



院(系): 智能工程学院

组号: 第六组

组长: 张瑞程

日期: 2024.12.19

实验名称: 一级倒立摆系统建模及稳定性分析、基于 Matlab 的一级倒立摆根轨迹校正、PID 校正

小组成员: 张瑞程 22354189

孙大伟 22354115

钟镇宇 22354205

一、实验目的

- 1、了解一级倒立摆工作原理
- 2、建立一级倒立摆数学模型
- 3、掌握一级倒立摆的基本分析方法，并在 Matlab 中仿真验证

二、实验任务/要求:

- 1、一级倒立摆系统稳定性分析;
- 2、设计根轨迹校正环节使系统性能指标达到 $t_s \leq 1$ 秒, $\sigma \leq 10\%$;
- 3、设计 PID 校正环节使系统性能指标达到 $t_s \leq 1$ 秒, $\sigma \leq 10\%$ 。

三、实验仪器、设备及材料:

一级倒立摆本体、倒立摆电控箱、PC 机 (Matlab 平台、运动控制卡)

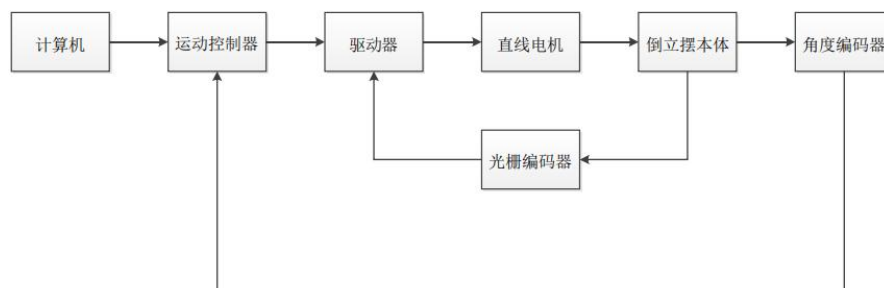
四、实验原理

- 1、被控对象实体如下:

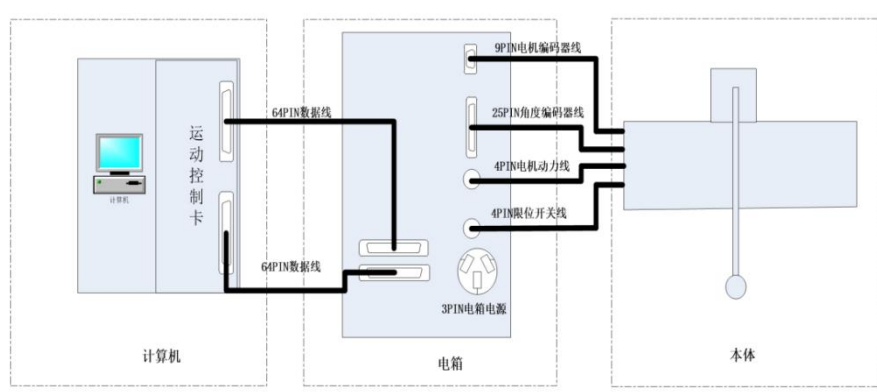


- 2、对整个系统进行建模和分析:

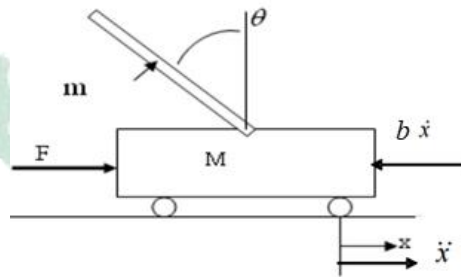
系统控制框图如下:



系统连接示意图如下：

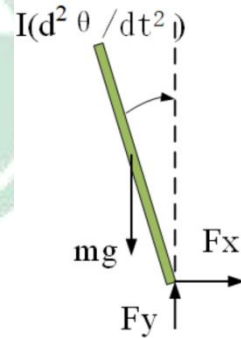
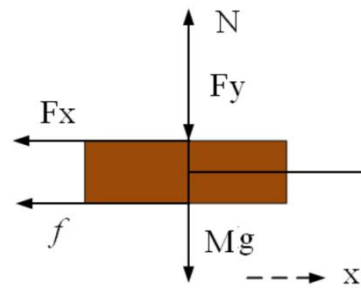


直线一级倒立摆系统如下：



进行受力分析：

①对小车，水平方向： $F - F_x - f = M\ddot{x}$



②对摆杆，水平方向： $F_x = m \frac{d^2}{dt^2}(x - l \sin \theta) = m \frac{d}{dt}(\dot{x} - l \cos \theta \dot{\theta}) = m\ddot{x} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 - ml \cos \theta \ddot{\theta}$

③对摆杆，垂直方向： $mg - F_y = m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) = m \frac{d}{dt}(-l \sin \theta \dot{\theta}) = -ml \cos \theta \dot{\theta}^2 - ml \sin \theta \ddot{\theta}$

④摆杆力矩平衡： $I\ddot{\theta} = F_y l \sin \theta + F_x l \cos \theta$

由于控制的目的是保持倒立摆直立，摆杆允许转动的转角一般较小，可得到如下假设条件：

$$\sin \theta = \theta, \cos \theta = 1$$

$$F_x = m\ddot{x} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 - ml \cos \theta \ddot{\theta} \quad \left. \begin{array}{l} F_x = m\ddot{x} + ml \theta \dot{\theta}^2 - ml \ddot{\theta} \quad (1) \\ mg - F_y = -ml \cos \theta \dot{\theta}^2 - ml \sin \theta \ddot{\theta} \\ I\ddot{\theta} = F_y l \sin \theta + F_x l \cos \theta \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} F_y = mg + ml \dot{\theta}^2 + ml \theta \ddot{\theta} \quad (2) \\ I\ddot{\theta} = F_y l \theta + F_x l \quad (3) \end{array}$$

$$mg - F_y = -ml \cos \theta \dot{\theta}^2 - ml \sin \theta \ddot{\theta}$$

$$I\ddot{\theta} = F_y l \sin \theta + F_x l \cos \theta$$

把方程(1)、(2)带入到(3)中：

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= (mg + ml\ddot{\theta})l\ddot{\theta} + (m\ddot{x} - ml\ddot{\theta})l \\ &= mgl\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\theta}^2 + ml\ddot{x} - ml^2\ddot{\theta} \end{aligned}$$

因 $I = \frac{1}{3}ml^2$ ，利用 $\theta^2 = 0, \dot{\theta}^2 = 0$ 将上式线性化：

故一阶倒立摆的数学模型：

$$\frac{4}{3}ml\ddot{\theta} - mg\theta = m\ddot{x}$$

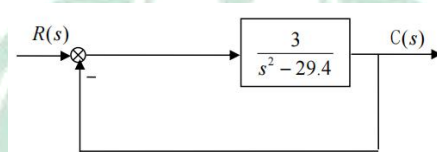
代入 $mg = 1.176, l = 0.188$ 实际数据后： $\ddot{\theta} - 29.4\theta = 3\ddot{x}$

定义：

输入信号： $R(t) = \ddot{x}(t)$ 输出信号： $C(t) = \theta(t)$

则系统传递函数：

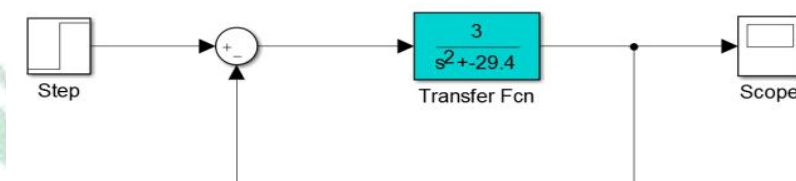
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2 - 29.4}$$



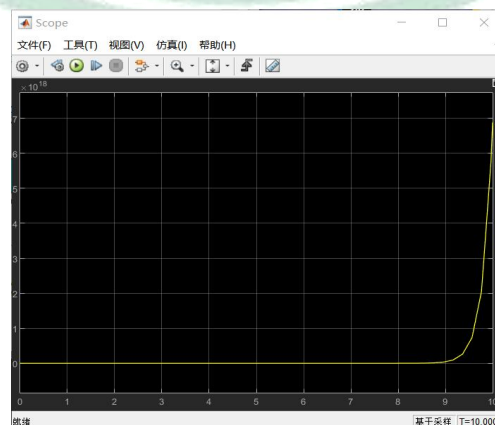
五、实验步骤及结果

任务 1：一级倒立摆系统稳定性分析

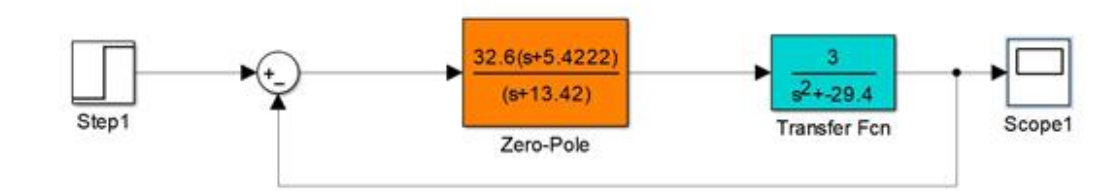
①在 MATLAB Simulink 中构建如图所示的系统仿真程序：



②加入阶跃信号，点击运行按钮，双击 Scope 块，得到系统仿真曲线，此时系统不稳定，发散。



任务 2：一级倒立摆系统根轨迹校正
搭建如图所示的 simulink 仿真系统

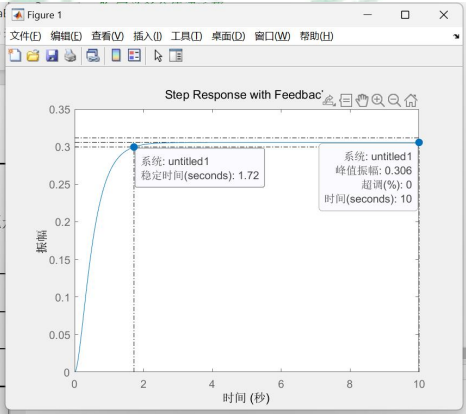


改变控制器的增益把实验数据填入下表：

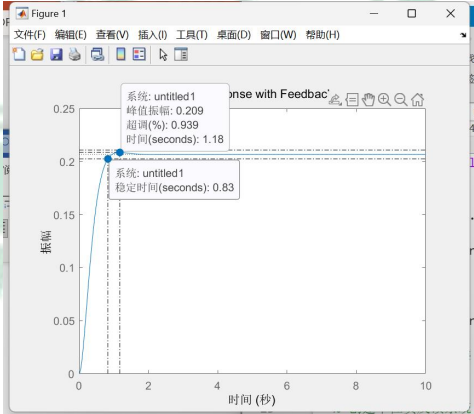
控制器形式及参数	增益（K）	超调量 σ	调节时间 t_s	系统是否稳定？
$k \frac{s + 5.4222}{s + 13.42}$	29	0	1.72s	稳定
	32	0.939%	0.83	稳定
	35	4.43%	1.05	稳定

三种增益对应的仿真曲线如下：

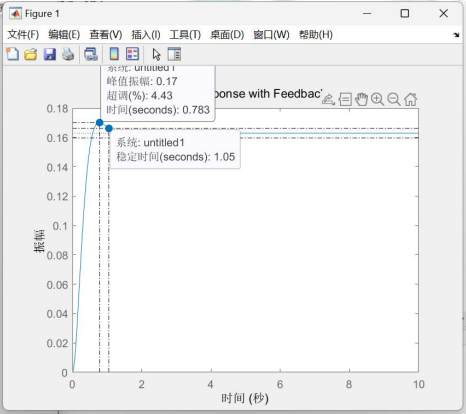
① K = 29



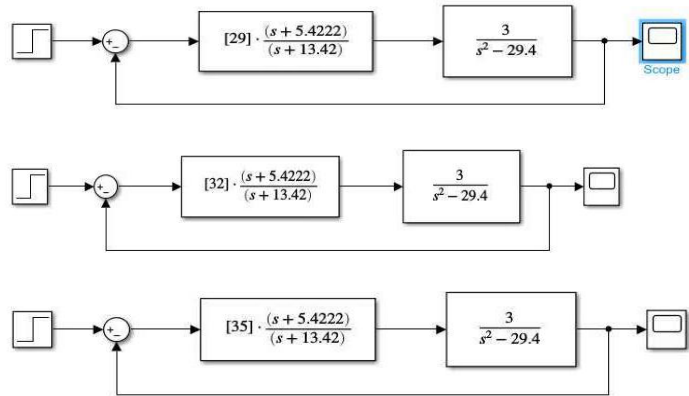
② K = 32



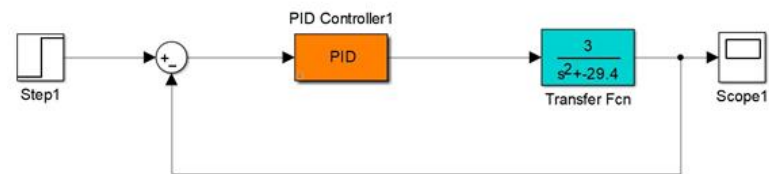
③ K = 35



SIMULINK 仿真图



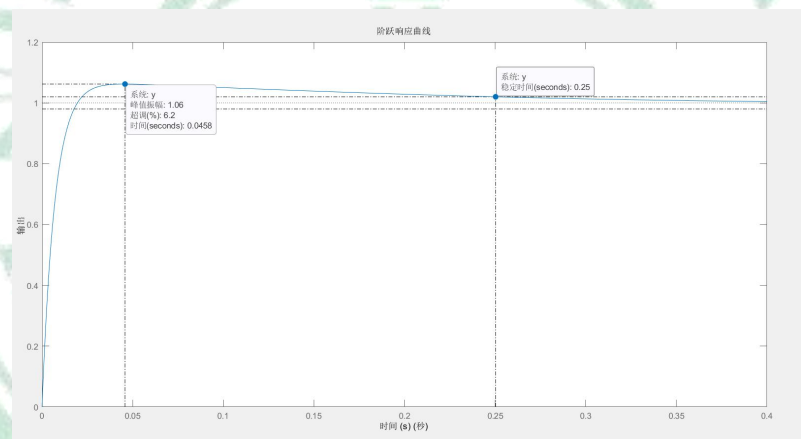
任务 3：一级倒立摆系统 PID 校正
搭建如图所示的 simulink 仿真系统：



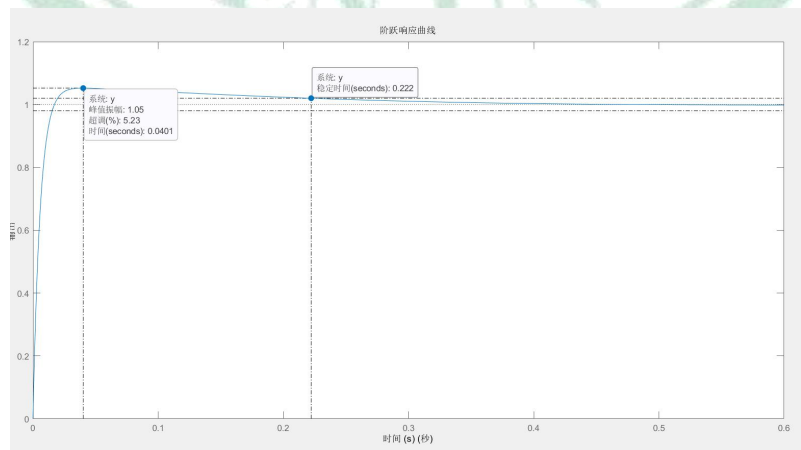
改变控制器的 PID 值，观察实验现象并把实验数据填入下表：

控制器参数	PID 参数	系统性能	响应曲线
$\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$	K_p = 500 K_i = 2000 K_d = 50	调节时间：0.25s 超调量：6.2%	①
	K_p = 600 K_i = 2500 K_d = 60	调节时间：0.222s 超调量：5.23%	②
	K_p = 500 K_i = 2500 K_d = 50	调节时间：0.239s 超调量：6.37%	③

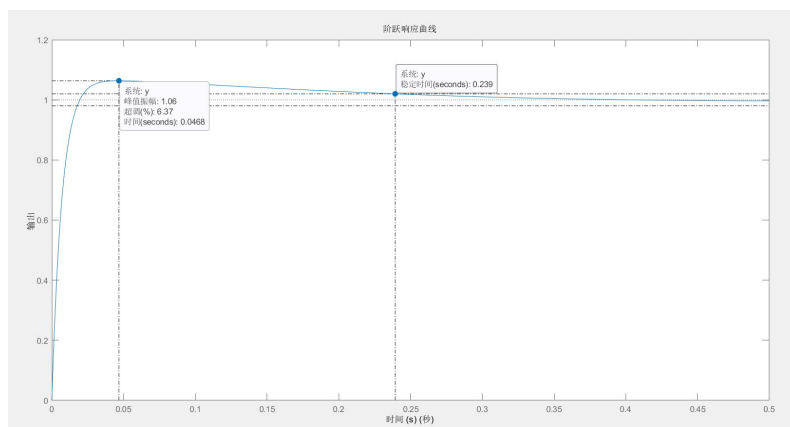
响应曲线如下：



①



②



③

六、实验心得

在本实验中，对于一阶倒立摆系统，其闭环传递函数的一个极点位于右半平面，并且闭环系统的根轨迹关于虚轴对称，无论根轨迹增益如何变化，闭环根总是位于正实轴或者虚轴上，即系统总是不稳定或临界稳定的。

在任务二中，对系统新增加一个开环零点和一个开环极点可以有效提高其稳定性。增加了一个开环零点，使闭环极点可以远离虚轴，同时在 K 增大时， β 先增大后减小，超调量先增大后减小，调整时间在 K 增大时也会减小，不改变系统型别，所以不改变系统稳定精度。在虚轴左侧增加一个零点，右侧两个主导极点在 k 增大时， β 增大，超调量逐渐增大，距离虚轴距离基本不变，调节时间基本没有优化。系统型别发生变化，变为二阶系统，提高稳态精度。

在任务三中，PID 环节为系统增加了一个位于原点的极点，两个可变的零点。可以通过调整根轨迹增益使闭环极点位于开环左极点的左侧，并且尽量靠近负实轴，设计出快速性、稳定性均较好的系统。