2011-2015文理科导数典型题汇总

班级：姓名：

1.（文2011,I）已知函数，曲线在点(处的切线方程为.

(1)求，的值；（）(2)证明：当，且时，.

2.（文2012,I）设函数. (1)求的单调区间；

(2)若,为整数,且当时,,求的最大值.

3．**（理2013**,I**）**设函数，．若曲线和曲线都过点，且在点处有相同的切线.

(1)求的值；（）(2)若时，，求的取值范围．

4．**（文2014**,I**）**设函数，曲线在点

处的切线斜率为.(1)求；（）(2)若存在，使得，求的取值范围．

5．**（文2014**,II**）**已知函数，曲线在点处的切线与*x*轴交点的横坐标为.

(1)求的值得；（2） 证明：当时，曲线与直线只有一个交点.

**6.（理2014**,I**）**设函数，曲线在点处的切线方程为.(1)求，；（）(2)证明：.

7.**（文、理2013**,I**）**已知函数若，则的取值范围是(　　)

A． B． C． D．

8．**（文、理2014**,I**）**已知函数，若存在唯一的零点，且，则的取值范围是 (　 )

A． B． C． D．

9．**（理2015**,I**）**设函数，其中，若存在唯一的整数使得，则*a*的取值范围是(　　)

A. B. C. D.

附加题：1.已知函数.

（1）讨论函数的单调性；

（2）若函数有两个极值点，（），若恒成立，求的取值范围.

2.已知函数.

（1）若，讨论函数的单调性；

（2）若有两个极值点，（），证明：.

参考答案：1.（2）法（一），令，即证：当时，；当时，，后易证，省略.

法（二），当时，令，，，

，单调递减，，单调递减，，成立；

当时，，单调递增，，单调递减，，成立.

2. 解:(1)的定义域为,;

若,则恒成立,所以在总是增函数

若,令,求得,所以的单增区间是;

令, 求得 ,所以的单减区间是

(2)（一） 把代入得:,

因为,所以,所以:,,

,所以:

令,则,由(1)知:在

单调递增,而 ,所以在上存在唯一零点,且;

故在上也存在唯一零点且为,当时, ,当时,,所以在上,;由得:,所以,所以ddd,

由于(\*)式等价于,所以整数的最大值为2.

（二）略证：，

令，，若，，所以单调递增，所以成立；

若，时，，时，，，又因为，所以整数的最大值为2.

3．解：(1)由已知得*f*(0)＝2，*g*(0)＝2，*f*′(0)＝4，*g*′(0)＝4.而*f*′(*x*)＝2*x*＋*a*，*g*′(*x*)＝e*x*(*cx*＋*d*＋*c*)，故

*b*＝2，*d*＝2，*a*＝4，*d*＋*c*＝4.从而*a*＝4，*b*＝2，*c*＝2，*d*＝2.

(2)法（一）由(1)知，*f*(*x*)＝*x*2＋4*x*＋2，*g*(*x*)＝2e*x*(*x*＋1)．

设函数*F*(*x*)＝*kg*(*x*)－*f*(*x*)＝2*k*e*x*(*x*＋1)－*x*2－4*x*－2，则*F*′(*x*)＝2*k*e*x*(*x*＋2)－2*x*－4＝2(*x*＋2)(*k*e*x*－1)．

（导函数能分解因式这个信息很重要的，为什么这么说？）

由题设可得*F*(0)≥0，即*k*≥1.（这个结论是不容易想得到的，没有这个结论如何做，方法二中有）

令*F*′(*x*)＝0得*x*1＝－ln*k*，*x*2＝－2.

①若1≤*k*<e2，则－2<*x*1≤0，从而当*x*∈(－2，*x*1)时，*F*′(*x*)<0；当*x*∈(*x*1，＋∞)时，*F*′(*x*)>0，即*F*(*x*)在(－2，*x*1)上单调递减，在(*x*1，＋∞)上单调递增．故*F*(*x*)在[－2，＋∞)上的最小值为*F*(*x*1)．

而*F*(*x*1)＝2*x*1＋2－*x*－4*x*1－2＝－*x*1(*x*1＋2)≥0.

故当*x*≥－2时，*F*(*x*)≥0，即*f*(*x*)≤*kg*(*x*)恒成立．

②若*k*＝e2，则*F*′(*x*)＝2e2(*x*＋2)(e*x*－)．

从而当*x*>－2时，*F*′(*x*)>0，即*F*(*x*)在(－2，＋∞)上

单调递增，而*F*(－2)＝0，故当*x*≥－2时，*F*(*x*)≥0，即*f*(*x*)≤*kg*(*x*)恒成立．

③若*k*>e2，则*F*(－2)＝－2*k*＋2＝－2 (*k*－e2)<0，从而当*x*≥－2时，*f*(*x*)≤*kg*(*x*)不可能恒成立．

综上，*k*的取值范围是[1，e2]．

法（二），

当时，，定义域内单调递减， ，不恒成立；

当时，，定义域内单调递增，，不恒成立；

当时，，使得，

当时，，单调递减，当时，，单调递增，

所以恒成立，

，，.综上所述：.

法（三），恒成立，即恒成立.

当时，，；

当时，，令，，

所以当时，，单调递增；

当时，，单调递减.，.

当时，，可得单调递增，，

.综上所述：.

4.解：(1)*f*′(*x*)＝＋(1－*a*)*x*－*b*.由题设知*f*′(1)＝0，解得*b*＝1，

(2)*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，由(1)知，*f*(*x*)＝*a*ln*x*＋*x*2－*x*，

*f*′(*x*)＝＋(1－*a*)*x*－1＝(*x*－1)．

(i)若*a*≤，则≤1，故当*x*∈(1，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)在(1，＋∞)上单调递增．

故存在*x*0≥1，使得*f*(*x*0)<的充要条件为*f*(1)<，即－1<，解得－－1<*a*<－1.

(ii)若<*a*<1，则>1，故当*x*∈时，*f*′(*x*)<0；当*x*∈时，*f*′(*x*)>0.

*f*(*x*)在上单调递减，在上单调递增．

所以，存在*x*0≥1，使得*f*(*x*0)<的充要条件为*f*<.

而*f*＝*a*ln＋＋>，所以不合题意．

(iii)若*a*>1, 则*f*(1)＝－1＝<，符合题意．

综上，*a*的取值范围是(－－1，－1)∪(1，＋∞)．

点评：求参数的取值范围预示着对参数区间的合理分类讨论是关键.

5.(1)求*a*；（）(2)证明：当时，曲线与直线只有一个交点．

解：(1)*f*′(*x*)＝3*x*2－6*x*＋*a*，*f*′(0)＝*a*.

曲线*y*＝*f*(*x*)在点(0，2)处的切线方程为*y*＝*ax*＋2.由题设得－＝－2，所以*a*＝1.

(2)法（一）证明：由(1)知，*f*(*x*)＝*x*3－3*x*2＋*x*＋2.

设*g*(*x*)＝*f*(*x*)－*kx*＋2＝*x*3－3*x*2＋(1－*k*)*x*＋4，由题设知1－*k*>0.

当*x*≤0时，*g*′(*x*)＝3*x*2－6*x*＋1－*k*>0，*g*(*x*)单调递增，*g*(－1)＝*k*－1<0，*g*(0)＝4，

所以*g*(*x*)＝0在(－∞，0]上有唯一实根．当*x*>0时，令*h*(*x*)＝*x*3－3*x*2＋4，

则*g*(*x*)＝*h*(*x*)＋(1－*k*)*x*>*h*(*x*)．

*h*′(*x*)＝3*x*2－6*x*＝3*x*(*x*－2)，*h*(*x*)在(0，2)上单调递减，在(2，＋∞)上单调递增，

所以*g*(*x*)>*h*(*x*)≥*h*(2)＝0，

所以*g*(*x*)＝0在(0，＋∞)上没有实根．综上，*g*(*x*)＝0在**R**有唯一实根，

即曲线*y*＝*f*(*x*)与直线*y*＝*kx*－2只有一个交点．

法（二）当时，曲线与直线只有一个交点，

只有一个根，因为不是方程的根，

所以有，令，

（导函数能分解因式这个信息很重要的）

当时，，单调递增；当时，，单调递减.

**，且时，**；**时，**，

**当**时，，单调递减.**且时，**；**时，**，

**综上可得：原命题成立.**

**法（三）：**令，即证当时只有一个零点.

，，当时，，易得在单调递增，只有一个零点，成立；当时，有两个根，

即证或，，

所以

令，，

易得，成立.

**变式题目：只有一个根，求的取值范围.**

6.解：(1)函数f(x)的定义域为(0，＋∞)，f′(x)＝aexln x＋ex－ex－1＋ex－1.

由题意可得f(1)＝2，f′(1)＝e，故a＝1，b＝2.

(2)证明：由(1)知，，从而f(x)>1等价于xln x>xe－x－.

设函数g(x)＝xln x，则g′(x)＝1＋ln x，

所以当x∈时，g′(x)<0；当*x*∈时，*g*′(*x*)>0.

故*g*(*x*)在上单调递减，在上单调递增，从而*g*(*x*)在(0，＋∞)上的最小值为*g*＝－.

设函数*h*(*x*)＝*x*e－*x*－，则*h*′(*x*)＝e－*x*(1－*x*)．所以当*x*∈(0，1)时，*h*′(*x*)>0；当*x*∈(1，＋∞)时，*h*′(*x*)<0.

故*h*(*x*)在(0，1)上单调递增，在(1，＋∞)上单调递减，从而*h*(*x*)在(0，＋∞)上的最大值为*h*(1)＝－.

因为*g*min(*x*)＝*g*＝*h*(1)＝*h*max(*x*)，所以当*x*>0时，*g*(*x*)>*h*(*x*)，即*f*(*x*)>1.

7.D (数形结合)；8.C（直接研究或分离函数分离变量都可以）；9.D（分离函数数形结合）

附加题：1.解：（1），，

当时， ， ，单调递增；

 ， ，单调递减；当时，， 单调递增.

当时， ， ，单调递增；

时， ，单调递减.

（2）法（一）由（1）可得，函数有两个极值点，，则，且有及，

所以，



令，，所以单调递增.

，. 法（二）换掉，……….

2.解：（1），，， ，

，所以函数的单调减.

（2）简解：有两个极值点，，有两个根，所以也可得，，令，（必须大于0）

，，，  ，

令 ，可得单调递减，所以.