**处理“导数零点不可求问题”的方法**

1. 若函数*f*(*x*)＝*x*3＋*ax*2＋*bx*＋*c*有极值点*x*1，*x*2，且*f*(*x*1)＝*x*1，则关于*x*的方程

3(*f*(*x*))2＋2*af*(*x*)＋*b*＝0的不同实根个数是(　)

A．3 B．4 C．5 D．6

2. 若，则下列不等式恒成立的是(　)

A.  B. C. D.

3．函数*f*(*x*)的定义域是**R**，*f*(0)＝2，对任意*x*∈**R**，*f*(*x*)＋*f*′(*x*)>1，则不等式e*x*·*f*(*x*)>e*x*＋1的解集为(　　)．

A. B. C. D.

4．已知函数*f*(*x*)＝ln *x*－e*x*＋*a*.

(1)若*x*＝1是*f*(*x*)的极值点，讨论*f*(*x*)的单调性；(2)当*a*≥－2时，证明：*f*(*x*)＜0.

5．设函数*f*(*x*)＝ln *x*＋，*m*∈**R**.(1)当*m*＝e(e为自然对数的底数)时，求*f*(*x*)的极小值；(2)讨论函数*g*(*x*)＝*f*′(*x*)－零点的个数；(3)若对任意*b*＞*a*＞0，＜1恒成立，求*m*的取值范围．

6.设函数f(x)＝aexln x＋，曲线y＝f(x)在点(1，f(1))处的切线方程为y＝e(x－1)＋2.(1)求a，b；(2)证明：f(x)>1.

7. 设，曲线与

直线在(0，0)点相切. (Ⅰ)求的值; (Ⅱ)证明：当时，.

练习：

1．已知*f*(*x*)是定义在(0，＋∞) 上的非负可导函数，且满足*xf*′(*x*)＋*f*(*x*)≤0，对任意的0<*a*<*b*，则必有(　　)．

A．*af*(*b*)≤*bf*(*a*) B．*bf*(*a*)≤*af*(*b*) C．*af*(*a*)≤*f*(*b*) D．*bf*(*b*)≤*f*(*a*)

2．已知e是自然对数的底数，函数*f*(*x*)＝e*x*＋*x*－2的零点为*a*，

函数*g*(*x*)＝ln *x*＋*x*－2的零点为*b*，则下列不等式中成立的是(　　)．

A．*f*(*a*)＜*f*(1)＜*f*(*b*) B．*f*(*a*)＜*f*(*b*)＜*f*(1) C．*f*(1)＜*f*(*a*)＜*f*(*b*) D．*f*(*b*)＜*f*(1)＜*f*(*a*)

3．设L为曲线C:在点(1,0)处的切线.

(I)求*L*的方程; (II)证明:除切点(1,0)之外,曲线C在直线*L*的下方.

4. 设函数（为常数，是自然对数的底数）.

（Ⅰ）当时，求函数的单调区间；

（Ⅱ）若函数在内存在两个极值点，求的取值范围.

5．已知函数www.gkxx.com.(Ⅰ)设www.gkxx.com是www.gkxx.com的极值点,求www.gkxx.com,并讨论www.gkxx.com的单

调性; (Ⅱ)当www.gkxx.com时,证明www.gkxx.com.

6. 已知函数满足满足；

（1）求的解析式及单调区间；（2）若，求的最大值.

7．已知函数

(I)求证: (II)若恒成立,求实数取值范围.

处理“导数零点不可求问题”的方法

一 数形结合

1．(2013·安徽卷)若函数*f*(*x*)＝*x*3＋*ax*2＋*bx*＋*c*有极值点*x*1，*x*2，且*f*(*x*1)＝*x*1，则关于*x*的方程3(*f*(*x*))2＋2*af*(*x*)＋*b*＝0的不同实根个数是 (　　)．

A．3 B．4 C．5 D．6

解析　因为函数*f*(*x*)＝*x*3＋*ax*2＋*bx*＋*c*有两个极值点*x*1，*x*2，可知关于导函数的方程*f*′(*x*)＝3*x*2＋2*ax*＋*b*＝0有两个不等的实根*x*1，*x*2，则方程3(*f*(*x*))2＋2*af*(*x*)＋*b*＝0有两个不等的实根，即*f*(*x*)＝*x*1或*f*(*x*)＝*x*2，原方程根的个数就是这两个方程*f*(*x*)＝*x*1和*f*(*x*)＝*x*2的不等实根的个数之和，若*x*1<*x*2，作*y*＝*x*1，*y*＝*x*2与*f*(*x*)＝*x*3＋*ax*2＋*bx*＋*c*有三个不同交点如图1.

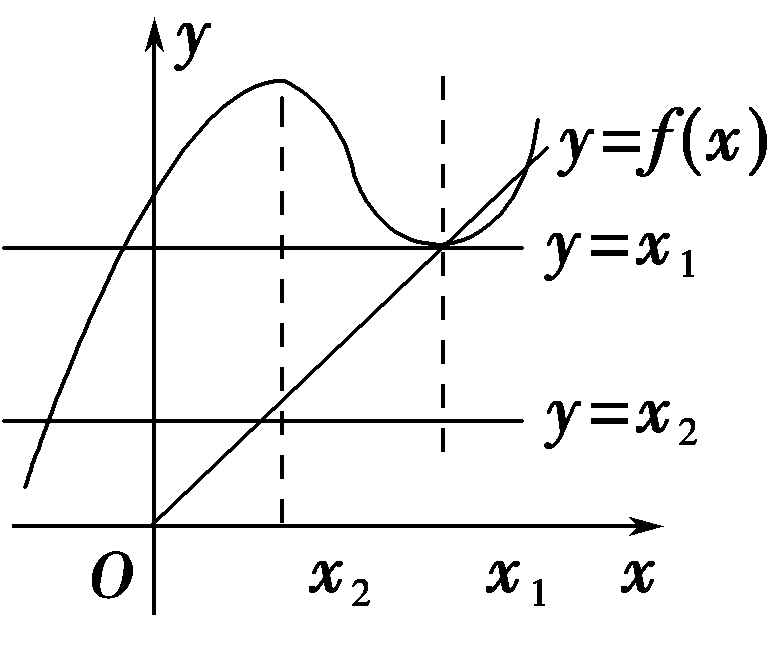
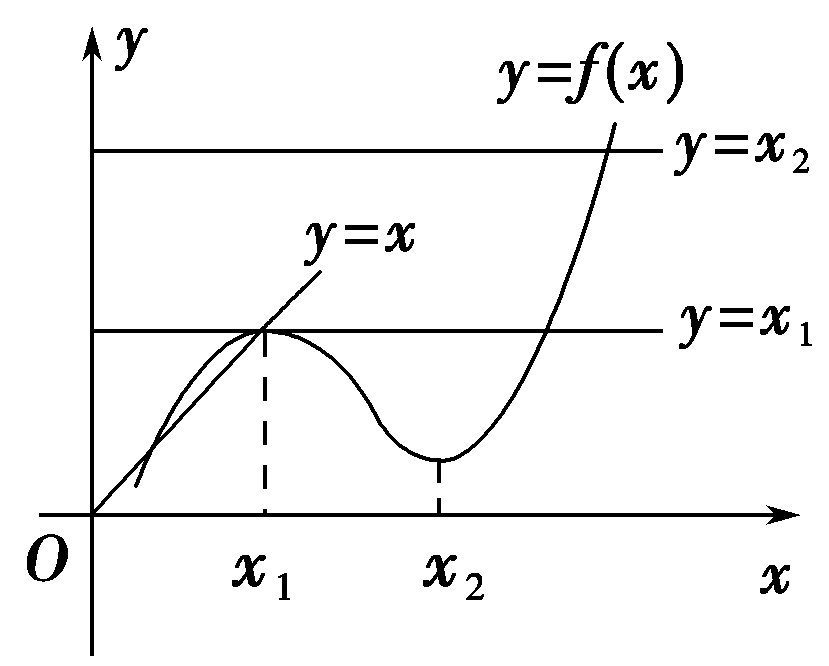


图1　　　　　　　　　图2

即方程3(*f*(*x*))2＋2*af*(*x*)＋*b*＝0有三个不同的实根．

若*x*1>*x*2，如图2同理方程3(*f*(*x*))2＋2*af*(*x*)＋*b*＝0有三个不同实根．

答案　A

二 二次求导

2.【2012高考真题辽宁理12】若，则下列不等式恒成立的是

(A) (B)

(C) (D)

**【答案】**C

**【解析】**设，则

所以所以当时，



同理即**，**故选C

**【点评】**本题主要考查导数公式，以及利用导数，通过函数的单调性与最值来证明不等式，考查转化思想、推理论证能力、以及运算能力，难度较大。

三 单调性

3．函数*f*(*x*)的定义域是**R**，*f*(0)＝2，对任意*x*∈**R**，*f*(*x*)＋*f*′(*x*)>1，则不等式e*x*·*f*(*x*)>e*x*＋1的解集为(　　)．

A. B. C. D.

解析　构造函数*g*(*x*)＝e*x*·*f*(*x*)－e*x*，因为*g*′(*x*)＝e*x*·*f*(*x*)＋e*x*·*f*′(*x*)－e*x*＝e*x*[*f*(*x*)＋*f*′(*x*)]－e*x*>e*x*－e*x*＝0，所以*g*(*x*)＝e*x*·*f*(*x*)－e*x*为**R**上的增函数．又因为*g*(0)＝e0·*f*(0)－e0＝1，所以原不等式转化为*g*(*x*)>*g*(0)，解得*x*>0.

答案　A

四 虚拟设根 整体代换

4．(2014·昆明调研测试)已知函数*f*(*x*)＝ln *x*－e*x*＋*a*.

(1)若*x*＝1是*f*(*x*)的极值点，讨论*f*(*x*)的单调性；(2)当*a*≥－2时，证明：*f*(*x*)＜0.

(1)解　*f*′(*x*)＝－e*x*＋*a*(*x*＞0)，

∵*x*＝1是*f*(*x*)的极值点，∴*f*′(1)＝1－e1＋*a*＝0，

∴*a*＝－1，此时*f*′(*x*)＝－e*x*－1，

当*x*∈(0,1)时，*f*′(*x*)＞0，*f*(*x*)在(0,1)内单调递增，

当*x*∈(1，＋∞)时，*f*′(*x*)＜0，*f*(*x*)在(1，＋∞)内单调递减．

(2)证明　当*a*≥－2时，e*x*＋*a*≥e*x*－2，*f*(*x*)＝ln *x*－e*x*＋*a*

≤ln *x*－e*x*－2，只需证*g*(*x*)＝ln *x*－e*x*－2＜0即可，

*g*′(*x*)＝－e*x*－2，

由*g*′(*x*)＝0，得＝e*x*－2，由图象法知方程有唯一解*x*0∈(1,2)且＝，ln *x*0＝－*x*0＋2，

当*x*∈(0，*x*0)时，*g*′(*x*)＞0，*g*(*x*)在(0，*x*0)内单调递增，

当*x*∈(*x*0，＋∞)时，*g*′(*x*)＜0，*g*(*x*)在(*x*0，＋∞)内单调递减，

∴*g*(*x*)max＝ln *x*0－＝－*x*0＋2－，由*x*0∈(1,2)知*x*0＋＞2＝2，*g*(*x*)max＝－*x*0＋2－＜0.

综上，当*a*≥－2时，*f*(*x*)＜0.

五 分离参数

5．(2014·陕西卷)设函数*f*(*x*)＝ln *x*＋，*m*∈**R**.

(1)当*m*＝e(e为自然对数的底数)时，求*f*(*x*)的极小值；

(2)讨论函数*g*(*x*)＝*f*′(*x*)－零点的个数；

(3)若对任意*b*＞*a*＞0，＜1恒成立，求*m*的取值范围．

解　(1)由题设，当*m*＝e时，*f*(*x*)＝ln *x*＋，

则*f*′(*x*)＝，

∴当*x*∈(0，e)，*f*′(*x*)＜0，*f*(*x*)在(0，e)上单调递减，

当*x*∈(e，＋∞)，*f*′(*x*)＞0，*f*(*x*)在(e，＋∞)上单调递增，

∴*x*＝e时，*f*(*x*)取得极小值*f*(e)＝ln e＋＝2，

∴*f*(*x*)的极小值为2.

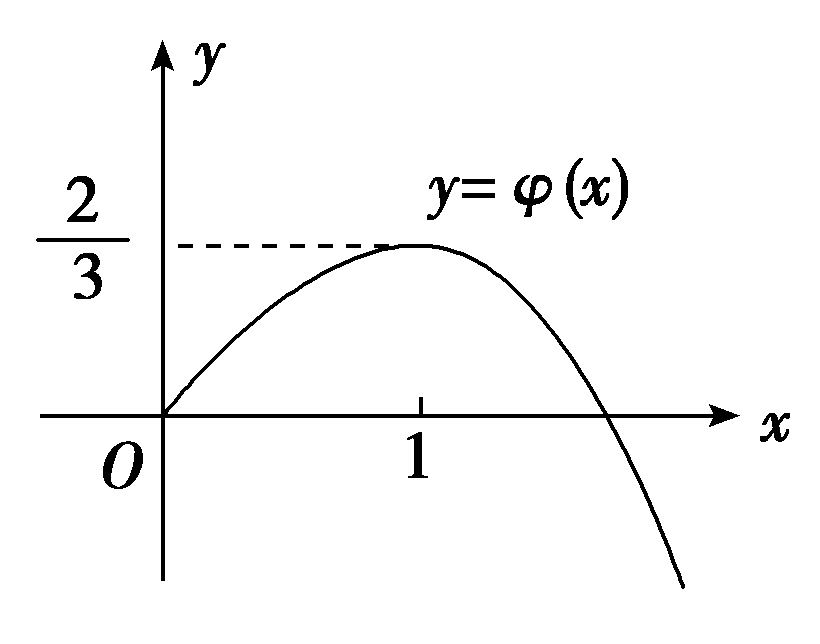
(2)由题设*g*(*x*)＝*f*′(*x*)－＝－－(*x*＞0)，

令*g*(*x*)＝0，得*m*＝－*x*3＋*x*(*x*＞0)．

设*φ*(*x*)＝－*x*3＋*x*(*x*≥0)，

则*φ*′(*x*)＝－*x*2＋1＝－(*x*－1)(*x*＋1)，

当*x*∈(0,1)时，*φ*′(*x*)＞0，*φ*(*x*)在(0,1)上单调递增；



当*x*∈(1，＋∞)时，*φ*′(*x*)＜0，*φ*(*x*)在(1，＋∞)上单调递减．

∴*x*＝1是*φ*(*x*)的唯一极值点，且是极大值点，因此*x*＝1也是*φ*(*x*)的最大值点．

∴*φ*(*x*)的最大值为*φ*(1)＝.

又*φ*(0)＝0，结合*y*＝*φ*(*x*)的图象(如图)，

可知

①当*m*＞时，函数*g*(*x*)无零点；

②当*m*＝时，函数*g*(*x*)有且只有一个零点；

③当0＜*m*＜时，函数*g*(*x*)有两个零点；

④当*m*≤0时，函数*g*(*x*)有且只有一个零点．

综上所述，当*m*＞时，函数*g*(*x*)无零点；

当*m*＝或*m*≤0时，函数*g*(*x*)有且只有一个零点；

当0＜*m*＜时，函数*g*(*x*)有两个零点．

(3)对任意的*b*＞*a*＞0，＜1恒成立，

等价于*f*(*b*)－*b*＜*f*(*a*)－*a*恒成立．(\*)

设*h*(*x*)＝*f*(*x*)－*x*＝ln *x*＋－*x*(*x*＞0)，

∴(\*)等价于*h*(*x*)在(0，＋∞)上单调递减．

由*h*′(*x*)＝－－1≤0在(0，＋∞)上恒成立，

得*m*≥－*x*2＋*x*＝－(*x*－)2＋(*x*＞0)恒成立，

∴*m*≥(对*m*＝，*h*′(*x*)＝0仅在*x*＝时成立)，

∴*m*的取值范围是[，＋∞)．

六 分离函数

6.(2014·新课标全国卷Ⅰ)设函数f(x)＝aexln x＋，曲线y＝f(x)在点(1，f(1))处的切线方程为y＝e(x－1)＋2.

(1)求a，b；

(2)证明：f(x)>1.

(1)解　函数f(x)的定义域为(0，＋∞)，

f′(x)＝aexln x＋ex－ex－1＋ex－1.

由题意可得f(1)＝2，f′(1)＝e.

故a＝1，b＝2.

(2)证明　由(1)知，f(x)＝exln x＋ex－1，

从而f(x)>1等价于xln x>xe－x－.

设函数g(x)＝xln x，

则g′(x)＝1＋ln x.

所以当x∈时，g′(x)<0；

当x∈时，g′(x)>0.

故g(x)在上单调递减，在上单调递增，

从而g(x)在(0，＋∞)上的最小值为g＝－.

设函数h(x)＝xe－x－，

则h′(x)＝e－x(1－x)．

所以当x∈(0,1)时，h′(x)>0；

当x∈(1，＋∞)时，h′(x)<0.

故h(x)在(0,1)上单调递增，在(1，＋∞)上单调递减，

从而h(x)在(0，＋∞)上的最大值为h(1)＝－.

综上，当x>0时，g(x)>h(x)，即f(x)>1.

七 放缩法

7.【2012高考真题辽宁理21】本小题满分12分)

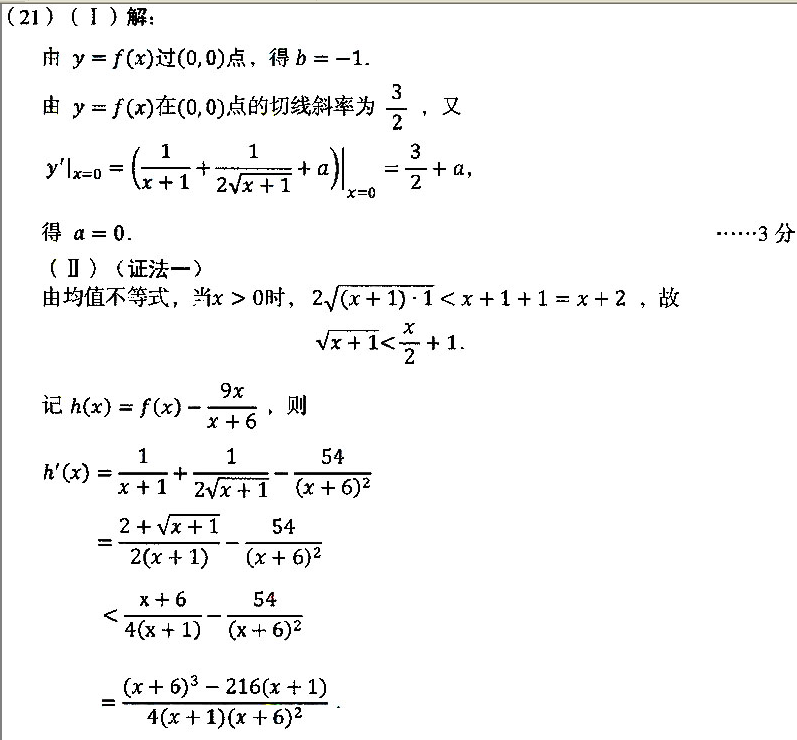
设，曲线与

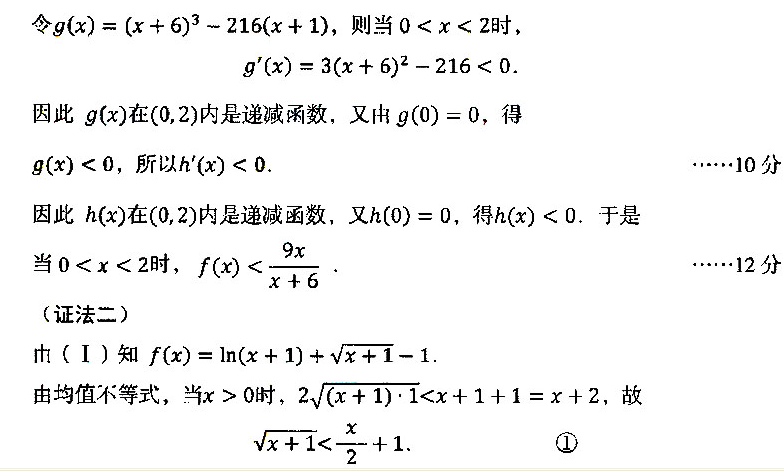
直线在(0，0)点相切。

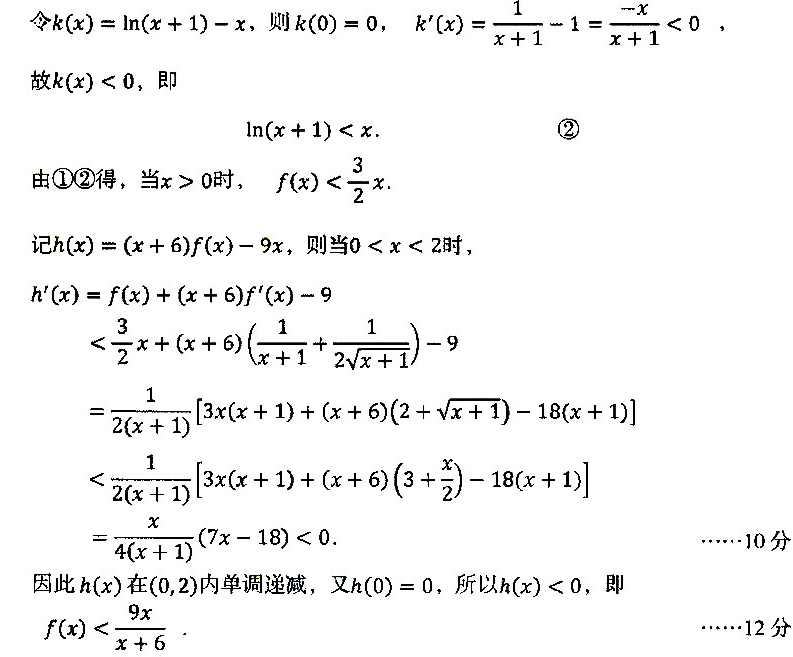
(Ⅰ)求的值。

(Ⅱ)证明：当时，。

**【答案】**

****

****

****

练习：

1．已知*f*(*x*)是定义在(0，＋∞) 上的非负可导函数，且满足*xf*′(*x*)＋*f*(*x*)≤0，对任意的0<*a*<*b*，则必有(　　)．

A．*af*(*b*)≤*bf*(*a*) B．*bf*(*a*)≤*af*(*b*) C．*af*(*a*)≤*f*(*b*) D．*bf*(*b*)≤*f*(*a*)

解析　因为*xf*′(*x*)≤－*f*(*x*)，*f*(*x*)≥0，

所以′＝≤≤0，

则函数在(0，＋∞)上单调递减．

由于0<*a*<*b*，则≥，即*af*(*b*)≤*bf*(*a*)．

答案　A

2．(2014·汕头模拟)已知e是自然对数的底数，函数*f*(*x*)＝e*x*＋*x*－2的零点为*a*，函数*g*(*x*)＝ln *x*＋*x*－2的零点为*b*，则下列不等式中成立的是(　　)．

A．*f*(*a*)＜*f*(1)＜*f*(*b*) B．*f*(*a*)＜*f*(*b*)＜*f*(1) C．*f*(1)＜*f*(*a*)＜*f*(*b*) D．*f*(*b*)＜*f*(1)＜*f*(*a*)

解析　由题意，知*f*′(*x*)＝e*x*＋1＞0恒成立，所以函数*f*(*x*)在**R**上是单调递增的，而*f*(0)＝e0＋0－2＝－1＜0，*f*(1)＝e1＋1－2＝e－1＞0，所以函数*f*(*x*)的零点*a*∈(0,1)；

由题意，知*g*′(*x*)＝＋1＞0，所以*g*(*x*)在(0，＋∞)上是单调递增的，又*g*(1)＝ln 1＋1－2＝－1＜0，*g*(2)＝ln 2＋2－2＝ln 2＞0，所以函数*g*(*x*)的零点*b*∈(1,2)．

综上，可得0＜*a*＜1＜*b*＜2.

因为*f*(*x*)在**R**上是单调递增的，所以*f*(*a*)＜*f*(1)＜*f*(*b*)．

答案　A

3．（2013年高考北京卷（理））设L为曲线C:在点(1,0)处的切线.

(I)求*L*的方程;

(II)证明:除切点(1,0)之外,曲线C在直线*L*的下方.

【答案】解: (I)设,则.所以.所以L的方程为.

(II)令,则除切点之外,曲线C在直线的下方等价于. 满足,且.

当时,,,所以,故单调递减;

当时,,,所以,故单调递增.

所以,().

所以除切点之外,曲线C在直线L的下方.

又解:即变形为,记,则,

所以当时,,在(0,1)上单调递减;

当时,,在(1,+∞)上单调递增.

所以.)

4. （2014·山东高考理科·Ｔ20）设函数（为常数，是自然对数的底数）.

（Ⅰ）当时，求函数的单调区间；

（Ⅱ）若函数在内存在两个极值点，求的取值范围.

【解题指南】(1)先利用导数公式求函数的导数,根据单调性与导数的关系求出函数的单调区间.(2)本题可对k进行分类讨论，由（Ⅰ）知,函数在内不存在极值点，因此只需考虑时，是否存在两个极值点即可.

【解析】（Ⅰ）



（Ⅱ）由（Ⅰ）知， 时，函数在内单调递减，故在内不存在极值点，

k>0时

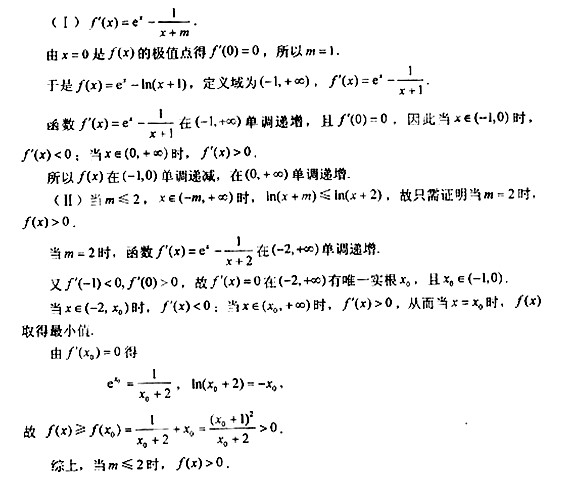


5．（2013年普通高等学校招生统一考试新课标Ⅱ卷数学（理））已知函数www.gkxx.com.

(Ⅰ)设www.gkxx.com是www.gkxx.com的极值点,求www.gkxx.com,并讨论www.gkxx.com的单调性;

(Ⅱ)当www.gkxx.com时,证明www.gkxx.com.

【答案】



6.【2012高考真题新课标理21】（本小题满分12分）

已知函数满足满足；

（1）求的解析式及单调区间；

（2）若，求的最大值.

【答案】（1）

令得：



得：

在上单调递增



得：的解析式为

且单调递增区间为，单调递减区间为

（2）得

①当时，在上单调递增

时，与矛盾

②当时，

得：当时，



令；则



当时，

当时，的最大值为

7．（2013年普通高等学校招生统一考试辽宁数学（理））已知函数

(I)求证:

(II)若恒成立,求实数取值范围.

请考生在第22、23、24三题中任选一题做答,如果多做,则按所做的第一题计分.作答时用2B铅笔在答题卡上把所选题目对应题号下方的方框涂黑.

【答案】

