**专题一：函数与导数(2) 2016.3.2**

**核心考点三：函数的解析式及函数的性质**

例1.定义在R上的奇函数有最小正周期2，且时，

1. 求在上的解析式；
2. 判断在上的单调性，并给予证明。

解：

（1）设，则，，

所以，.

（2）因为的最小正周期是2，所以在上的单调性与上的单调性相同.

下面证明在上单调递减.

法一：

设，

，，，.

在上单调递减，即在上单调递减.

法二：

由，求导可得对恒成立，所以在上单调递减，即在上单调递减.

例2.设函数是定义在上的奇函数，当时，

，

1. 当时，求的解析式；
2. 若，判断在上的单调性，并给出证明；

(3)是否存在a，使得当时，的最大值为-6.

解：

（1）设，则，，

因此，.

（2）在上单调递增.

证明：当时，，所以.

由得，. 又因为，所以上恒成立，当且仅当且时，等号成立. 所以在上单调递增.

（3）由（2）可得，当时，在上单调递增，，

令，得，不符合题意，舍去.

当时， 令，得.

当时，，单调递增；当时，，单调递减，所以，解得，符合题意.

所以存在，使得当时，的最大值为-6.

**核心考点四：抽象函数的处理**

例3.定义在R上的函数，对于，均有，

1. 求证：；
2. 求证：为偶函数；
3. 若存在常数c使得成立，求证：函数为周期函数。

解：

（1）令，得，因为，所以.

（2）令，得，所以，，所以为偶函数.

（3）令，得.

用代换，得，所以.

所以，故为的一个周期，为周期函数.

例4.已知函数为定义在R上不恒为0的函数，且对于均有

1. 求的值；
2. 判断的奇偶性，并证明你的结论；
3. 若求证：

解：

（1）令，得；

令，得，所以.

（2）令，，得.

再令，得，所以.

故，即为奇函数.

（3）先求. 令，，得，

所以.下面用数学归纳法证明.

①当时，，等式成立；

②假设当时，，那么当时，

，

所以当时，等式也成立.

由①和②可得，成立.

**核心考点五：函数的零点问题**

例5.已知二次函数的导数的图象与直线平行，且在处取得极小值，设，问k取什么值时，函数存在零点，并求出零点。

解：依题可设，则，

又的图象与直线平行，所以，即.

所以，.

由，得（\*）.

当时，方程（\*）有一解，函数有一零点；

当时，方程（\*）有两解，

若，则，函数有两个零点，即；

若，则，函数有两个零点，即；

当时，方程（\*）有一解，，

函数有一零点.

综上，当时，函数有一零点；

当，或时，函数有两个零点；

当时，函数有一零点.

例6.已知是函数的一个极值点。

1. 求a的值；
2. 求函数的单调区间；
3. 若直线与函数的图象有3个交点，求b的取值范围。

解：

（1）因为，所以，因此.

经检验，当时，是函数的一个极值点，满足题意.

（2）由（1）知，，，

，当时，；当时，. 所以的单调增区间是，，单调减区间是.

（3）由（2）知，在上单调递增，在上单调递减，在上单调递增，且当或时，.

所以的极大值为，极小值为.

因为，，

所以在的三个单调区间，，直线与的图象各有一个交点，当且仅当. 因此，的取值范围为.

**核心考点六：利用导数证明不等式**

例7.已知函数

1. 求的极小值；
2. 若，证明：

解：

（1）的定义域为，. 令，得.

当时，，单调递减；当时，，单调递增.

所以的极小值为.

（2）由（1）得，在处取得最小值，即，

令，得，整理得，即.

例8.已知函数

1. 求函数的最大值；
2. 当时，求证：

解：

（1）由，得，

所以. 令，得.

当时，，单调递增；当时，，单调递减.

所以的最大值为.

（2）证明：

.

由（1）知，所以=.

又因为，所以，所以，因此，

即.

法二：令，由，得. 要证， 即证.

令，则.

因为，所以在上恒成立，故在上单调递增，

所以，即，所以得证.

法三：把当常量，当变量处理.

令，则只要证明在上恒成立即可.

易知在上恒成立，所以在上单调递减，故，即原不等式得证.

**压轴题选做**

1.已知

(1)若时，恒成立，求实数a的取值范围；

(2)当时，证明：

解：

（1）由得，，即对恒成立，

故只要即可.

令，，则.

令，，则上恒成立，

所以在上单调递减，故，即在上恒成立，所以在上单调递减，故，所以.

（2）

法一：

取，由（1）可得对恒成立，用代换得，经过整理可得到（当且仅当时等号成立），

所以. 不等式两边同乘以即可得.

法二：

先证明不等式，即证.

构造函数，则恒成立，所以在上单调递减，故，所以对恒成立. 余下证明部分与法一相同，不再赘述.

2.设

(1)当时，求证：；

(2)当时，求证：

解：

（1）令，

则在上恒成立，

所以在上单调递减，故，即，.

（2）由（1）得，当时，. 分别取代入，可得到个不等式，累加即可证得.

下面证明.

法一：

1. 当时，显然成立；
2. 当时，先证明不等式，即证，显然成立. 所以. 因此

.

由①和②可得，对成立.

法二：用数学归纳法证明.

1. 当时，显然成立；
2. 假设当时，.

则当时，.

下证，即证，

即证，即证，

即证，显然成立.

所以，即当时，不等式也成立.

由①和②可得，对成立.