1.当时，证明：

 ，，.

2.求证：当且时，.

，，，

，，.

3.证明：.

， .

4.设函数图像上任意不同的两点为、，线段的中点为，记直线的斜率为，试证明：.

，.

又



即证明：



不妨设，

，，

，…….

构造函数：5.定义，，当且时，证明：.

即证：，，即证为减函数.

，令，，

，，，.

，……

变式题：若，则

A.  B. 

C.  D. 

已知定义在上的函数， 是它的导函数，且恒成立，则（ ）

A. B.  C.  D. 



是定义在上的函数，满足，下列正确的是（ ）

A. B. 

C.  D.两者大小关系无法确定

6.设函数，

（1）当时，求曲线在处的切线方程；

（2）如果存在，使得成立，求满足条件的最大整数；

（3）如果对任意的，都是有成立，求实数的取值范围.

解：（1）；（2），.

（3），，，

，.

7.已知函数，若存在，使得成立，求实数的取值范围.

，即成立，令，，

，，所以，，，

，，.

8. 设函数(其中).

(Ⅰ) 当时,求函数的单调区间；

(Ⅱ) 当时,求函数在上的最大值.

**【解析】**(Ⅰ) 当时,

,

令,得,

当变化时,的变化如下表:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | 极大值 |  | 极小值 |  |

右表可知,函数的递减区间为,递增区间为,.

(Ⅱ),

令,得,,

令,则,所以在上递增,

所以,从而,所以

所以当时,；当时,；

所以

令,则,

令,则

所以在上递减,而

所以存在使得,且当时,,

当时,,

所以在上单调递增,在上单调递减.

因为,,

所以在上恒成立,当且仅当时取得“”.

综上,函数在上的最大值.

8.设函数 ．

(1) 当时,求函数的单调区间；

(2) 当时,求函数在上的最小值和最大值．

【解析】：

(1)当时

,在上单调递增.

（2）当时，，其开口向上，对称轴 ，且过

（i）当，即时，，在上单调递增，

-k

k

 k

从而当时， 取得最小值 ,

当时， 取得最大值.

（ii）当，即时，令

解得：,注意到,

(注：可用韦达定理判断，,从而；或者由对称结合图像判断)





的最小值,



的最大值

综上所述，当时，的最小值,最大值

解法2（2）当时，对，都有，故

故，而 ，

所以 ，

【解析】：看着容易，做着难！常规解法完成后，发现不用分类讨论，奇思妙解也出现了：结合图像感知 时最小，时最大，只需证即可，避免分类讨论.本题第二问关键在求最大值，需要因式分解比较深的功力，这也正符合了2012年高考年报的“对中学教学的要求——重视高一教学与初中课堂衔接课”.

9. 设函数，，其中为实数.



(1) 若在上是单调减函数，且在上有最小值，求的范围；



(2) 若在上是单调增函数，试求的零点个数，并证明你的结论.



解:(1)由即对恒成立,∴

而由知<1 ∴

由令则

当<时<0,当>时>0,

∵在上有最小值

∴>1 ∴>

综上所述:的取值范围为

(2)证明:∵在上是单调增函数

∴即对恒成立,

∴

而当时,> ∴

分三种情况:

(Ⅰ)当时, >0 ∴f(x)在上为单调增函数

∵ ∴f(x)存在唯一零点

(Ⅱ)当<0时,>0 ∴f(x)在上为单调增函数

∵<0且>0

∴f(x)存在唯一零点

(Ⅲ)当0<时,,令得

∵当0<<时,>0;>时,<0

∴为最大值点,最大值为

①当时,,,有唯一零点

②当>0时,0<,有两个学科网(www.zxxk.com)--国内最大的教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！零点

10.已知函数,曲线在点处切线方程为.

(Ⅰ)求的值;

(Ⅱ)讨论的单调性,并求的极学科网(www.zxxk.com)--国内最大的教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！大值.

【答案】



(II) 由(I)知,



令

从而当<0.

故.

当.

超越根

11. 设函数

(1)求的单调区间

(2)若,为整数,且当时,,求的最大值.

(Ⅰ) 解:的定义域为,;

若,则恒成立,所以在总是增函数

若,令,求得,所以的单增区间是;

令, 求得 ,所以的单减区间是

(Ⅱ)（一） 把 代入得:,

因为,所以,所以:,,

,所以:

令,则,由(Ⅰ)知:在

单调递增,而 ,所以在上存在唯一零点,且;

故在上也存在唯一零点且为,当时, ,当时,,所以在上,;由得:,所以,所以ddd,

由于(\*)式等价于,所以整数的最大值为2.

（二），

令，，若，成立

若，，，所以整数的最大值为2.

13.已知函数是奇函数，且图像在点处的切线的斜率为（为自然数的底数）.

（1）求实数，的值；

（2）若，且对任意恒成立，求的最大值.

解：（1）.

（2）（一）设，，令，

，，又

，使，时，，，，

同理：，，

由，，.

（二），，

若成立，

，，.

14.已知函数.

若恒成立，求的取值范围.

解：，

，

若， ，.

若 ，，

 ，



综上：

变式：已知函数，.对于任意，都有不等式成立，求实数的取值范围.

解：



若，即时，，任意，成立；

若，即时，，

，，，

当，即时，，任意，成立；

当，即时，存在，使得当时，，，

综上所述，实数的取值范围是.

洛比塔法则：时，，时，.

令，，

令，

，

（2016广州二模）（21）（本小题满分分）

已知函数**R**．

（Ⅰ） 当时，求函数的最小值；

（Ⅱ） 若时,,求实数的取值范围；

（Ⅲ）求证：．

（21） （Ⅰ）解:当时，,则．…………………1分

令，得．

当时, ; 当时, ． …………………………2分

∴函数在区间上单调递减,在区间上单调递增．

∴当时,函数取得最小值,其值为． ……………………3分

（Ⅱ）解:若时,,即．（\*）

令,

则．

① 若,由（Ⅰ）知,即,故．

∴．

…………………………………………4分

∴函数在区间上单调递增．

∴．

∴（\*）式成立． …………………………………………5分

②若,令,

则．

∴函数在区间上单调递增．

由于,．

…………………………………………6分

故,使得． …………………………………………7分

则当时,,即．

∴函数在区间上单调递减．

∴ ,即（\*）式不恒成立． ………………………………………8分

综上所述,实数的取值范围是．洛比塔法则也行

（Ⅲ）证明:由（Ⅱ）知,当时, 在上单调递增．

则,即．…………………………………10分

∴． …………………………………………11分

∴,即． …………………………………………12分

（2016深圳二模）

已知函数

（1）若在处的切线过点，求实数的值；

（2）当时，恒成立，求实数的取值范围.

解（2），分正负分离变量，

不分离：易得，

，；



（时）



因为若,,

若， .

易证恒成立.

15.已知函数，

1. 当时，求函数的零点；
2. 求的极大值点与极小值点；
3. 设的极大值为，极小值为，求证：.

解：（Ⅰ），，

当时，，

，所以函数在定义域内严格单调递增，

，所以为函数的零点，且是惟一零点.（4分）

（Ⅱ）令，，

当时，有两个大于的根，

且分别为，，

当，时，，函数单调递增；

当时，，函数单调递减.

为函数的极小值点，且；

为函数的极大值点，且.

 

，

，，.（8分）

令，，时，单调递减.

，

.（12分）

（2016.康康）设函数，，已知是导函数的一个零点．

（Ⅰ）求的单调区间；

（Ⅱ）若，，且，试指出的最小值，并证明你的结论．

**解：**（Ⅰ）的定义域为，．

∵是导函数的一个零点，∴，∴．………………2分

．

①当时，，列表如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | ↗ | 取极大值 | ↘ | 取极小值 | ↗ |

此时，的单调增区间为和，单调减区间为．

②当时，，此时，在定义域上单调递增．……4分

③当时，，列表如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | ↗ | 取极大值 | ↘ | 取极小值 | ↗ |

此时，的单调增区间为和，单调减区间为．

④当时，∵，∴时，；时，．

此时，的单调减区间为，单调增区间为．………………………………6分

（Ⅱ）的最小值为．…………………………………………………………………………7分

证明如下：

①若，则，满足条件：，且．

此时，．

②以下证明：．

∵，即，∴，中一个不大于，另一个不小于．

而，均有意义，，，

所以，不妨设．

当时，显然；…………………………………………………………………8分

当时，∵，

而，∴，．

又∵，，由（Ⅰ）知，在上单调递减，

∴．

令，，则，．…………10分

（法一）设，．

则

．

．

∵，，∴，，

∴，在上单调递增．又．

∴时，，即，．

∴．

综合①②，得的最小值为．…………………………………………………………12分

（法二）要证，，

即证，

即证．

又，∴只需证时，，且．

设，．

则时，，．

∴在上单调递增，在上单调递减．

又，．

∴时，，且．

∴，．

∴．

综合①②，得的最小值为．…………………………………………………………12分