

在S邻域内去掉g(r,c)最高灰度值的d/2和最低灰度值的 d/2。代表剩余的mn-d个像素 d=0变为算数平均,=mn-1变为中值

自适应

$$g(x,y)表示噪声图像在点(x,y)上的值$$

$$\sigma_1^2噪声方差$$

$$\overline{s}_{S_{xy}}在S_{xy}上像素点的局部平均灰度$$

$$\sigma_{S_{xy}}^2在S_{xy}上像素点的局部方差$$

局部降噪

$$\hat{f}(x,y)=g(x,y)-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{S_{xy}}^2}[g(x,y)-\overline{s}_{S_{xy}}]$$

中值

z_{min} 是 $S_{\{xy\}}$ 中的最小灰度值; z_{max} 是 $S_{\{xy\}}$ 中的最大灰度值; z_{med} 是 $S_{\{xy\}}$ 中的灰度值的中值; $z_{\{xy\}}$ 是坐标(x,y)处的灰度值; S_{max} 是 $S_{\{xy\}}$ 允许的最大尺寸。

层次 A: 若 $z_{min}<z_{med}<z_{max}$,则转到层次B

否则，增 $S_{\{xy\}}$ 的尺寸，

若 $S_{\{xy\}}l=S_{max}$,则重复层次 A

否则，输出 z_{med}

层次 B: 若 $z_{min}<z_{\{xy\}}<z_{max}$,则输出 $z_{\{xy\}}$

否则，输出 z_{med}

使用频率域滤波降低周期噪声

陷波滤波器

$$H_{NR}(u,\nu)=\prod_{k=1}^QH_k(u,\nu)H_{-k}(u,\nu)$$

最优陷波滤波器

陷波带通滤波器 H

$$N(u,\nu)=H_{NP}(u,\nu)G(u,\nu)$$

$$\eta(x,y)=\mathfrak{T}^{-1}\{H_{\text{NP}}(u,\nu)G(u,\nu)\}$$

$$\hat{f}(x,y)=g(x,y)-w(x,y)\eta(x,y)$$

计算 w(x,y)

$$w(x,y)=\frac{\overline{gg}-\overline{g\eta}}{\overline{\eta\eta}-\overline{\eta g}}$$

线性位置不变退化

如果退化模型为线性和位置不变的

$$g(x,y)=(h\star f)(x,y)+cta(x,y)$$

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$$

估计退化函数

观察法 收集图像自身的信息

试验法 使用与获取退化图像的设备相似的装置

数学建模法 建立退化模型，模型要把引起退化的环境因素考虑在内

逆滤波

$$\hat{F}(u,v)=\frac{G(u,v)}{H(u,v)}=F(u,v)+\frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

最小均方误差（维纳）滤波

$$\hat{F}(u,v)=\left[\frac{H(u,v)^2}{H(u,v)[H(u,v)]^2+S_g(u,v)/S_f(u,v)}\right]G(u,v)\quad \{F\}(u,v)为退化图像的估计的傅里叶变换;$$

$G(u,v)$ 为退化图像傅里叶变换;

$H(u,v)$ 为退化传递函数;

$H^*(u,v)=H(u,v)$ 为其复共轭;

$S_{f(u,v)}=|F(u,v)|^2$ 为未退化函数功率;

$S_g(u,v)=|N(u,v)|^2$ 为噪声功率谱;

$$信噪比频域SNR=\frac{\sum\limits_{u=0}^{M-1}\sum\limits_{v=0}^{N-1}\sum\limits_{u=0}^{N-1}\sum\limits_{v=0}^{M-1}|F(u,v)|^2}{\sum\limits_{u=0}^{M-1}\sum\limits_{v=0}^{N-1}\sum\limits_{u=0}^{N-1}\sum\limits_{v=0}^{M-1}|N(u,v)|^2}\quad 空域SNR=\frac{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\hat{f}(x,y)^2/\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}[f(x,y)-\hat{f}(x,y)]^2}$$

$$均方误差MSE=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x,y)-\hat{f}(x,y)\right]^2$$

约束最小二乘方滤波

$$约束|g-H\hat{f}|^2=|\eta|^2$$

$$准则函数最小化C=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[\nabla^2f(x,y)\right]^2$$

$$最佳问题的解\hat{F}(u,v)=\left[\frac{H^*(u,v)}{H(u,v)^2+\gamma|F(u,v)|^2}\right]G(u,v)\quad 当\gamma=0时,退变成逆滤波$$

几何均值滤波

$$\hat{F}(u,v)=\left[\frac{H^*(u,v)}{[H(u,v)]^2}\right]^{\alpha}\left[\frac{H^*(u,v)}{H(u,v)^2+\beta\left[\frac{S_g(u,v)}{S_f(u,v)}\right]}\right]^{1-\alpha}$$

当 $\alpha=0$ 时,滤波器退化为逆滤波器。当 $\alpha=0$ 时,滤波器退化为参数维纳滤波器。当 $\alpha=0,\beta=1$ 时,滤波器退化为标准维纳滤波器。当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,滤波器为几何均值滤波器。当 $\beta=1,\alpha$ 减到 $\frac{1}{2}$ 以上,它接近逆滤波器,当 $\beta=1,\alpha$ 减到 $\frac{1}{2}$ 以下,它接近维纳滤波器。当 $\beta=1,\alpha=\frac{1}{2}$ 时,它被称为谐波均值滤波器。