



卷积  $(f \star h)(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$

相关  $(f \star h)(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m,n)h(x+m,y+n)$

使用 DFT 算法求 IDFT  $MNf^*(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u,v)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$  结果取复共轭并除以 MN 就可得到反变换

离散单位冲激  $\delta(x,y) \Leftrightarrow 1, 1 \Leftrightarrow MN\delta(u,v)$

卷积定理  $(f \star h)(x,y) \Leftrightarrow (F \cdot H)(u,v) \parallel (f \cdot h)(x,y) \Leftrightarrow \frac{1}{MN}(F \star H)(u,v)$

平移性  $f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$

$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(x_0u/M+\nu_0y/N)}$

$\delta(x-a,y-b) \Leftrightarrow e^{-j2\pi(ua+vb)}$

### 频率域滤波

(1)对图像 f(x,y)进行零填充(长宽均变为两倍，变为 $P \times Q$

(2)频谱中心化：用 $(-1)^{x+y}$ 乘以填充后的图像

(3)计算(2)结果的 DFT，即F(u,v);

(4)用滤波器函数(中心在(P/2,Q/2))H(u,v)乘以F(u,v)：

$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$

(5)计算(4)中结果的 IDFT， $g(x,y) = F^{-1}(G(u,v))$ 理论值为实数，计算误差会导致寄生复成分

(6)得到(5)结果中的实部;

(7)用 $(-1)^{\{ (x+y) \}}$ 乘以(6)中的结果

(8)提取(7)中的左上角(与输入图像同大小)。

### 低通频率域滤波器

理想低通滤波器 ILPF  $D_0$ 为截止频率; $D(u,v) = [(u-M/2)^2 + (v-N/2)^2]$  ;  $H(u,v) = \begin{cases} 1, & D(u,v) \leq D_0, \\ 0, & D(u,v) > D_0, \end{cases}$

截止频率位置 D0 决定了通过的频率成分所包含的功率，以及在总功率中所占的比例  
总功率  $P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u,v) = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} |F(u,v)|^2$   
在 D(u,v)内的功率占比  $\alpha =$

$100 \sum_u \sum_v \dot{P}(u,v)/P_T \quad where \quad D(u,v) \leq D_0$

理想的低通滤波器无法通过电子元件实现;通过计算机模拟会出现模糊与振铃现象

巴特沃斯 BLPF  $H(u,v) = \frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}}$ ；高斯 GLPF

$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$  无振铃效应

例子:低分辨率文本字符修复,面部柔和,去除传感器扫描线

### 高通滤波器

对低通滤波相反操作得到高通：

$H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$ ;  $h_{HP} = \delta(x,y) - h_{LP}(x,y) \neq 1 - h_{LP}(x,y)$

理想 IHPF:  $H(u,v) = \begin{cases} 0, & D(u,v) \leq D_0 \\ 1, & D(u,v) > D_0 \end{cases}$

巴特沃斯:  $H(u,v) = \frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$ ；高斯:  $H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

频域拉普拉斯算子:  $H(u,v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$  中心化版  $H(u,v) = -4\pi^2[(u-P/2)^2 + (v-Q/2)^2] = -4\pi^2D^2(u,v)$   
基于锐化滤波的图像增强 $g(x,y) = f(x,y) + c\nabla^2 f(x,y)$ ;其中二阶梯度傅里叶变换为 H\*F

高提升滤波:  $H_{hb}(u,v) = (A-1) + H_{hp}(u,v)$

高频加强滤波:  $H_{hfe}(u,v) = a + bH_{hp}(u,v)$  a 控制原始贡献，b 控制高通贡献

同态滤波  $H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L) \Big[ 1 - e^{-c(D^2(u,v)/D_0^2)} \Big] + \gamma_L$  衰减图像的低频成分（光照分量），增强高频成分（反射分量）

其中 $\gamma_L < 1$ 低频成分增益因子且 $\gamma_H > 1$ 高频成分增益因子;c 用于控制滤波器函数斜面的锐化

### 带阻滤波器

理想带阻(IBRF)  $H(u,v) = \begin{cases} 0 & C_0 - \frac{W}{2} \leq D(u,v) \leq C_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{其他情况} \end{cases}$  高斯带阻

(GBRF)  $H(u,v) = 1 - e^{-\left(\frac{D^2(u,v)-C_0^2}{D(u,v)W}\right)^2}$

巴特沃斯带阻 (BBRF)  $H(u,v) = \frac{1}{1+\left(\frac{D(u,v)W}{D^2(u,v)-C_0^2}\right)^{2n}}$  带阻作用:

去除摩尔纹;去除周期干扰

### 快速傅里叶变换

利用傅里叶变换基底性质，将M个数据的傅里叶变换转为2组 $\frac{M}{2}$ 个数据的傅里叶变换，此时计算量从  $M^2$  降低为  $\frac{M^2}{2}$   
 $F(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_{2K}^{u(2x)} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_{2K}^{u(2x+1)}$  偶数部分+奇数部分

$W_M^{ux} = e^{-j2\pi x/M}$ ;  $W_M^{ux} = (W_M)^{ux} = e^{-j2\pi ux/M}$  ;  $W_{2K}^{2ux} = W_k^{ux}$

$F_{even}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{ux} \quad F_{odd}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1)W_K^{ux}$

$F(u) = F_{even}(u) + F_{odd}(u)W_{2K}^u$

$F(u+K) = F_{even}(u) - F_{odd}(u)W_{2K}^u$

## 第五章：图像复原与重建

### 图像退化/复原模型

建模图像退化为用 h 算子和 f 运算,加上加性噪声 $\eta$ ,生成一幅退化图像 g

空域:  $g(x,y) = (h \star f)(x,y) + \eta(x,y)$ ; 频域:  $G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$

### 噪声模型

**高斯**  $p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2}$  ; **瑞利**  $p(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2}(z-a)e^{-(z-a)^2/2\sigma^2} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases} \parallel \bar{z} = a + \sqrt{\pi b}/4, \sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$

**爱尔兰（伽马）**  $p(z) = \begin{cases} \frac{a^b b^{b-1}}{(b-1)!} e^{-a} z^{b-1} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \parallel \bar{z} = \frac{b}{a}, \sigma^2 = \frac{b}{a^2}$

a>0,b 正整数

**指数**  $p(z) = \begin{cases} a e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & a \leq z \leq b \\ P_s & , otherwise \end{cases} \parallel \bar{z} = \frac{1}{a^2}$

**均匀**  $p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , z \in [a,b] \\ 0 & , otherwise \end{cases} \parallel \bar{z} = \frac{a+b}{2}, \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$  ; **椒盐**

$p(z) = \begin{cases} P_p & , z=0 \\ 1-(P_p+P_s) & , z=V \end{cases}$

场景:高斯电子电路随机波动引起,或者传感器在低光照高温工作产生的噪声;瑞利模拟随机波动;伽马和指数模拟激光成像;均匀:随机数在指定范围内均匀分布;椒盐:成像设备中的瞬时故障或错误

噪声估计参数参数 $\bar{z} = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p_S(z_i) \quad \sigma^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - \bar{z})^2 p_S(z_i)$

### 只存在噪声的复原——空间滤波

仅被加性噪声退化后:  $g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y) \quad G(u,v) = F(u,v) + N(u,v)$  (噪声未知)

当仅有加性噪声时，可考虑空间滤波方法，利用图像相邻像素之间的的相似性，降低噪声的影响，甚至可以有效去除噪声。

### 均值滤波

$S_{xy}$ 表示中心在(x,y)，尺寸为 $m \times n$ 的矩形子图像窗口  
算术平均  $\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c)$ ;平滑图像的局部变化;在模糊了结果的同时减少了噪声

几何平均滤波  $\hat{f}(x,y) = \left[ \prod_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c) \right]^{\frac{1}{mn}}$ ；平滑度可以与算术均值相比;图像细节丢失更少

谐波平均滤波  $\hat{f}(x,y) = \frac{mn}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} \frac{1}{g(r,c)}}$  适用“盐粒”和类似

高斯噪声的噪声，不适用于“胡椒”;

反谐波平均  $\hat{f}(x,y) = \frac{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c)^Q}$  Q 称为滤波器的阶数,>0 用于胡椒, <0 用于盐粒,=0 变为算数平均,=-1 变为谐波平均

### 统计排序

中值  $\hat{f}(x,y) = median_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\}$  与大小相同的线性平滑(均值)滤波相比，有效地降低某些随机噪声，且模糊度要小得多;对于单极和双极冲激噪声效果好  
最大值  $\hat{f}(x,y) = \max_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\}$  发现最亮点;过滤胡椒

最小值  $\hat{f}(x,y) = \min_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\}$  发现最暗点;过滤盐粒  
中点  $\hat{f}(x,y) = \frac{1}{2} [\max_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\} + \min_{(r,c) \in S_{xy}} \{g(r,c)\}]$  统计排序滤波器和平均滤波器;适合处理随机分布的噪声，如高斯噪声和均匀噪声  
修正后的阿尔法均值滤波  $\hat{f}(x,y) =$

$\frac{1}{mn-d} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} g_R(r,c)$   
在S邻域内去掉g(r,c)最高灰度值的d/2 和最低灰度值的 d/2  
 $g_R(r,c)$ 代表剩余的 $mn-d$ 个像素.d =0变为算数平均;d =  $mn-1$ 变为中值;当d 取其它值时，适用于包括多种噪声的情况下，例如高斯噪声和椒盐噪声混合的情况。

### 自适应

用 $S_{xy}$ 的区域内部像的统计特征进行处理

自适应局部降噪

$g(x,y)$ 表示噪声图像在点(x,y)上的值; $\sigma_\eta^2$ 噪声方差  $\bar{z}_{S_{xy}}$  在  $S_{xy}$ 上像素点的局部平均灰度; $\sigma_{S_{xy}}^2$  在 $S_{xy}$ 上像素点的局部方差;假设  $\sigma_\eta^2 \leq \sigma_{S_{xy}}^2$

$\hat{f}(x,y) = g(x,y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_{S_{xy}}^2} [g(x,y) - \bar{z}_{S_{xy}}]$

自适应中值

$z_{min}$ 是 $S_{xy}$ 中的最小灰度值; $z_{max}$ 是 $S_{xy}$ 中的最大灰度值;  
 $z_{med}$ 是 $S_{xy}$ 中的灰度值的中值; $z_{xy}$ 是坐标(x,y)处的灰度值;  
 $S_{max}$ 是 $S_{xy}$ 允许的最大尺寸。

层次 A: 若 $z_{min} < z_{med} < z_{max}$ ,则转到层次B 否则，增 $S_{xy}$ 的尺寸；

若 $S_{xy} \leq S_{max}$ ,则重复层次 A 否则，输出 $z_{med}$

层次 B: 若 $z_{min} < z_{xy} < z_{max}$ ,则输出  $z_{xy}$  否则，输出 $z_{med}$

普通的中值消除噪声的同时导致图像细节明显缺失;自适应中值能够额外保留图像细节

### 频域滤波降低周期噪声

陷波滤波器:阻止或通过事先定义的频率矩形邻域中的频率  
 $H_{NR}(u,\nu) = \prod_{k=1}^Q H_k(u,\nu)H_{-k}(u,\nu)$   
 $H_{k(u,\nu)}$  和  $H_{-k}(u,\nu)$ 分别是中心为  $(u_k,\nu_k)$  和  $(-u_k,-\nu_k)$  的高通滤波器传递函数; $D_k(u,\nu) = \left[ (u-M/2-u_k)^2 + (v-N/2-\nu_k)^2 \right]^{1/2}$ ;  $D_{-k}(u,\nu) = \left[ (u-M/2+u_k)^2 + (v-N/2+\nu_k)^2 \right]^{1/2}$   
n 阶巴特沃斯陷波带阻(3 陷波对)  $H_{NR}(u,\nu) = \prod_{k=1}^n \left[ \frac{1}{1+[D_{0k}/D_k(u,\nu)]^\pi} \right] \left[ \frac{1}{1+[D_{0k}/D_{-k}(u,\nu)]^\pi} \right]$   
陷波带通滤波器(NR 为带阻)  $H_{NP}(u,\nu) = 1 - H_{NR}(u,\nu)$

存在多个干扰分量时，简单的滤波器传递函数在滤波过程中可能过多地滤除图像信息  
最优陷波:1.分离干扰模式的各个主要贡献;2.从被污染图像中减去该模式的一个可叠加权部分

假设 G 是被污染图像 DFT 1.算出 $\eta$ ,  $N(u,\nu) = H_{NP}(u,\nu)G(u,\nu) \eta(x,y) = F^{-1}\{H_{NP}(u,\nu)G(u,\nu)\}$   
 $\hat{f}(x,y) = g(x,y) - w(x,y)\eta(x,y)$   
2.求可叠加权部分 $w(x,y) = \frac{\overline{g\eta}-\bar{g}\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2-\bar{\eta}^2}$

### 线性位置不变退化

如果退化模型为线性和位置不变的,则满足 Ch5 顶部建模的空域,频域表达式.许多退化类型可以近似表示为线性的位置不变过程；而非线性的与位置有关的技术难以求解。

### 估计退化函数

1.观察法:收集图像自身的信息来估计 H; 2.试验法:使用与获取退化图像的设备相似的装置; 3.数学建模法:建立退化模型，模型要把引起退化的环境因素考虑在内

### 逆滤波

$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{\hat{H}(u,v)} = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{\hat{H}(u,v)}$ ;问题:N 一般未知,挡 H 的任何元素为 0 或者较小时,后面分数项主导了结果;解决方法:限制滤波频率,从而减少遇到零值的可能性(H(0,0)的值最大).

### 最小均方误差（维纳）滤波

$S_f(u,v) = |F(u,v)|^2$ 为未退化函数功率；  $S_\eta(u,v) = |N(u,v)|^2$  为噪声功率谱；

$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{1}{\hat{H}(u,v)} \frac{[H(u,v)]^2}{[H(u,v)]^2 + S_\eta(u,v)/S_f(u,v)} \right] G(u,v)$   
假设两个功率谱之比为常数 K,有  $\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{1}{\hat{H}(u,v)} \frac{[H(u,v)]^2}{[H(u,v)]^2 + K} \right] G(u,v)$  K 通常在复原时调整

信噪比:频域 SNR =  $\frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}(x,y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} K \frac{[f(x,y)-\hat{f}(x,y)]^2}{[N(u,v)]^2}}$  空域SNR =  $\frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y)-\hat{f}(x,y)]^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2}$  均方误差 MSE =

**约束最小二乘方滤波**  
约束 $|g - H\hat{f}|^2 = |\eta|^2$  准则函数最小化 $C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} |\nabla^2 f(x,y)|^2$   
最佳问题的解 $\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{H^*(u,v)}{[H(u,v)]^2 + \gamma [F(u,v)]^2} \right] G(u,v)$  当 $\gamma = 0$  时,退变成逆滤波

P (u, v) 为 p(x, y) 的傅里叶变换 p(x,y)为拉普拉斯空间卷积核

估计 $\gamma$ :设 $\|\mathbf{r}\|^2 = \|g - H\hat{f}\|^2$ ,通过 $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\eta\|^2 \pm a$ ,由于 r 关于  $\gamma$ 单调,  $\|\mathbf{r}\|^2 < \|\eta\|^2 - a$ 增加 $\gamma$ ;  $\|\mathbf{r}\|^2 > \|\eta\|^2 + a$ 减少 $\gamma$   
估计 $\|\eta\|^2$ : $\|\eta\|^2 = MN[\sigma_\eta^2 + \bar{\eta}^2]$  用方差和均值

### 几何均值滤波

$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{H^*(u,v)}{[H(u,v)]^2} \right]^a \left[ \frac{H^*(u,v)}{[H(u,v)]^2 + \beta \left[ \frac{S_\eta(u,v)}{S_f(u,v)} \right]} \right]^{1-a}$

当  $\alpha = 0$  时,滤波器退化为逆滤波器;当  $\alpha = 0$  时,滤波器退化为参数维纳滤波器;当  $\alpha = 0, \beta = 1$  时,滤波器退化为标准维纳滤波器;当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时,滤波器为几何均值滤波器;当  $\beta = 1, \alpha$  减到  $\frac{1}{2}$  以上,它接近逆滤波器;当  $\beta = 1, \alpha$  减到  $\frac{1}{2}$  以下,它接近维纳滤波器;当  $\beta = 1, \alpha = \frac{1}{2}$  时,它被称为谱均衡滤波器；

## 第六章：彩色图像处理

### 彩色基础

红,绿,蓝量用 X,Y,Z 表示,叫三色值；三色系数定义:  $x = \frac{X}{X+Y+Z}$ ; ...;  $x+y+z = 1$ ;  
描述彩色光源的质量的三个基本量：辐射亮度：从光源流出的总能量，单位为瓦特(W)；发光强度：观察者从光源感知的总能量，单位为流明(红外的光强接近零)；亮度：主观描绘子，不可测量，体现发光强度的消色概念。  
区分不同颜色:色调:感知的主导色，跟主波长相关;饱和度:相对纯度，与一种色调混合的白光量;亮度: 发光强度的消色概念.色调和饱和度一起称为色度

### 彩色模型

### RGB

针对彩色显色器和彩色摄像机开发,一个颜色有 8 比特,2<sup>8</sup> = 256种颜色,全彩色则是 24 比特图像

### CMYK

颜料颜色,针对彩色打印开发;CMY(青色、深红、黄色)是 RGB 的补色;K 是黑色,用于调节色彩

RGB->CMY: 



(
C
M
Y


)



=



(



1
1
1




R
G
B




)



{\displaystyle {\begin{pmatrix}C\\M\\Y\end{pmatrix}}={\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}-{\begin{pmatrix}R\\G\\B\end{pmatrix}}\,\!}

RGB->CMYK:*K* = 1 − max(*R*, *G*, *B*); *C* = 






1
−
R
−
K


1
−
K




; *M* = 






1
−
G
−
K


1
−
K




; *Y* = 






1
−
B
−
K

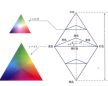

1
−
K

CMY->CMYK: *K* = min(*C*, *M*, *Y*)*K* = 1则 CMY 都是 0; *K* ≠ 1则*C* = (*C* − *K*)/(1 − *K*); *M* = (*M* − *K*)/(1 − *K*); *Y* = (*Y* − *K*)/(1 − *K*)

CMYK->CMY: *C* = *C* (1 − *K*) + *K*; *M* = *M* (1 − *K*) + *K*; *Y* = *Y* (1 − *Y*) + *K*

### HSI

针对人们描述和解释颜色的方式开发，解除了亮度和色彩信息的联系; h 色调(角度),s 饱和度(鲜艳程度),i 强度(颜色的明暗程度,平均灰度)



### RGB->HSI

θ
=
arccos
⁡
(



(
R
−
G
)
+
(
R
−
B
)


2
√
(
R
−
G

)

2


+
(
R
−
B
)
(
G
−
B
)


)


H
=



{



360
−
θ


G
<
B




360


G
≥
B




{\displaystyle \theta =\arccos \left({\frac {(R-G)+(R-B)}{2{\sqrt {(R-G)^{2}+(R-B)(G-B)}}}}\right)H={\begin{cases}360-\theta & G<B\\360& G\geq B\end{cases}}

### HSI->RGB

1.RGB 扇区0° ≤ *H* < 120°  
*R* = *I* · (1 + 






S
⋅
cos
⁡
(


H

60
∘



)


)


)
;
G
=
1
−
(
R
+
B
)
;
B
=
I
⋅
(
1
−
S
)


2.GB 扇区(120° ≤ *H* < 240°  
*H*′ = *H* − 120°

*G* = *I* · (1 + 






S
⋅
cos
⁡
(


H
′

60
∘



)


)


)
;
B
=
1
−
(
R
+
G
)
;
R
=
I
⋅
(
1
−
S
)

3.BR 扇区240° ≤ *H* < 360°  
*H*′ = *H* − 240°

*B* = *I* · (1 + 






S
⋅
cos
⁡
(


H
′

60
∘



)


)


)
;
R
=
1
−
(
G
+
B
)
;
G
=
I
⋅
(
1
−
S
)

### CIE LAB

基于人眼视觉感知的模型，不依赖于具体的设备（如显示器、打印机等），因此可以在不同设备之间保持颜色的一致性。

*L*<sub>∗</sub> = 116 \* *h*(






Y


Y

W




) − 16;*a*<sub>∗</sub> = 500 \* 



[
h
(


X


X

W




)
−
h
(


Y


Y

W




)
]


;

*b*<sub>∗</sub> = 200 \* 



[
h
(


Y


Y

W




)
−
h
(


Z


Z

W




)
]

*h*(*q*) = 



(



3
2


)
∗

q

3




q
>
0.008856


7.787
∗
q
+


16
q


q
≤
0.008856




{\displaystyle h(q)={\begin{cases}({\frac {3}{2}})\*q^{3}& q>0.008856\\7.787\*q+{\frac {16}{q}}& q\leq 0.008856\end{cases}}}

L 表示亮度，范围从 0（黑色）到 100（白色）。a 表示从绿色到红色的轴。b 表示从蓝色到黄色的轴。h(q)是一个辅助函数，用于处理非线性变换。

### 假彩色

**采用多种颜色进行灰度分层**: [0,L-1]灰度级别,分为 P+1 个区间,I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, ..., I<sub>P+1</sub>,属于某个区间就赋值一个彩色;若 *f*(*x*,*y*) ∈ I<sub>*k*</sub>则令*f*(*x*,*y*) = *c*<sub>*k*</sub> **假彩色增强**: 设置*f*<sub>*R*</sub>, *f*<sub>*G*</sub>, *f*<sub>*B*</sub> 三个函数,把灰度映射为不同通道的颜色

### 全彩色图像处理基础

1.标量框架：分别处理每幅灰度级分量图像（像素值为标量），将处理后的各分量图 像合成一幅彩色图像。 2.向量框架：直接处理彩色像素，将彩色像素视为向量处理。

### 彩色变换

*s<sub>i</sub>* = *T<sub>i</sub>*(*r<sub>i</sub>*), 



i
∈
[
i
,
n
]


n


为分量图像总数,ri为输入 i 分量灰度,*s<sub>i</sub>*为输出 i 分量灰度

三种颜色模型下提高亮度: RGB 三个分量乘以常数 k;CMY 求线性变化*s<sub>i</sub>* = *k**r<sub>i</sub>* + (1 − *k*), 



i
=
1
,
2
,
3
;


CMYK 只需改变第四个分量(K)*s<sub>i</sub>* = *k**r<sub>i</sub>* + (1 − *k*), 



i
=
4

补色;彩色环：首先等距离地放置三原色，其次将二次色等距离地放置在原色之间 在彩色环上，与一种色调直接相对立的另一色调称为补色

### 彩色分层

突出图像中某个特定的彩色范围，有助于将目标从周围分离出来;基于假设：在同一色彩空间下，相邻的点具有相近的颜色。

感兴趣的颜色被宽度为 W、中心在原型(即平均)颜色并具有分量*a<sub>j</sub>*的立方体(n>3 时为超立方体)包围，

s

i


=



{



0.5
,
 


[|

r

j


−

a

j


|
>
W
/
2]


1
≤
j
≤
n




r

i


,
 
其他




i
=
1
,
2
,
⋯
,
n


{\displaystyle s\_{i}={\begin{cases}0.5,& [|r\_{j}-a\_{j}|>W/2]1\leq j\leq n\\r\_{i},& 其他\end{cases}}\quad i=1,2,\cdots ,n}

用一个球体来规定感兴趣的颜色时

s

i


=



{



0.5
,
 


∑

j
=
1


n




(

r

j


−

a

j


)

2


>

R

0


2




r

i


,
 
其他




i
=
1
,
2
,
⋯
,
n


{\displaystyle s\_{i}={\begin{cases}0.5,& \sum \_{j=1}^{n}(r\_{j}-a\_{j})^{2}>R\_{0}^{2}\\r\_{i},& 其他\end{cases}}\quad i=1,2,\cdots ,n}

### 平滑和锐化

平滑 



c
¯
(
x
,
y
)
=



{



1
k


∑

(
s
,
t
)
∈

S

s
y


R
(
s
,
t
)




1
k


∑

(
s
,
t
)
∈

S

s
y


G
(
s
,
t
)




1
k


∑

(
s
,
t
)
∈

S

s
y


B
(
s
,
t
)




}


;锐化 ∇<sup>2</sup>*c*(*x*,*y*) = 



(



∇

2


R
(
x
,
y
)


∇

2


G
(
x
,
y
)


∇

2


B
(
x
,
y
)


)


{\displaystyle \left({\begin{matrix}\nabla ^{2}R(x,y)\\\nabla ^{2}G(x,y)\\\nabla ^{2}B(x,y)\end{matrix}}\right)}

### 分割图像

HSI:如果按颜色分割,考虑色调(H);可以用饱和度(S),大于某个阈值分割

RGB: 令 *z* 表示 RGB 空间中的任意一点,RGB 向量 **a** 来表示分割颜色样本集平均颜色  
欧氏距离为 *D*(*z*, *a*) = |*z* − *a*| = [(*z* − *a*)<sup>T</sup>(*z* − *a*)]<sup>1
2</sup> = 



[


(

z

R


−

a

R


)

2


+
(

z

G


−

a

G


)

2


+
(

z

B


−

a

B


)

2


]


1
2




  
*D*(*z*, *a*) ≤ *D*<sub>0</sub>的点的轨迹是半径为*D*<sub>0</sub>的一个实心球体  
马哈拉诺比斯距离 *D*(*z*, *a*) = [(*z* − *a*)<sup>T</sup>*C*<sup>−1</sup>(*z* − *a*)]<sup>1
2</sup>;  
*D*(*z*, *a*) ≤ *D*<sub>0</sub>的点的轨迹是半径为*D*<sub>0</sub>的一个实心三维椭球体

两个方法都计算代价也很高昂,一般用边界盒关于 *a* 居中，它沿各坐标轴的长度与样本沿坐标轴的标准差成比例

### RGB 边缘检测

Di Zenzo 法:不分通道计算梯度的处理方法 ;**u** = 






∂
R


∂
x


r


+


∂
G


∂
x


g


+


∂
B


∂
x


b



v
=


∂
R


∂
y


r


+


∂
G


∂
y


g


+


∂
B


∂
y


b


{\displaystyle {\mathbf {u} }={\frac {\partial R}{\partial x}}{\mathbf {r} }+{\frac {\partial G}{\partial x}}{\mathbf {g} }+{\frac {\partial B}{\partial x}}{\mathbf {b} }{\mathbf {v} }={\frac {\partial R}{\partial y}}{\mathbf {r} }+{\frac {\partial G}{\partial y}}{\mathbf {g} }+{\frac {\partial B}{\partial y}}{\mathbf {b} }}

  
*g<sub>xx</sub>* = **u** · **u** = **u**<sup>T</sup>**u** = 



|


∂
R


∂
x




|

2


+
|


∂
G


∂
x




|

2


+
|


∂
B


∂
x




|

2




  
*g<sub>yy</sub>* = **v** · **v** = **v**<sup>T</sup>**v** = 



|


∂
R


∂
y




|

2


+
|


∂
G


∂
y




|

2


+
|


∂
B


∂
y




|

2




  
*g<sub>xy</sub>* = **u** · **v** = **u**<sup>T</sup>**v** = 






∂
R


∂
x



∂
R


∂
y




+


∂
G


∂
x



∂
G


∂
y




+


∂
B


∂
x



∂
B


∂
y




 最大变化率方向θ(*x*,*y*) = 






1
2



tan

−
1


[



2

g

xy




g

xx


−

g

yy




]

坐标 x,y 处 θ 方向的变化率为*F*<sub>θ</sub>(*x*,*y*) = 



{



1
2


[
(

g

xx


+

g

yy


)
+
(

g

xx


−

g

yy


)
cos
⁡
2
θ
(
x
,
y
)
+
2

g

xy


sin
⁡
2
θ
(
x
,
y
)
]


}


1
2




{\displaystyle {\frac {1}{2}}[(g\_{xx}+g\_{yy})+(g\_{xx}-g\_{yy})\cos 2\theta (x,y)+2g\_{xy}\sin 2\theta (x,y)]\}^{\frac {1}{2}}}

### 噪声

只有一个 RGB 通道受到噪声污染时，到 HSI 的转换会将噪声分布到所有 HSI 分量图像上

### 第九章：形态学图像处理

目标通常定义为前景像素集合;结构元可以按照前景像素和背景像素来规定,原点用黑点。

平移 



(
B
)

z


=
{
c
|
c
=
b
+
z
,
b
∈
B
}


 将 *B* 的原点平移到点 *z*  
反射 



B
¯
=
{
w
|
w
=
−
b
,
b
∈
B
}


 相对于 *B* 的原点反射(转 180°)

补集 *A*<sup>c</sup> = {*w* | *w* ∉ *A*} 不属于 *A* 的点集

差集 *A* − *B* = {*w* | *w* ∈ *A*, *w* ∉ *B*} = *A* ∩ *B*<sup>c</sup> 属于 *A* 但不属于 *B* 的点集

腐蚀 *A* ⊖ *B* = {*z* | (*B*)<sub>*z*</sub> ⊆ *A*} = {*z* | (*B*)<sub>*z*</sub> ∩ *A*<sup>c</sup> = ∅} 腐蚀 *A* 的边界(I);能缩小、细化二值图像中的目标  
膨胀 *A* ⊕ *B* = {*z* | (*B*)<sub>*z*</sub> ∩ *A* ≠ ∅} 膨胀 *A* 的边界(I);可修复图像中的断裂字符  
对偶性 (*A* ⊖ *B*)<sup>c</sup> = *A*<sup>c</sup> ⊕ *B*<sup>c</sup>; (*A* ⊕ *B*)<sup>c</sup> = *A*<sup>c</sup> ⊖ *B*<sup>c</sup>

开运算 *A* ◦ *B* = (*A* ⊖ *B*) ⊕ *B* = ∪{|(*B*)<sub>*z*</sub> | (*B*)<sub>*z*</sub> ⊆ *A*} 平滑轮廓，断开狭窄区域，删除小孤岛和尖刺(I);冪等律;当 **B** 在 **A** 的边界**内侧**滚动时，**B** 所能到达的 **A** 的边界的最远点;**B** 的所有平移的并集。

闭运算 *A* • *B* = (*A* ⊕ *B*) ⊖ *B* = ∪{|(*B*)<sub>*z*</sub>|(*B*)<sub>*z*</sub> ∩ *A* = ∅}<sup>c</sup> 平滑轮廓，弥合狭窄断裂和细长沟道，删除小孔洞(I);冪等律;当 **B** 在 **A** 的边界**外侧**滚动时，**B** 所能到达的 **A** 的边界的最远点;**B** 的所有不与 **A** 重叠的平移的并集的补集。

对偶性 (*A* ◦ *B*)<sup>c</sup> = *A*<sup>c</sup> • *B*<sup>c</sup>; (*A* • *B*)<sup>c</sup> = *A*<sup>c</sup> ◦ *B*<sup>c</sup>

击中与击不中 *I* ⊗ *B*<sub>1,2</sub> = {*z* | (*B*<sub>1</sub>)<sub>*z*</sub> ⊆ *A* ∧ (*B*<sub>2</sub>)<sub>*z*</sub> ⊆ *A*<sup>c</sup>} = (*A* ⊖ *B*<sub>1</sub>) ∩ (*A*<sup>c</sup> ⊖ *B*<sub>2</sub>) 前景中检测形状的 **B**1，在背景中检测形状的 **B**2 同时满足的保留

边界提取 β(*A*) = *A* − (*A* ⊖ *B*) 提取集合 *A* 的边界上的点集(I)

孔洞填充 *X<sub>k</sub>* = (*X<sub>k−1</sub>* ⊕ *B*) ∩ *I*<sup>c</sup>, 



k
=
1
,
2
,
3
,
⋯
 填充 *A* 中的孔洞，




X

0


 初始化为 *I* 边框(I)

提取连通分量 *X<sub>k</sub>* = (*X<sub>k−1</sub>* ⊕ *B*) ∩ *I*, 



k
=
1
,
2
,
3
,
⋯
 寻找 *I* 中的连通分量(I)

凸壳 *X<sub>k</sub>*<sup>*i*</sup> = (*X<sub>k−1</sub>*<sup>*i*</sup> ⊕ *B*<sup>*i*</sup>) ∪ *X<sub>k−1</sub>*<sup>*i*</sup>, 



i
=
1
,
2
,
3
,
4


 计算 *I* 中前景像素的凸壳(I)

细化 *A* ⊗ *B* = *A* − (*A* ⊗ *B*) 细化集合 *A*，移除多余分支(I)  
粗化 *A* ⊙ *B* = *A* ∪ (*A* ⊗ *B*) 使用结构元粗化集合 *A* (I)  
骨架 *S*(*A*) = ∪<sub>*k*=0</sub><sup>K</sup> *S<sub>k</sub>*(*A*), 




S

k


(
A
)
=
(
A
⊖

k

B
)
−
(
A
⊖

k
+
1


B
)


{\displaystyle S(A)=\bigcup \_{k=0}^{K}S\_{k}(A),\quad S\_{k}(A)=(A\ominus ^{k}B)-(A\ominus ^{k+1}B)}

  
*B* 寻找集合 *A* 的骨架(I)

裁剪 *X*<sub>1</sub> = *A* ⊗ {*B*} ; *X*<sub>2</sub> = ∪<sub>*k*=1</sub><sup>8</sup> (*X*<sub>1</sub> ⊗ *B*<sup>*k*</sup>) ; *X*<sub>3</sub> = (*X*<sub>2</sub> ⊕ *H*) ∩ *A* ; *X*<sub>4</sub> = *X*<sub>1</sub> ∪ *X*<sub>3</sub> *X*<sub>4</sub> 是裁剪集合 *A* 后的结果。结构元(V)用于前两个公式，



H


 裁剪用于第三个公式(I)  
通常用于细化和骨架绘制算法的后处理.用于消除“毛刺”——比较短的像素端点，比如说小于等于 3 个像素长度。

### 灰度级形态学

把膨胀、腐蚀、开运算和闭运算的基本运算扩展到灰度图像  
平坦结构元:内部灰度值相同;非平坦结构元的灰度值会随它们的定义域变化  
补集定义*f*<sup>c</sup>(*x*,*y*) = −*f*(*x*,*y*) 反射定义***b***(*x*,*y*) = *b*(−*x*, −*y*)  
灰度腐蚀 平坦[f ⊖ *b*](*x*,*y*) = min<sub>(*s*,*t*) ∈ *B*}</sub>{*f*(*x* + *s*, *y* + *t*)} 非平坦[f ⊖ *b<sub>N</sub>*](*x*,*y*) = min<sub>(*s*,*t*) ∈ *b<sub>N</sub>*}</sub>{*f*(*x* + *s*, *y* + *t*) − *b<sub>N</sub>*(*s*, *t*)}  
灰度膨胀 平坦[f ⊕ *b*](*x*,*y*) = max<sub>(*s*,*t*) ∈ *B*}</sub>{*f*(*x* − *s*, *y* − *t*)} 非平坦[f ⊕ *b<sub>N</sub>*](*x*,*y*) = max<sub>(*s*,*t*) ∈ *b<sub>N</sub>*}</sub>{*f*(*x* − *s*, *y* − *t*) + *b<sub>N</sub>*(*s*, *t*)}  
灰度腐蚀和膨胀相对于补集和反射是对偶的(这里省略参数) (*f* ⊖ *b*)<sup>c</sup> = *f*<sup>c</sup> ⊕ *b*<sup>c</sup> (*f* ⊕ *b*)<sup>c</sup> = *f*<sup>c</sup> ⊖ *b*<sup>c</sup>

开运算*f* ◦ *b* = (*f* ⊖ *b*) ⊕ *b* 闭运算*f* • *b* = (*f* ⊕ *b*) ⊖ *b* 它们也是对偶的

开运算经常用于去除小而明亮的细节；闭运算经常用于去除小而黑暗的细节  
从信号图像看开闭峰，闭填谷;两个都满足图片中的性质

<div><span></span></div> <div>灰度级开操作满足下列性质:</div>
(i) <i>f</i> ◦ <i>h</i> ≤ <i>J</i>
(ii)如果 <i>f<sub>1</sub></i> ≤ <i>f<sub>2</sub></i> , 则 <i>f<sub>1</sub></i> ◦ <i>h</i> ≤ <i>f<sub>2</sub></i> ◦ <i>h</i>
(iii) ( <i>f</i> ◦ <i>h</i> ) ◦ <i>h</i> = <i>f</i> ◦ <i>h</i>
符号 <i>q</i> 、 <i>r</i> 表示 <i>q</i> 的域 <i>q</i> 的子集 <i>q</i> 的域,且对 <i>q</i> 的域内的任何(x,y)有 <i>q</i> (x,y) ≤ <i>r</i> (x,y)

形态学梯度 *g* = (*f* ⊗ *b*) − (*f* ⊖ *b*) ;显示边缘 顶帽变换 *T<sub>hat</sub>*(*f*) = *f* − (*f* ◦ *b*) 亦称“白顶帽”变换，用于暗背景上亮物体;暗背景下亮目标分割  
底帽变换 *B<sub>hat</sub>*(*f*) = (*f* • *b*) − *f* 亦称“黑底帽”变换，用于亮背景上暗物体;亮背景下暗目标分割  
粒度测定:使用逐渐增大的结构元对图像进行开运算。某个特殊尺寸的开运算对包含类似尺寸的颗粒的输入图像的区域产生最大的效果。

## 第十章：图像分割

### 背景知识

差分: 前向 






∂
f
(
x
)


∂
x




=


f
(
x
+
1
)
−
f
(
x
)


 后向 






∂
f
(
x
)


∂
x




=


f
(
x
)
−
f
(
x
−
1
)


中值


∂
f
(
x
)


∂
x




=


f
(
x
+
1
)
−
f
(
x
−
1
)


2


二阶


∂

2


f
(
x
)


∂
x

2




=


f
(
x
+
1
)
−
2
f
(
x
)
+
f
(
x
−
1
)


一阶导


a
)


在恒定灰度区域为零;
b
)


在灰度台阶和斜坡开始处不为零;
c
)


在灰度斜坡上不为零


二阶导


a
)


在恒定灰度区域为零;
b
)


在灰度台阶和斜坡开始处不为零;
c
)


在灰度斜坡上为零


(1)一阶导产生粗边缘；(2)二阶导对精细细节(如细线、孤立点和噪声)有更强的响应；(3)二阶导在灰度斜坡和台阶过渡处会产生双边缘响应；(4)二阶导的符号可用于确定边缘的过渡是从亮到暗(正)还是从暗到亮(负)。  
滤波器在核的中心点的响应是*Z* = ∑<sub>*k*=1</sub><sup>9</sup> *w<sub>k</sub>* *z<sub>k</sub>* *w* 1,2,3 为核第一行,以此类推

### 孤立点检测

拉普拉斯 ∇<sup>2</sup>*f*(*x*,*y*) = 






∂

2


f


∂

x

2




+


∂

2


f


∂

y

2




 = *f*(*x* + 1, *y*) + *f*(*x* − 1, *y*) + *f*(*x*, *y* + 1) + *f*(*x*, *y* − 1) − 4*f*(*x*, *y*)

超过阈值 *T* 的标记 



g
(
x
,
y
)
=



{



1
,
|
Z
(
x
,
y
)
|
>

T



0
,
其他




{\displaystyle g(x,y)={\begin{cases}1,& |Z(x,y)|>T\\0,& 其他\end{cases}}}

 ∇<sup>2</sup>*f* = *Z*

### 线检测

拉普拉斯核是各向同性的、特殊方向线检测通常采用如下 4 种模板

水平：



(



−
1
−
2
−
1


2
−
1
−
1


)


 +45°：



(



2
−
1
−
1


−
1
−
2
−
1


)


 垂直：



(



−
1
2
−
1


−
1
2
−
1


)


 -45°：



(



−
1
2
−
1


2
−
1
−
1


)

如果上述 4 种模板产生的响应分别为：R<sub>*i*</sub>，如果|R<sub>*i*</sub>(x,y)|> |R<sub>*j*</sub>(x,y)|,并且 |*i* − *j*| ≥ 1，则认为此点与模板 *i* 方向的线有关。

### 边缘检测

梯度 ∇*f*(*x*,*y*) ≡ grad[*f*(*x*,*y*)] ≡ 



[



g

x


(
x
,
y
)


g

y


(
x
,
y
)


]


=



[



∂
f
(
x
,
y
)


∂
x




∂
f
(
x
,
y
)


∂
y




]


  
梯度幅度(L2) *M*(*x*,*y*) = ∥∇*f*(*x*,*y*)∥ = 






√




g

x


2


(
x
,
y
)
+

g

y


2


(
x
,
y
)


  
绝对值来近似梯度幅度(L1): 



M
(
x
,
y
)
≈



