

Chapter 2

1. 人的视觉是由眼睛中两部分光接收器(感觉细胞)组成的：锥状体和杆状体。
2. 在低的照明级别，亮度辨别较差(杆状体起作用)。在背景照明增强时，亮度辨别得到明显的改善(锥状体起作用)。
3. $\Delta I_e/I$ 称为韦伯比。
4. 波长 = 光速 / 频率, $E = h\nu$ 。
5. $f(x, y) = i(x, y) r(x, y)$, 入射分量(低频)和反射分量(高频), 入射 0-o, 反射 0-1(全吸收和全反射)。
6. 图像对比度：一幅图像中最高和最低灰度级间的灰度差为对比度。
7. 空间分辨率：图像中可辨别的最小细节的度量。
8. dpi: 每英寸点数。
9. 灰度分辨率：灰度级中可分辨的最小变化。
10. 基本的图像重取样方法：图像内插。人们常选用双线性($v(x, y) = ax + by + cxy + d$)和双三次内插。
11. m 邻接(混合邻接): 若 q 在 p 的 4 邻域中，或 q 在 p 的对角邻域中，且 p 的 4 邻域和 q 的 4 邻域的交集中没有来自 V 中数值的像素，则具有 V 中数值的两个像素 p 和 q 是 m 邻接的。
12. 欧氏距离(De): $D_e(p, q) = \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}$
街区距离(D4): $D_4(p, q) = |x-s| + |y-t|$
棋盘距离(D8): $D_8(p, q) = \max(|x-s|, |y-t|)$
13. 图像相加：取平均降噪。相减：增强差别。相乘和相除：校正阴影。
14. 三个基本量用于描绘彩色光源的质量：发光强度、光通量和亮度。
15. 一幅数字图像占用的空间： $M \times N \times k$ 。

Chapter 3

基本的灰度变换

反转变换 $S = L - 1 - r$

对数变换 $S = c \log(1 + r)$

幂律(伽马)变换 $s = cr^\gamma$

分段线性变换: 1.对比度拉伸,2.灰度级分层,3.比特平面分层

直方图处理

f 的非归一化直方图 $h(r_k) = n_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1$ n_k 是 f 中灰度为 r_k 的像素的数量

f 的归一化直方图 $p(r_k) = \frac{h(r_k)}{MN} = \frac{n_k}{MN}$

均衡化

使图像产生灰度级丰富且动态范围大的图像灰度

$$s = T(r), 0 \leq r \leq L-1$$

假设函数 $T(r)$ 满足下列条件：

a) 在 $0 \leq r \leq L-1$ 区间内， $T(r)$ 是严格单调递增

b) 当 $0 \leq r \leq L-1$ 时， $0 \leq T(r) \leq L-1$ 。

变换前后的 pdf 为 $p_{r(r)}, p_{s(s)}$

若 $T(r)$ 严格单增且可微，有 $p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right|$

匹配(规定化)

输入原始图 $p_{r(r)}$ ，目标图像 $p_{z(z)}$ ，求输入 r 到输出 z 的变换公式

连续：

$$T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw$$

$$G(z) = (L-1) \int_0^z p_z(\nu) d\nu$$

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)]$$

离散：

$$T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j), \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

$$G(z_q) = (L-1) \sum_{i=0}^q p_z(z_i)$$

$$z_q = G^{-1}(s_k)$$

局部处理

图像/图像块(全局/局部)的统计距计算

设 $p(r_i) = \frac{n_i}{n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, L-1$, 则灰度级 r 相对于均值 m 的 n 阶中心矩为:

$$\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^n p(r_i)$$

其中, m 是 r 的均值。

$$m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$$

当 $n=2$ 为方差:

$$\sigma^2 = \mu_2(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^2 p(r_i)$$

空间滤波

线性空间滤波

对于大小为 $m \times n$ 的核, 假设 $m=2a+1$ 和 $n=2b+1$, 其中 a 和 b 是非负整数。

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

空间相关与卷积

一维核旋转 180° 相当于这个核绕相对于其轴进行翻转。 在二维情况下, 旋转 180° 等效于核关于其一个轴翻转, 然后关于另一个轴翻转。 +

$$\text{相关}(w \star f)(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$

大小为 $m \times n$ 的核 w 与图像 $f(x, y)$ 的卷积 $(w \star f)(x, y)$ 定义为

$$(w \star f)(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x - s, y - t) \text{ 等同于将核旋转 } 180^\circ \text{ 后再做相关}$$

满足交换, 结合, 分配律。

可分离滤波器核

大小为 $m \times n$ 的滤波核可表示为两个向量的积 $w = w_1 w_2^T = w_1 \star w_2$

一个列向量和一个行向量的积等于这两个向量的二维卷积

用可分离核执行卷积运算相对于使用不可分离核执行卷积运算的计算优势定义为 $C = \frac{MNmn}{MN(m+n)} = \frac{mn}{m+n}$

可分离核条件: 核 w 的秩为 1

分离方法: 在核中找到任何一个非零元素 a , 值为 E ; 提取 a 所在的列与行, 形成列向量 c 和 r ; ; $w_{\{1\}} = c, w_{\{2\}}^{\{T\}} = \frac{r}{E}$

平滑（低通）空间滤波器

降低相邻灰度的急剧过度, 以减少无关节节 (噪声); 核越大越模糊; 平滑通过对相邻像素求和 (积分) 实现.

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

高斯核函数

$$w(s, t) = G(s, t) = K e^{-\frac{s^2 + t^2}{2\sigma^2}}$$

锐化（高通）空间滤波器

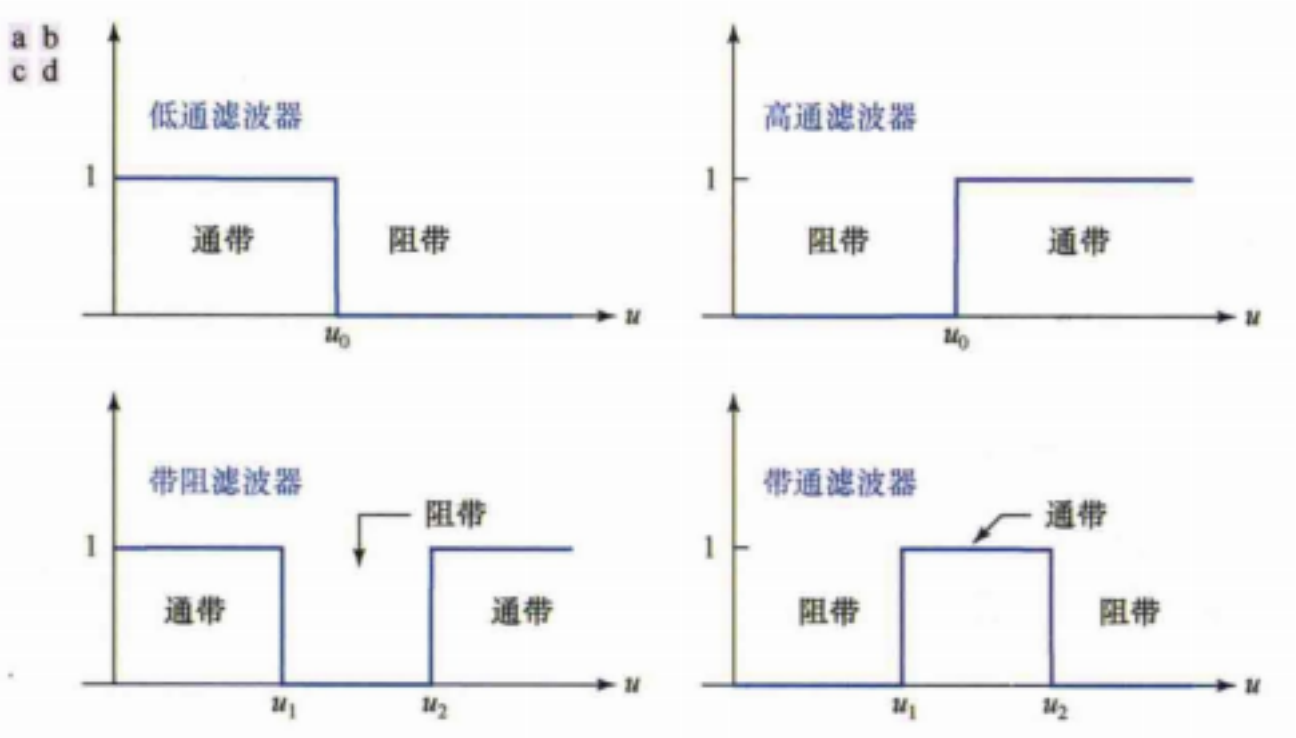
凸显灰度的过渡部分, 以增强图像中的细节。锐化则用相邻像素差分 (导数) 来实现.

拉普拉斯算子

$$\text{连续: } \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\text{离散: } \nabla^2 f = [f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1)] - 4f(x, y)$$

低通、高通、带阻和带通滤波器



单位冲激中心和滤波器核中心重合

低通 $lp(x, y)$, 高通 $hp(x, y) = \delta(x, y) - lp(x, y)$

带阻 $br(x, y) = lp_1(x, y) + hp_2(x, y) = lp_1(x, y) + [\delta(x, y) - hp_2(x, y)]$, 带通 $bp(x, y) = \delta(x, y) - br(x, y) = \delta(x, y) - [lp_1(x, y) + [\delta(x, y) - lp_2(x, y)]]$

Chapter 4

采样

冲激串采样 $s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$

对连续函数采样 $\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$ 每个点是有长度的冲激，需要再积分得到具体数值 $f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T)dt = f(k\Delta T)$

单变量的离散傅里叶变换

DFT: $F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M}$ $u = 0, 1, \dots, M-1$

IDFT: $f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{j2\pi ux/M}$ $x = 0, 1, \dots, M-1$

二变量函数的傅里叶变换

二维傅里叶变换是一维情形向两个方向的简单扩展

$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, z)e^{-j2\pi(ut+vz)}dtdz$

$f(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v)e^{j2\pi(\mu t+\nu z)}dudv$

采样: $\tilde{f}(t, z) = f(t, z)s_{\Delta T\Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(t, z)\delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$

DTF: $F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$

IDFT: $f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$

二维 DFT 和 IDFT 性质

谱 $|F(u, \nu)| = [R^2(u, \nu) + I^2(u, \nu)]^{1/2}$, $R = \text{Real}(F), I = \text{Imag}(F)$ 相角 $\phi(u, v) = \arctan\left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)}\right]$

极坐标 $F(u, \nu) = |F(u, \nu)|e^{j\phi(u, v)}$

周期性(k 为整数) $F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N) = F(u + k_1, v + k_2N)$

$f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N) = f(x + k_1M, y + k_2N)$

$$\text{卷积 } (f \star h)(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

$$\text{相关 } (f \star h)(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$$

可分离性

使用 DFT 算法求 IDFT $MN f^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v)e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ 结果取 复共轭并除以 MN 就可得到反变换

$$\text{平移性 } f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$$

频率域滤波

(1)对图像 $f(x, y)$ 进行零填充(长宽均变为两倍, 变为 $P \times Q$)

(2) 频谱中心化: 用 $(-1)^x + y$ 乘以填充后的图像;

(3) 计算(2)结果的 DFT, 即 $F(u, v)$;

(4) 用滤波器函数 $H(u, v)$ 乘以 $F(u, v)$: $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$

(5)计算(4)中结果的 IDFT, $g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}G(u, v)$

—理论值为实数, 计算误差会导致寄生复成分;

(6)得到(5)结果中的实部;

(7) 用 $(-1)^x + y$ 乘以(6)中的结果;

(8)提取(7)中的左上角(与输入图像同大小)。

快速傅里叶变换

基本思想: 利用傅里叶变换基底性质, 将 M 个数据的傅里叶变换转为 2 组 $\frac{M}{2}$ 个数据的傅里叶变换, 此时计算量从 $M^{\{2\}}$ 降低为 $\frac{M^{\{2\}}}{2}$

$$F(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_{2K}^{u(2x)} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_{2K}^{u(2x+1)} \quad \text{偶数部分} + \text{奇数部分}$$

$$W_M = e^{-j2\pi/M}, \quad W_{2K}^{2ux} = W_K^{ux}$$

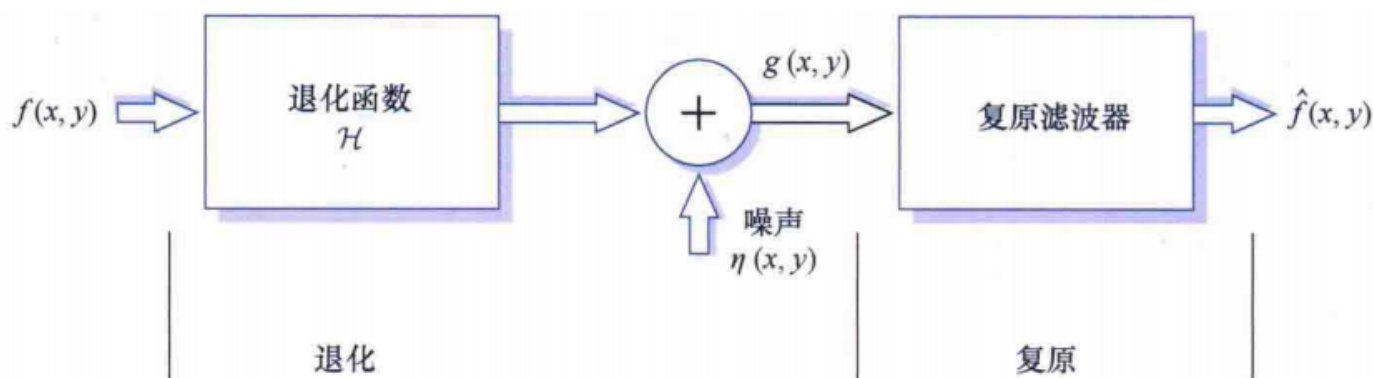
$$F_{\text{even}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{ux} \quad F_{\text{odd}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_K^{ux}$$

$$F(u) = F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u)W_{2K}^u$$

$$F(u+K) = F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u)W_{2K}^u$$

Chapter 5

图像退化/复原模型



$$\text{空域: } g(x, y) = (h \star f)(x, y) + \eta(x, y)$$

$$\text{频域: } G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

只存在噪声的复原——空间滤波

加性噪声退化后: $g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$ $G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$ (噪声未知)

算术平均滤波

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r, c) \in S_{xy}} g(r, c)$$

S 表示中心在(x,y)，尺寸为mxn 的图像;平滑了一幅图像的局部变化;在模糊了结果的同时减少了噪声

几何平均滤波

$\hat{f}(x,y) = \left[\prod_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c) \right]^{\frac{1}{mn}}$ 平滑度可以与算术均值滤波器相比;图像细节丢失更少

谐波平均滤波

$$\hat{f}(x,y) = \frac{mn}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} \frac{1}{g(r,c)}}$$

对于“盐粒”效果好，不适用于“胡椒”;善于处理像高斯噪声的噪声

反谐波平均

$$\hat{f}(x,y) = \frac{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c)^Q}$$

Q 称为滤波器的阶数,>0 用于胡椒,<0 用于盐粒,=0 变为算数平均,=-1 变为谐波平均

中值滤波

$$\hat{f}(x,y) = \max_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\}$$

与大小相同的线性平滑滤波相比，有效地降低某些随机噪声，且模糊度要小得多;对于单极和双极冲激噪声，中值滤波的效果更好。

统计排序

最大值 $\hat{f}(x,y) = \max_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c)$ 发现最亮点,过滤胡椒

最小值 $\hat{f}(x,y) = \min_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c)$ 发现最暗点,过滤盐粒

中点 $\hat{f}(x,y) = \frac{1}{2} [\max_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\} + \min_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\}]$ 适合处理随机分布的噪声，如高斯噪声和均匀噪声

修正后的阿尔法均值滤波

$$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn-d} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} g_R(r,c)$$

在S邻域内去掉g(r,c)最高灰度值的d/2 和最低灰度值的 d/2。 代表剩余的mn - d个像素 d=0 变为算数平均.=mn-1 变为中值

自适应

$g(x,y)$ 表示噪声图像在点(x,y)上的值

σ_η^2 噪声方差

$\bar{z}_{S_{xy}}$ 在 S_{xy} 上像素点的局部平均灰度

$\sigma_{S_{xy}}^2$ 在 S_{xy} 上像素点的局部方差

局部降噪

$$\hat{f}(x,y) = g(x,y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_{S_{xy}}^2} [g(x,y) - \bar{z}_{S_{xy}}]$$

中值

z_{min} 是 $S_{\{xy\}}$ 中的最小灰度值; z_{max} 是 $S_{\{xy\}}$ 中的最大灰度值; z_{med} 是 $S_{\{xy\}}$ 中的灰度值的中值; $z_{\{xy\}}$ 是坐标(x,y)处的灰度值; S_{max} 是 $S_{\{xy\}}$ 允许的最大尺寸。

层次 A: 若 $z_{min} < z_{med} < z_{max}$,则转到层次B

否则，增 $S_{\{xy\}}$ 的尺寸，

若 $S_{\{xy\}}l = S_{max}$,则重复层次 A

否则，输出 z_{med}

层次 B: 若 $z_{min} < z_{\{xy\}} < z_{max}$,则输出 $z_{\{xy\}}$

否则，输出 z_{med}

使用频率域滤波降低周期噪声

陷波滤波器

$$H_{NR}(u,\nu) = \prod_{k=1}^Q H_k(u,\nu)H_{-k}(u,\nu)$$

最优陷波滤波器

陷波带通滤波器 H

$$N(u,\nu)=H_{\text{NP}}(u,\nu)G(u,\nu)$$

$$\eta(x,y)=\mathfrak{T}^{-1}\{H_{\text{NP}}(u,\nu)G(u,\nu)\}$$

$$\hat{f}(x,y)=g(x,y)-w(x,y)\eta(x,y)$$

计算 w(x,y)

$$w(x,y)=\frac{\overline{g\eta}-\overline{g}\overline{\eta}}{\overline{\eta^2}-\overline{\eta}^2}$$

线性位置不变退化

如果退化模型为线性和位置不变的

$$g(x,y)=(h\star f)(x,y)+\eta(x,y)$$

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$$

估计退化函数

观察法 收集图像自身的信息

试验法 使用与获取退化图像的设备相似的装置

数学建模法 建立退化模型，模型要把引起退化的环境因素考虑在内

逆滤波

最小均方误差（维纳）滤波

约束最小二乘方滤波

几何均值滤波

由投影重建图像