**专题一：函数与导数(1) 2016.3.1**

**核心考点一：讨论参变量求解单调区间、极值**

例1、已知函数，讨论的单调性。

解：由题意知的定义域为，=.

令*，*且，则判别式.

①若，即，则在上恒成立，

即在上恒成立，

所以在上单调递增，无减区间.

②若，即，令得，.

由韦达定理可知，，，所以.

令，得或；令，得，

所以在和上单调递增，

在上单调递减.

综上，若，在上单调递增，无减区间；

若，在和上单调递增，

在上单调递减.

练习：已知函数，求函数的单调区间和极值。

解：的定义域为，

.

令，得. 因为，所以，

故和都为的极值点，，.

①若，则.

当或时，；当时，，

所以的单调增区间为和，单调减区间为.

故的极大值为，极小值为.

②若，则.

当或时，；当时，，

所以的单调增区间为和，单调减区间为.

故的极大值为，极小值为.

综上，若，的单调增区间为和，单调减区间为，极大值为，极小值为.

若，的单调增区间为和，单调减区间为，

极大值为，极小值为.

**核心考点二：已知区间单调和不单调，求解参变量的范围**

例2、设函数

1. 求曲线在点处的切线方程；
2. 求函数的单调区间；
3. 若函数在区间（-1,1）上单调递增，求实数的取值范围。

解：

（1）由，可得. 因此，.

所以曲线在点的切线方程为.

（2）令，得，.

①若，则当时，，此时单调递减；

当时，，此时单调递增.

②若，则当时，，此时单调递增；

当时，，此时单调递减.

所以当时，的减区间为，增区间为；

当时，的增区间为，减区间为.

（3）

法一：若在区间上单调递增，由（2）知，当时，则，

即；当时，则，即. 故的取值范围为.

法二：若在区间上单调递增，则在上恒成立.

因为，故在上恒成立，这等价于，

即，又因为，所以的取值范围为.

练习：

1.已知函数，函数在上存在单调递增区间，求实数m的取值范围。

解：由，得.

在上存在单调递增区间在上有解.

由得，

，

因此的取值范围为.

2.函数

1. 讨论函数的单调区间；
2. 设在区间内是减函数，求实数的取值范围。

解：

（1）由，得.

令，即，其中，判别式.

①若，即，则在上恒成立，

因此在上单调递增.

②若，即或，由得，，.

当或时，；当时，，

所以的单调增区间为和，单调减区间为.

综上，当，在上单调递增；

当或时，的单调增区间为和，单调减区间为.

（2）

法一：由（1）可得或，即，解得.

法二：在

在上恒成立.

，代入解得

法三：在

在上恒成立.

由，分离变量可得，.

令，，则=在上恒成立，

所以在上单调递增，因此=2.

因为在上恒成立，所以只要.

**压轴题选做**

1.已知函数，内各有一个极值点

(1)求的最大值；

(2)当时，设函数在点处得切线为，若在点A处的切线穿过函数的图象，求的表达式。

解：

（1）

法一：由，得. 设和为的两个极值点，，，则和为的两根. 由韦达定理可得+，. 所以.

法二：同法一，和为的两根，，

，即.

转化为一个线性规划问题，目标函数. 画出可行域，

易知当，取得最大值16.

（2）由知在点处的切线方程为

，即.

因为切线在点处穿过的图象，

所以在两边附近的函数值异号，

则不是的极值点.

而，

故=.

若，则和都是的极值点，不满足题意.

所以，即. 又由，得，故.

（注：事实上，点的横坐标为二阶导数值为0的方程的根）

2.已知在区间上是增函数，

(1)求实数a的值组成的集合A;

(2)设关于x的方程的两个非零实数根，试问：是否存在实数m，使得不等式对任意恒成立？若存在，求出m的取值范围，若不存在，说明理由。

解：

（1）因为在区间上是增函数，所以，即在上恒成立.

令，只需即可，所以，解得，

所以.

（2）由得，，整理得，即. 又因为和是方程的两个非零实数根，所以和是的两根. 由韦达定理可得，.

因此.

因为不等式对任意，恒成立，

所以只要=3，即（\*）即可.

法一：

当时，（\*）式不成立. 令，可看成关于变量的一次函数，所以要使对恒成立，只要即可，即，解得或.

法二：

分离变量. 当时，（\*）式不成立.

1. 若，由可得，对恒成立，

所以只要即可，解得；

1. 若，由可得，对恒成立，

所以只要即可，解得.

综上，或.