Chapter 4

采样

冲激串采样 $s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(\text{x-n } \Delta T)$

对连续函数采样 $\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(t)\sigma(t - n\Delta T)$ 每个点是有长度的冲激，需要再积分得到具体数值 $f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T)dt = f(k\Delta T)$

单变量的离散傅里叶变换

DFT：$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, \cdots, M-1$

IDFT：$f(x) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} F(u)e^{j2\pi ux/M} \quad x = 0, 1, \cdots, M-1$

二变量函数的傅里叶变换

二维傅里叶变换是一维情形向两个方向的简单扩展

$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, z)e^{-j2\pi(ut+vz)}dtdz$

$f(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v)e^{j2\pi(\mu t+vz)}dudv$

采样：$\tilde{f}(t, z) = f(t, z)s_{\Delta T\Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(t, z)\sigma(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$

DTF：$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$

IDFT：$f(x, y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1N-1} F(u, v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$

二维 DFT 和 IDFT 性质

谱 $|F(u, \nu)| = \left[R^2(u, \nu) + I^2(u, \nu)\right]^{1/2}, \quad R = \text{Real}(F), I = \text{Imag}(F)$ 相 角$\phi(u, v) = \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$

极坐标 $F(u, \nu) = |F(u, \nu)|e^{j\phi(u,v)}$

周期性(k 为整数) $F(u, v) = F(u + k_1M, v) = F(u, v + k_2N) = F(u + k_1, v + k_2N)$
$f(x, y) = f(x + k_1M, y) = f(x, y + k_2N) = f(x + k_1M, y + k_2N)$

卷积 $(f \star h)(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$

相关 $(f \star h)(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n)h(x + m, y + n)$

可分离性

使用 DFT 算法求 IDFT $MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux/M+\nu y/N)}$ 结果取 复共轭并除以 MN 就可得到反变换

平移性 $f(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \parallel f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux_0/M+\nu y_0/N)}$

$\delta(x - a, y - b) \Leftrightarrow e^{-j2\pi(ua+vb)}$

频率域滤波

(1)对图像 f(x,y)进行零填充(长宽均变为两倍，变为$P \times Q$

(2) 频谱中心化：用$(-1)^x + y$乘以填充后的图像；

(3) 计算(2)结果的 DFT，即$F(u, v)$;

(4) 用滤波器函数$H(u, v)$乘以$F(u, v) : \mathcal{G}(u, v) = H(u, v)F(u, v)$

(5)计算(4)中结果的 IDFT，$g(x,y) = \mathfrak{J}^{-1}G(u,v)$

—理论值为实数，计算误差会导致寄生复成分；

(6)得到(5)结果中的实部；

(7) 用$(-1)^{x}+y$乘以(6)中的结果；

(8)提取(7)中的左上角(与输入图像同大小)。

快速傅里叶变换

基本思想：利用傅里叶变换基底性质，将M个数据的傅里叶变换转为 2 组$\frac{M}{2}$个数据的傅里叶变换，此时计算量从 $M^{\{2\}}$ 降低为 $\frac{M^{\{2\}}}{2}$

$F(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_{2K}^{u(2x)} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_{2K}^{u(2x+1)}$ 偶数部分+奇数部分

$W_M = e^{-j2\pi/\mathrm{M}}$，${W_{2K}}^{2ux} = {W_k}^{ux}$

$F_{even}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{ux} \quad F_{odd}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_K^{ux}$

$F(u) = F_{even}(u) + F_{odd}(u)W_{2K}^{u}$

$F(u+K) = F_{even}(u) - F_{odd}(u)W_{2K}^{u}$