解析几何专练：最值与范围问题（20151230）

班级 姓名

1．[2015·浙江卷] 已知椭圆＋*y*2＝1上两个不同的点*A*，*B*关于直线*y*＝*mx*＋对称．

(1)求实数*m*的取值范围；

D:\2015文件\数学\浙江卷（理数）-TY2\ZJL6.EPS(2)求△*AOB*面积的最大值(*O*为坐标原点)．

解：(1)由题意知*m*≠0，可设直线*AB*的方程为*y*＝－*x*＋*b*.

由

消去*y*，得*x*2－*x*＋*b*2－1＝0.

因为直线*y*＝－*x*＋*b*与椭圆＋*y*2＝1有两个不同的交点，

所以*Δ*＝－2*b*2＋2＋>0.①

将*AB*的中点*M*的坐标代入直线方程

*y*＝*mx*＋，解得*b*＝－.②

由①②得，*m*<－或*m*>.

(2)令*t*＝∈∪，则

|*AB*|＝·，

且*O*到直线*AB*的距离*d*＝.

设△*AOB*的面积为*S*(*t*)，所以

*S*(*t*)＝|*AB*|·*d*＝ ≤，

当且仅当*t*2＝时，等号成立．

故△*AOB*面积的最大值为.

2.[2015·天津卷] 已知椭圆＋＝1(*a*>*b*>0)的左焦点为*F*(－*c*，0)，离心率为，点*M*在椭圆上且位于第一象限，直线*FM*被圆*x*2＋*y*2＝截得的线段的长为*c*，|*FM*|＝.

(1)求直线*FM*的斜率；

(2)求椭圆的方程；

(3)设动点*P*在椭圆上，若直线*FP*的斜率大于，求直线*OP*(*O*为原点)的斜率的取值范围．

解：(1)由已知有＝，又由*a*2＝*b*2＋*c*2，可得*a*2＝3*c*2，*b*2＝2*c*2.

设直线*FM*的斜率为*k*(*k*>0)，则直线*FM*的方程为*y*＝*k*(*x*＋*c*)．由已知，有2＋2＝2，解得*k*＝.

(2)由(1)得椭圆方程为＋＝1，直线*FM*的方程为*y*＝(*x*＋*c*)，两个方程联立，消去*y*，整理得3*x*2＋2*cx*－5*c*2＝0，解得*x*＝－*c*或*x*＝*c*.因为点*M*在第一象限，所以*M*的坐标为*c*，*c*.由|*FM*|＝＝，解得*c*＝1，所以椭圆的方程为＋＝1.

(3)设点*P*的坐标为(*x*，*y*)，直线*FP*的斜率为*t*，则*t*＝，即*y*＝*t*(*x*＋1)(*x*≠－1)，与椭圆方程联立消去*y*，整理得2*x*2＋3*t*2(*x*＋1)2＝6.又由已知，得*t*＝>，解得－<*x*<－1或－1<*x*<0.

设直线*OP*的斜率为*m*，则*m*＝，即*y*＝*mx*(*x*≠0)．与椭圆方程联立，整理可得*m*2＝－.

①当*x*∈－，－1时，有*y*＝*t*(*x*＋1)<0，因此*m*>0，于是*m*＝，得*m*∈，.

②当*x*∈(－1，0)时，有*y*＝*t*(*x*＋1)>0，因此*m*<0，于是*m*＝－，得*m*∈－∞，－.

综上，直线*OP*的斜率的取值范围是－∞，－∪，.

3. [2015·山东卷] 平面直角坐标系*xOy*中，已知椭圆*C*：＋＝1(*a*>*b*>0)的离心率为，左、右焦点分别是*F*1，*F*2.以*F*1为圆心以3为半径的圆与以*F*2为圆心以1为半径的圆相交，且交点在椭圆*C*上．

(1)求椭圆*C*的方程．

(2)设椭圆*E*：＋＝1，*P*为椭圆*C*上任意一点．过点*P*的直线*y*＝*kx*＋*m*交椭圆*E*于*A*，*B*两点，射线*PO*交椭圆*E*于点*Q*.

(i)求的值；

(ii)求△*ABQ*面积的最大值．

解：(1)由题意知2*a*＝4，则*a*＝2，又＝，*a*2－*c*2＝*b*2，

可得*b*＝1，所以椭圆*C*的方程为＋*y*2＝1.

(2)由(1)知，椭圆*E*的方程为＋＝1，

(i)设*P*(*x*0，*y*0)，＝*λ*，由题意知*Q*(－*λx*0，－*λy*0)．因为＋*y*＝1，

且＋＝1，即＝1，所以*λ*＝2，即＝2.

(ii)设*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)．将*y*＝*kx*＋*m*代入椭圆*E*的方程，

可得(1＋4*k*2)*x*2＋8*kmx*＋4*m*2－16＝0，由*Δ*>0，可得*m*2<4＋16*k*2，①

则有*x*1＋*x*2＝－，*x*1*x*2＝，所以|*x*1－*x*2|＝.

因为直线*y*＝*kx*＋*m*与*y*轴交点的坐标为(0，*m*)，

所以△*OAB*的面积*S*＝|*m*||*x*1－*x*2|＝

＝＝2.

设＝*t*.

将*y*＝*kx*＋*m*代入椭圆*C*的方程，可得(1＋4*k*2)*x*2＋8*kmx*＋4*m*2－4＝0，

由*Δ*≥0，可得*m*2≤1＋4*k*2.②由①②可知0<*t*≤1，

因此*S*＝2＝2.故*S*≤2，

当且仅当*t*＝1，即*m*2＝1＋4*k*2时，*S*取得最大值2，

由(i)知，△*ABQ*的面积为3*S*，

所以△*ABQ*面积的最大值为6.

4. [2015·湖北卷] 一种作图工具如图1­6所示．*O*是滑槽*AB*的中点，短杆*ON*可绕*O*转动，长杆*MN*通过*N*处铰链与*ON*连接，*MN*上的栓子*D*可沿滑槽*AB*滑动，且*DN*＝*ON*＝1，*MN*＝3.当栓子*D*在滑槽*AB*内作往复运动时，带动*N*绕*O*转动一周(*D*不动时，*N*也不动)，*M*处的笔尖画出的曲线记为*C*.以*O*为原点，*AB*所在的直线为*x*轴建立如图1­7所示的平面直角坐标系．

(1)求曲线*C*的方程．

D:\2015文件\数学\湖北卷（理数）-TY3\H11.EPS(2)设动直线*l*与两定直线*l*1：*x*－2*y*＝0和*l*2：*x*＋2*y*＝0分别交于*P*，*Q*两点．若直线*l*总与曲线*C*有且只有一个公共点，试探究：△*OPQ*的面积是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由．

D:\2015文件\数学\湖北卷（理数）-TY3\H11a.EPS

解：(1)设点*D*(*t*，0)(|*t*|≤2)，*N*(*x*0，*y*0)，*M*(*x*，*y*)，依题意，

＝2，且||＝||＝1，所以(*t*－*x*，－*y*)＝2(*x*0－*t*，*y*0)，

D:\2015文件\数学\湖北卷（理数）-TY3\H16.EPS且即且*t*(*t*－2*x*0)＝0.

由于当点*D*不动时，点*N*也不动，所以*t*不恒等于0，

于是*t*＝2*x*0，故*x*0＝，*y*0＝－，代入*x*＋*y*＝1，可得＋＝1，

即所求的曲线*C*的方程为＋＝1.

(2)(i)当直线*l*的斜率不存在时，直线*l*为*x*＝4或*x*＝－4，都有*S*△*OPQ*＝×4×4＝8.

(ii)当直线*l*的斜率存在时，设直线*l*：*y*＝*kx*＋*m*，

由消去*y*，可得(1＋4*k*2)*x*2＋8*kmx*＋4*m*2－16＝0.

因为直线*l*总与椭圆*C*有且只有一个公共点，

所以*Δ*＝64*k*2*m*2－4(1＋4*k*2)(4*m*2－16)＝0，即*m*2＝16*k*2＋4.①

又由可得*P*；

同理可得*Q*.

由原点*O*到直线*PQ*的距离*d*＝和|*PQ*|＝|*xP*－*xQ*|，可得

*S*△*OPQ*＝|*PQ*|·*d*＝|*m*||*xP*－*xQ*|＝|*m*|·＋＝.②

将①代入②得，*S*△*OPQ*＝＝8.

当*k*2>时，*S*△*OPQ*＝8·＝8>8；

当0≤*k*2<时，*S*△*OPQ*＝8·＝8.

因0≤*k*2<，则0<1－4*k*2≤1，≥2，所以*S*△*OPQ*＝8≥8，当且仅当*k*＝0时取等号．

所以当*k*＝0时，*S*△*OPQ*的最小值为8.

综合(i)(ii)可知，当直线*l*与椭圆*C*在四个顶点处相切时，△*OPQ*的面积取得最小值8.

5.[2014·湖北卷] 在平面直角坐标系*xOy*中，点*M*到点*F*(1，0)的距离比它到*y*轴的距离多1.记点*M*的轨迹为*C*.

(1)求轨迹*C*的方程；

(2)设斜率为*k*的直线*l*过定点*P*(－2，1)，求直线*l*与轨迹*C*恰好有一个公共点、两个公共点、三个公共点时*k*的相应取值范围．

解：(1)设点*M*(*x*，*y*)，依题意得|*MF*|＝|*x*|＋1，即＝|*x*|＋1，

化简整理得*y*2＝2(|*x*|＋*x*)．

故点*M*的轨迹*C*的方程为*y*2＝

(2)在点*M*的轨迹*C*中，记*C*1：*y*2＝4*x*，*C*2：*y*＝0(*x*<0)．

依题意，可设直线*l*的方程为*y*－1＝*k*(*x*＋2)．

由方程组可得*ky*2－4*y*＋4(2*k*＋1)＝0.①

当*k*＝0时，*y*＝1.把*y*＝1代入轨迹*C*的方程，得*x*＝.

故此时直线*l*：*y*＝1与轨迹*C*恰好有一个公共点.

当*k*≠0时，方程①的判别式*Δ*＝－16(2*k*2＋*k*－1)．②

设直线*l*与*x*轴的交点为(*x*0，0)，则由*y*－1＝*k*(*x*＋2)，令*y*＝0，得*x*0＝－.③

(i)若由②③解得*k*<－1或*k*>.

即当*k*∈(－∞，－1)∪时，直线*l*与*C*1没有公共点，与*C*2有一个公共点．故此时直线*l*与轨迹*C*恰好有一个公共点．

(ii)若或

由②③解得*k*∈或－≤*k*<0.

即当*k*∈时，直线*l*与*C*1只有一个公共点．

当*k*∈时，直线*l*与*C*1有两个公共点，与*C*2没有公共点．

故当*k*∈∪时，直线*l*与轨迹*C*恰好有两个公共点．

(iii)若由②③解得－1<*k*<－或0<*k*<.

即当*k*∈∪时，直线*l*与*C*1有两个公共点，与*C*2有一个公共点，

故此时直线*l*与轨迹*C*恰好有三个公共点．

综上可知，当*k*∈∪∪{0}时，直线*l*与轨迹*C*恰好有一个公共点；当*k*∈∪时，直线*l*与轨迹*C*恰好有两个公共点；当*k*∈∪时，直线*l*与轨迹*C*恰好有三个公共点．

6. （2013浙江卷）如图，点是椭圆的一个顶点，的长轴是圆的直径.是过点且互相垂直的两条直线，其中交圆学科网(www.zxxk.com)--国内最大的教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！于两点，交椭圆于另一点

（1）求椭圆的方程； 学科网(www.zxxk.com)--国内最大的教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！（2）求面积取最大值时直线的方程.

解：（Ⅰ）由已知得到，且，所以椭圆的方程是；

*x*

*O*

*y*

*B*

*l*1

*l*2

*P*

*D*

*A*

（第6题图）

（Ⅱ）因为直线，且都过点，所以设直线，

直线，所以圆心到直线的距离为，学科网(www.zxxk.com)--国内最大的教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！所以直线被圆所截的弦；

由，所学科网(www.zxxk.com)--国内最大的教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！以

，所以

，

当时等号成立，此时直线

7. 过抛物线的焦点F作斜率分别为的两条不同的直线，且，相交于点A，B，相交于点C，D。以AB，CD为直径的圆M，圆N（M，N为圆心）的公共弦所在的直线记为。

（I）若，证明；；

（II）若点M到直线的距离的最小值为，求抛物线E的方程。

解： (Ⅰ) 



.



所以，成立. (证毕)

（Ⅱ）



则，



.





8（2012四川) 如图，动点lfxlby到两定点lfxlby、lfxlby构成lfxlby，且lfxlby，设动点lfxlby的轨迹为lfxlby。

（Ⅰ）求轨迹lfxlby的方程；

lfxlby（Ⅱ）设直线lfxlby与lfxlby轴交于点lfxlby，与轨迹lfxlby相交于点lfxlby，且lfxlby，求lfxlby的取值范围。

[解析]（1）设M的坐标为（x,y），显然有x>0,lfxlby.

当∠MBA=90°时，点M的坐标为（2，, ±3）

当∠MBA≠90°时；x≠2.由∠MBA=2∠MAB,

有tan∠MBA=lfxlby,即lfxlby

化简得：3x2-y2-3=0,而又经过（2，,±3）

综上可知，轨迹C的方程为3x2-y2-3=0（x>1）…………………5分

(II)由方程lfxlbylfxlby消去y，可得lfxlby。（\*）

由题意，方程（\*）有两根且均在（1，+lfxlby）内，设lfxlby

所以lfxlby

解得，m>1,且mlfxlby2

设Q、R的坐标分别为lfxlby，由lfxlby有

lfxlby

所以lfxlby

由m>1，且mlfxlby2，有

lfxlby

所以lfxlby的取值范围是lfxlby................................................ 12分