5.(2014安徽,18,12分)设函数f(x)=1+(1+a)x-x2-x3,其中a>0.

(1)讨论f(x)在其定义域上的单调性;

(2)当x∈[0,1]时,求f(x)取得最大值和最小值时的x的值.

解析　(1)f(x)的定义域为(-∞,+∞), f '(x)=1+a-2x-3x2.

令f '(x)=0,得x1=,x2=,x1<x2,

所以f '(x)=-3(x-x1)(x-x2).

当x<x1或x>x2时, f '(x)<0;当x1<x<x2时, f '(x)>0.

故f(x)在(-∞,x1)和(x2,+∞)内单调递减,在(x1,x2)内单调递增.

(2)因为a>0,所以x1<0,x2>0.

①当a≥4时,x2≥1.

由(1)知, f(x)在[0,1]上单调递增.

所以f(x)在x=0和x=1处分别取得最小值和最大值.

②当0<a<4时,x2<1.

由(1)知, f(x)在[0,x2]上单调递增,在[x2,1]上单调递减.

所以f(x)在x=x2=处取得最大值.

又f(0)=1, f(1)=a,所以

当0<a<1时, f(x)在x=1处取得最小值;

当a=1时, f(x)在x=0处和x=1处同时取得最小值;

当1<a<4时, f(x)在x=0处取得最小值.

6.(2014山东,20,13分)设函数f(x)=-k(k为常数,e=2.718 28…是自然对数的底数).

(1)当k≤0时,求函数f(x)的单调区间;

(2)若函数f(x)在(0,2)内存在两个极值点,求k的取值范围.

解析　(1)函数y=f(x)的定义域为(0,+∞).

f '(x)=-k

=-=.

由k≤0可得ex-kx>0,

所以当x∈(0,2)时, f '(x)<0,函数y=f(x)单调递减,

当x∈(2,+∞)时, f '(x)>0,函数y=f(x)单调递增.

所以f(x)的单调递减区间为(0,2),单调递增区间为(2,+∞).

(2)由(1)知,当k≤0时,函数f(x)在(0,2)内单调递减,

故f(x)在(0,2)内不存在极值点;

当k>0时,设函数g(x)=ex-kx,x∈[0,+∞).

因为g'(x)=ex-k=ex-eln k,

当0<k≤1时,

当x∈(0,2)时,g'(x)=ex-k>0,y=g(x)单调递增,

故f(x)在(0,2)内不存在两个极值点;

当k>1时,

得x∈(0,ln k)时,g'(x)<0,函数y=g(x)单调递减,

x∈(ln k,+∞)时,g'(x)>0,函数y=g(x)单调递增.

所以函数y=g(x)的最小值为g(ln k)=k(1-ln k).

函数f(x)在(0,2)内存在两个极值点,

当且仅当解得e<k<.

综上所述,函数f(x)在(0,2)内存在两个极值点时,k的取值范围为.

7.(2014福建,20,14分)已知函数f(x)=ex-ax(a为常数)的图象与y轴交于点A,曲线y=f(x)在点A处的切线斜率为-1.

(1)求a的值及函数f(x)的极值;

(2)证明:当x>0时,x2<ex;

(3)证明:对任意给定的正数c,总存在x0,使得当x∈(x0,+∞)时,恒有x2<cex.

解析　解法一:(1)由f(x)=ex-ax,得f '(x)=ex-a.

又f '(0)=1-a=-1,得a=2.

所以f(x)=ex-2x,f '(x)=ex-2.

令f '(x)=0,得x=ln 2.

当x<ln 2时, f '(x)<0,f(x)单调递减;

当x>ln 2时, f '(x)>0,f(x)单调递增.

所以当x=ln 2时,f(x)取得极小值,

且极小值为f(ln 2)=eln 2-2ln 2=2-ln 4,

f(x)无极大值.

(2)令g(x)=ex-x2,则g'(x)=ex-2x.

由(1)得g'(x)=f(x)≥f(ln 2)>0,

故g(x)在R上单调递增,又g(0)=1>0,

因此,当x>0时,g(x)>g(0)>0,即x2<ex.

(3)①若c≥1,则ex≤cex.又由(2)知,当x>0时,x2<ex.

所以当x>0时,x2<cex.

取x0=0,当x∈(x0,+∞)时,恒有x2<cex.

②若0<c<1,令k=>1,要使不等式x2<cex成立,只要ex>kx2成立.

而要使ex>kx2成立,则只要x>ln(kx2),只要x>2ln x+ln k成立.

令h(x)=x-2ln x-ln k,则h'(x)=1-=,

所以当x>2时,h'(x)>0,h(x)在(2,+∞)内单调递增.

取x0=16k>16,所以h(x)在(x0,+∞)内单调递增,

又h(x0)=16k-2ln(16k)-ln k=8(k-ln 2)+3(k-ln k)+5k,

易知k>ln k,k>ln 2,5k>0,所以h(x0)>0.

即存在x0=,当x∈(x0,+∞)时,恒有x2<cex.

综上,对任意给定的正数c,总存在x0,当x∈(x0,+∞)时,恒有x2<cex.

解法二:(1)同解法一.

(2)同解法一.

(3)对任意给定的正数c,取x0=,

由(2)知,当x>0时,ex>x2,所以ex=·>,

当x>x0时,ex>>=x2,

因此,对任意给定的正数c,总存在x0,当x∈(x0,+∞)时,恒有x2<cex.

解法三:(1)同解法一.

(2)同解法一.

(3)首先证明当x∈(0,+∞)时,恒有x3<ex.

证明如下:

令h(x)=x3-ex,则h'(x)=x2-ex.

由(2)知,当x>0时,x2<ex,

从而h'(x)<0,h(x)在(0,+∞)内单调递减,

所以h(x)<h(0)=-1<0,即x3<ex.

取x0=,当x>x0时,有x2<x3<ex.

因此,对任意给定的正数c,总存在x0,当x∈(x0,+∞)时,恒有x2<cex.

注:对c的分类可有不同的方式,只要解法正确,均相应给分.

10.(2014课标Ⅰ,21,12分)设函数f(x)=aexln x+,曲线y=f(x)在点(1, f(1))处的切线方程为y=e(x-1)+2.

(1)求a,b;

(2)证明:f(x)>1.

解析　(1)函数f(x)的定义域为(0,+∞), f '(x)=aexln x+ex-ex-1+ex-1.

由题意可得f(1)=2, f '(1)=e.

故a=1,b=2.

(2)由(1)知, f(x)=exln x+ex-1,从而f(x)>1等价于xln x>xe-x-.

设函数g(x)=xln x,则g'(x)=1+ln x.

所以当x∈时,g'(x)<0;当x∈时,

g'(x)>0.

故g(x)在上单调递减,在上单调递增,从而g(x)在(0,+∞)上的最小值为g=-.

设函数h(x)=xe-x-,则h'(x)=e-x(1-x).

所以当x∈(0,1)时,h'(x)>0;当x∈(1,+∞)时,h'(x)<0.

故h(x)在(0,1)上单调递增,在(1,+∞)上单调递减,从而h(x)在(0,+∞)上的最大值为h(1)=-.

综上,当x>0时,g(x)>h(x),即f(x)>1.

12.(2014江西,18,12分)已知函数f(x)=(x2+bx+b)(b∈R).

(1)当b=4时,求f(x)的极值;

(2)若f(x)在区间上单调递增,求b的取值范围.

解析　(1)当b=4时, f '(x)=,

由f '(x)=0得x=-2或x=0.

当x∈(-∞,-2)时, f '(x)<0, f(x)单调递减;

当x∈(-2,0)时, f '(x)>0, f(x)单调递增;

当x∈时, f '(x)<0, f(x)单调递减,故f(x)在x=-2处取极小值f(-2)=0,在x=0处取极大值f(0)=4.

(2)f '(x)=,因为当x∈时,<0,依题意,当x∈时,有5x+(3b-2)≤0,从而+(3b-2)≤0.

所以b的取值范围为.

15.(2014湖南,22,13分)已知常数a>0,函数f(x)=ln(1+ax)-.

(1)讨论f(x)在区间(0,+∞)上的单调性;

(2)若f(x)存在两个极值点x1,x2,且f(x1)+f(x2)>0,求a的取值范围.

解析　(1)f '(x)=-=.(\*)

当a≥1时, f '(x)>0,此时, f(x)在区间(0,+∞)上单调递增.

当0<a<1时,由f '(x)=0得x1=2www.gkxx.comx2=-2舍去www.gkxx.com.

当x∈(0,x1)时, f '(x)<0;当x∈(x1,+∞)时, f '(x)>0,

故f(x)在区间(0,x1)上单调递减,在区间(x1,+∞)上单调递增.

综上所述,当a≥1时, f(x)在区间(0,+∞)上单调递增;

当0<a<1时, f(x)在区间上单调递减,在区间上单调递增.

(2)由(\*)式知,当a≥1时, f '(x)≥0,此时f(x)不存在极值点.因而要使得f(x)有两个极值点,必有0<a<1,又f(x)的极值点只可能是x1=2和x2=-2,且由f(x)的定义可知,x>-且x≠-2,所以-2>-,-2≠-2,解得a≠.此时,由(\*)式易知,x1,x2分别是f(x)的极小值点和极大值点.

而f(x1)+f(x2)=ln(1+ax1)-+ln(1+ax2)-

=ln[1+a(x1+x2)+a2x1x2]-

=ln(2a-1)2-=ln(2a-1)2+-2,

令2a-1=x,由0<a<1且a≠知,

当0<a<时,-1<x<0;当<a<1时,0<x<1,

记g(x)=ln x2+-2.

(i)当-1<x<0时,g(x)=2ln(-x)+-2,

所以g'(x)=-=<0,

因此,g(x)在区间(-1,0)上单调递减,从而g(x)<g(-1)=-4<0,故当0<a<时, f(x1)+f(x2)<0.

(ii)当0<x<1时,g(x)=2ln x+-2,

所以g'(x)=-=<0,

因此,g(x)在区间(0,1)上单调递减,从而g(x)>g(1)=0,故当<a<1时, f(x1)+f(x2)>0.

综上所述,满足条件的a的取值范围为.

17.(2014重庆,20,12分)已知函数f(x)=ae2x-be-2x-cx(a,b,c∈R)的导函数f '(x)为偶函数,且曲线y=f(x)在点(0, f(0))处的切线的斜率为4-c.

(1)确定a,b的值;

(2)若c=3,判断f(x)的单调性;

(3)若f(x)有极值,求c的取值范围.

解析　(1)对f(x)求导得f '(x)=2ae2x+2be-2x-c,由f '(x)为偶函数,知f '(-x)=f '(x),

即2(a-b)(e2x+e-2x)=0,

因为e2x+e-2x>0,所以a=b.

又f '(0)=2a+2b-c=4-c,故a=1,b=1.

(2)当c=3时, f(x)=e2x-e-2x-3x,

那么f '(x)=2e2x+2e-2x-3≥2-3=1>0,

故f(x)在R上为增函数.

(3)由(1)知f '(x)=2e2x+2e-2x-c,而2e2x+2e-2x≥2=4,当x=0时等号成立.

下面分三种情况进行讨论.

当c<4时,对任意x∈R, f '(x)=2e2x+2e-2x-c>0,此时f(x)无极值;

当c=4时,对任意x≠0, f '(x)=2e2x+2e-2x-4>0,此时f(x)无极值;

当c>4时,令e2x=t,注意到方程2t+-c=0有两根t1,2=>0,

即f '(x)=0有两个根x1=ln t1,x2=ln t2.

当x1<x<x2时, f '(x)<0;

又当x>x2时, f '(x)>0,从而f(x)在x=x2处取得极小值.

综上,若f(x)有极值,则c的取值范围为(4,+∞).

18.(2014浙江,22,14分)已知函数f(x)=x3+3|x-a|(a∈R).

(1)若f(x)在[-1,1]上的最大值和最小值分别记为M(a),m(a),求M(a)-m(a);

(2)设b∈R.若[f(x)+b]2≤4对x∈[-1,1]恒成立,求3a+b的取值范围.

解析　(1)因为f(x)=

所以f '(x)=

由于-1≤x≤1,

(i)当a≤-1时,有x≥a,故f(x)=x3+3x-3a.

此时f(x)在(-1,1)上是增函数,因此,M(a)=f(1)=4-3a,m(a)=f(-1)=-4-3a,

故M(a)-m(a)=(4-3a)-(-4-3a)=8.

(ii)当-1<a<1时,若x∈(a,1),则f(x)=x3+3x-3a,在(a,1)上是增函数;

若x∈(-1,a),则f(x)=x3-3x+3a,在(-1,a)上是减函数,所以,M(a)=max{f(1), f(-1)},m(a)=f(a)=a3,

由于f(1)-f(-1)=-6a+2,因此,

当-1<a≤时,M(a)-m(a)=-a3-3a+4;

当<a<1时,M(a)-m(a)=-a3+3a+2.

(iii)当a≥1时,有x≤a,故f(x)=x3-3x+3a,

此时f(x)在(-1,1)上是减函数,因此,M(a)=f(-1)=2+3a,m(a)=f(1)=-2+3a,

故M(a)-m(a)=(2+3a)-(-2+3a)=4.

综上,M(a)-m(a)=

(2)令h(x)=f(x)+b,则h(x)=h'(x)=

因为[f(x)+b]2≤4对x∈[-1,1]恒成立,即-2≤h(x)≤2对x∈[-1,1]恒成立,所以由(1)知,

(i)当a≤-1时,h(x)在(-1,1)上是增函数,h(x)在[-1,1]上的最大值是h(1)=4-3a+b,最小值是h(-1)=-4-3a+b,则-4-3a+b≥-2且4-3a+b≤2,矛盾.

(ii)当-1<a≤时,h(x)在[-1,1]上的最小值是h(a)=a3+b,最大值是h(1)=4-3a+b,所以a3+b≥-2且4-3a+b≤2,从而-2-a3+3a≤3a+b≤6a-2且0≤a≤.

令t(a)=-2-a3+3a,则t'(a)=3-3a2>0,t(a)在上是增函数,故t(a)≥t(0)=-2,因此-2≤3a+b≤0.

(iii)当<a<1时,h(x)在[-1,1]上的最小值是h(a)=a3+b,最大值是h(-1)=3a+b+2,

所以a3+b≥-2且3a+b+2≤2,解得-<3a+b≤0.

(iv)当a≥1时,h(x)在[-1,1]上的最大值是h(-1)=2+3a+b,最小值是h(1)=-2+3a+b,

所以3a+b+2≤2且3a+b-2≥-2,解得3a+b=0.

综上,得3a+b的取值范围是-2≤3a+b≤0.

19.(2014四川,21,14分)已知函数f(x)=ex-ax2-bx-1,其中a,b∈R,e=2.718 28…为自然对数的底数.

(1)设g(x)是函数f(x)的导函数,求函数g(x)在区间[0,1]上的最小值;

(2)若f(1)=0,函数f(x)在区间(0,1)内有零点,求a的取值范围.

解析　(1)由f(x)=ex-ax2-bx-1,有g(x)=f '(x)=ex-2ax-b.

所以g'(x)=ex-2a.

因此,当x∈[0,1]时,g'(x)∈[1-2a,e-2a].

当a≤时,g'(x)≥0,所以g(x)在[0,1]上单调递增.

因此g(x)在[0,1]上的最小值是g(0)=1-b;

当a≥时,g'(x)≤0,所以g(x)在[0,1]上单调递减,

因此g(x)在[0,1]上的最小值是g(1)=e-2a-b;

当<a<时,令g'(x)=0,得x=ln(2a)∈(0,1).

所以函数g(x)在区间[0,ln(2a)]上单调递减,在区间(ln(2a),1]上单调递增.

于是,g(x)在[0,1]上的最小值是g(ln(2a))=2a-2aln(2a)-b.

综上所述,当a≤时,g(x)在[0,1]上的最小值是g(0)=1-b;

当<a<时,g(x)在[0,1]上的最小值是g(ln(2a))=2a-2aln(2a)-b;

当a≥时,g(x)在[0,1]上的最小值是g(1)=e-2a-b.

(2)设x0为f(x)在区间(0,1)内的一个零点,则由f(0)=f(x0)=0可知, f(x)在区间(0,x0)上不可能单调递增,也不可能单调递减.

则g(x)不可能恒为正,也不可能恒为负.

故g(x)在区间(0,x0)内存在零点x1.

同理g(x)在区间(x0,1)内存在零点x2.

所以g(x)在区间(0,1)内至少有两个零点.

由(1)知,当a≤时,g(x)在[0,1]上单调递增,故g(x)在(0,1)内至多有一个零点.

当a≥时,g(x)在[0,1]上单调递减,故g(x)在(0,1)内至多有一个零点.

所以<a<.

此时g(x)在区间[0,ln(2a)]上单调递减,在区间(ln(2a),1]上单调递增.

因此x1∈(0,ln(2a)],x2∈(ln(2a),1),必有g(0)=1-b>0,g(1)=e-2a-b>0.

由f(1)=0有a+b=e-1<2,有g(0)=1-b=a-e+2>0,g(1)=e-2a-b=1-a>0.

解得e-2<a<1.

当e-2<a<1时,g(x)在区间[0,1]内有最小值g(ln(2a)).

若g(ln(2a))≥0,则g(x)≥0(x∈[0,1]),

从而f(x)在区间[0,1]上单调递增,这与f(0)=f(1)=0矛盾,所以g(ln(2a))<0.

又g(0)=a-e+2>0,g(1)=1-a>0,

故此时g(x)在(0,ln(2a))和(ln(2a),1)内各只有一个零点x1和x2.

由此可知f(x)在[0,x1]上单调递增,在(x1,x2)上单调递减,在[x2,1]上单调递增.

所以f(x1)>f(0)=0, f(x2)<f(1)=0,

故f(x)在(x1,x2)内有零点.

综上可知,a的取值范围是(e-2,1).