知识梳理：

一、导数的概念及几何意义

1．函数在*x*＝*x*0处的导数及导函数的概念．

2．导数的几何意义：*f*′(*x*0)是曲线*y*＝*f*(*x*)在点(*x*0，*f*(*x*0))处的切线的斜率，曲线*y*＝*f*(*x*)在点(*x*0，*f*(*x*0))处的切线方程是*y*－*f*(*x*0)＝*f*′(*x*0)(*x*－*x*0)．

二、导数运算

1．求导公式： (1)*C*′＝0(其中*C*为常数)；(2)(*xn*)′＝*nxn*－1(*n*∈Q)；

(3)(sin*x*)′＝cos*x*；(4)(cos*x*)′＝－sin*x*；(5)(ln *x*)′＝，(log*ax*)′＝log*a*e；(6)(e*x*)′＝e*x*，(*ax*)′＝*ax*ln *a*.

2．导数的四则运算法则

(1)(*u*±*v*)′＝*u*′±*v*′；　(2)(*uv*)′＝*u*′*v*＋*uv*′；(3)′＝(*v*≠0)；(4)*y*＝*f*[*φ*(*x*)]的导数*y*′*x*＝*y*′*u*·*u*′*x*(其中*u*＝*φ*(*x*))．

三、导数的应用

1．利用导数求曲线的切线． 2．利用导数判断函数的单调性．

(1)导数与单调性的关系：在某个区间内，如果*f*′(*x*)>0(*f*′(*x*)<0)，那么函数*f*(*x*)在这个区间内单调递增(减)；如果*f*′(*x*)＝0，那么函数在这个区间内是常数函数；如果*f*(*x*)在某个区间内是增(减)函数，则导数*f*′(*x*)≥0(*f*′(*x*)≤0)．

(2)求单调区间的一般步骤：①确定定义域，②求*f*′(*x*)，

③解不等式*f*′(*x*)>0得函数的递增区间；解不等式*f*′(*x*)<0得函数的递减区间．

3．利用导数求函数的极值、最值．

(1)求极值的一般步骤：①求*f*′(*x*)；②求方程*f*′(*x*)＝0的根；③检验*f*′(*x*)在方程*f*′(*x*)＝0的根的左右两侧的符号，左正右负极大值，左负右正极小值．

(2)连续函数在闭区间[*a*，*b*]上必有最大值、最小值，先求出使方程*f*′(*x*)＝0的所有点的函数值，再与端点函数值比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值．

4．利用导数综合研究函数的性质、函数的零点、方程的根、构造函数证明不等式等问题．

四、定积分

1．定积分的几何意义：如果*f*(*x*)是区间[*a*，*b*]上的连续函数，并且*f*(*x*)≥0，那么*f*(*x*)*dx*的几何意义是直线*x*＝*a*，*x*＝*b*，*y*＝0与曲线

*y*＝*f*(*x*)所围成的曲边梯形的面积．

2．微积分基本定理：

一般地，如果*f*(*x*)是区间[*a*，*b*]上的连续函数，并且*F*′(*x*)＝*f*(*x*)，那么*f*(*x*)*dx*＝*F*(*b*)－*F*(*a*)．

导数复习例题选讲：

（一）导数的几何意义：

1．设函数*f*(*x*)＝*x*3－*x*2＋*bx*＋*c*其中*a*＞0，曲线*y*＝*f*(*x*)在点*P*(0，*f*(0))处的切线方程*y*＝1.

(1)确定*b*、*c*的值；

(2)设曲线*y*＝*f*(*x*)在点(*x*1，*f*(*x*1))及(*x*2，*f*(*x*2))处的切线都过点(0,2)，证明：当*x*1≠*x*2时*f*′(*x*1)≠*f*′(*x*2)．

2．已知函数．

（Ⅰ）求函数的极小值；

（Ⅱ）过点能否存在曲线的切线，请说明理由．

（二）利用导探究函数的单调性

3.已知函数*f*(*x*)＝ln*ax－*(*a*≠*0*)．

(1)求此函数的单调区间及最值；

(2)求证：对于任意正整数*n*，均有1＋＋＋…＋≥ln.

（三）利用函数求函数的极值和最值

4. 已知函数*f*(*x*)＝，*g*(*x*)＝*a*ln*x*，*a*∈R.

(1)若曲线*y*＝*f*(*x*)与曲线*y*＝*g*(*x*)相交，且在交点处有相同的切线，求*a*的值及该切线的方程；

(2)设函数*h*(*x*)＝*f*(*x*)－*g*(*x*)，当*h*(*x*)存在最小值时，求其最小值*φ*(*a*)的解析式；

(3)对(2)中的*φ*(*a*)，证明：当*a*∈(0，＋∞)时，*φ*(*a*)≤1.

5．[2014·山东卷] 设函数*f*(*x*)＝－*k*(*k*为常数，e＝2.718 28…是自然对数的底数)．

(1)当*k*≤0时，求函数*f*(*x*)的单调区间；

(2)若函数*f*(*x*)在(0，2)内存在两个极值点，求*k*的取值范围．

（四）利用导数证明不等式及解决不等式恒成立问题

6.设函数*f*(*x*)＝1－e－*x*.(1)证明：当*x*>－1时，*f*(*x*)≥；(2)设当*x*≥0时，*f*(*x*)≤，求*a*的取值范围．

7．设函数，其中，是实数．已知曲线与轴相切于坐标原点．

（1）求常数的值；

（2）当时，关于的不等式恒成立，求实数的取值范围；

（3）求证：．

8.已知函数**R**．

（Ⅰ） 当时，求函数的最小值；

（Ⅱ） 若时,,求实数的取值范围；

（Ⅲ）求证：．

9.已知函数,．

（Ⅰ）若曲线在点处的切线斜率为，求实数的值；

（Ⅱ）当时，证明：.

（五）利用导数解决函数零点的问题和方程有解问题

10.已知函数*f*(*x*)＝e*x*－*ax*2－*bx*－1，其中*a*，*b*∈**R**，e＝2.718 28…为自然对数的底数．

(1)设*g*(*x*)是函数*f*(*x*)的导函数，求函数*g*(*x*)在区间[0，1]上的最小值；

(2)若*f*(1)＝0，函数*f*(*x*)在区间(0，1)内有零点，求*a*的取值范围．

11.已知函数*f*(*x*)＝－2(*x*＋*a*)ln *x*＋*x*2－2*ax*－2*a*2＋*a*，其中*a*>0.

(1)设*g*(*x*)是*f*(*x*)的导函数，讨论*g*(*x*)的单调性；

(2)证明：存在*a*∈(0，1)，使得*f*(*x*)≥0在区间(1，＋∞)内恒成立，且*f*(*x*)＝0在区间(1，＋∞)内有唯一解．

21．（本小题满分12分）

已知f（x）＝ln（mx＋1）－2（m≠0）．

（Ⅰ）讨论f（x）的单调性；

（Ⅱ）若m＞0，g（x）＝f（x）＋学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！存在两个极值点x1，x2，且g（x1）＋g（x2）＜0，求m的取值范围．

1.【解答】 (1)由*f*(*x*)＝*x*3－*x*2＋*bx*＋*c*得*f*(0)＝*c*，*f*′(*x*)＝*x*2－*ax*＋*b*，*f*′(0)＝*b*.

又由曲线*y*＝*f*(*x*)在点*P*(0，*f*(0))处的切线方程为*y*＝1，得*f*(0)＝1，*f*′(0)＝0，故*b*＝0，*c*＝1.

(2)*f*(*x*)＝*x*3－*x*2＋1，*f*′(*x*)＝*x*2－*ax*，

由于点(*t*，*f*(*t*))处的切线方程为*y*－*f*(*t*)＝*f*′(*t*)(*x*－*t*)，而点(0,2)在切线上，

所以2－*f*(*t*)＝*f*′(*t*)(－*t*)，化简得*t*3－*t*2＋1＝0，即*t*满足的方程为*t*3－*t*2＋1＝0.

下面用反证法证明：

假设*f*′(*x*1)＝*f*′(*x*2)，由于曲线*y*＝*f*(*x*)在点(*x*1，*f*(*x*1))及(*x*2，*f*(*x*2))处的切线都过点(0,2)，则下列等式成立

由(3)得*x*1＋*x*2＝*a*，由(1)－(2)得*x*＋*x*1*x*2＋*x*＝*a*2，(4)

又*x*＋*x*1*x*2＋*x*＝(*x*1＋*x*2)2－*x*1*x*2＝*x*1－2＋*a*2≥*a*2，

故由(4)得*x*1＝，此时*x*2＝与*x*1≠*x*2矛盾，所以*f*′(*x*1)≠*f*′(*x*2)．

2. 试题解析：（Ⅰ）函数的定义域为R．因为 全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn，所以 全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn．

令全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn，则全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn | 全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn | 0 | 全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn |
| 全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn | - | 0 | + |
| 全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn．

（Ⅱ）假设存在切线，设切点坐标为，则切线方程为全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn

即全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn，将代入得全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn．

方程全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn有解，等价于过点全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn作曲线全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn的切线存在．

令全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn， 所以 全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn．当全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn时，全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn．

所以 当全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn时，全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn，函数全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn在全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn上单调递增；

当全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn时，全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn，全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn在全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn上单调递减．

所以 当全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn时，全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn，无最小值．

当全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn时，方程全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn有解；当全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn时，方程全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn无解．

综上所述，当全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn时存在切线；当全品高考网欢迎您！！！     http://gk.canpoint.cn           全品中考网欢迎您！！！     http://zk.canpoint.cn时不存在切线．

3.【解答】 (1)由题意*f*′(*x*)＝.当*a*>0时，函数*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，

此时函数在(0，*a*)上是减函数，在(*a*，＋∞)上是增函数，*f*min(*x*)＝*f*(*a*)＝ln*a*2，无最大值．

当*a*<0时，函数*f*(*x*)的定义域为(－∞，0)，此时函数在(－∞，*a*)上是减函数，在(*a,*0)上是增函数，*f*min(*x*)＝*f*(*a*)＝ln*a*2，无最大值．

(2)取*a*＝1，由(1)知*f*(*x*)＝ln*x*－≥*f*(1)＝0，故≥1－ln*x*＝ln，

取*x*＝1,2,3…，则1＋＋＋…＋≥ln.

4.【解答】 (1)*f*′(*x*)＝，*g*′(*x*)＝(*x*>0)，由已知解得*a*＝，*x*＝e2，

∵两条曲线交点的坐标为(e2，e)，切线的斜率为*k*＝*f*′(e2)＝，

∴切线的方程为*y*－e＝(*x*－e2)．

(2)由条件知*h*(*x*)＝－*a*ln*x*(*x*>0)，∴*h*′(*x*)＝－＝，

①当*a*>0时，令*h*′(*x*)＝0，解得*x*＝4*a*2，

所以当0<*x*<4*a*2时*h*′(*x*)<0，*h*(*x*)在(0,4*a*2)上递减；

当*x*>4*a*2时，*h*′(*x*)>0，*h*(*x*)在(0,4*a*2)上递增．

所以*x*＝4*a*2是*h*(*x*)在(0，＋∞)上的唯一极值点，且是极小值点，从而也是*h*(*x*)的最小值点．

所以*φ*(*a*)＝*h*(4*a*2)＝2*a*－*a*ln4*a*2.

②当*a*≤0时，*h*′(*x*)>0，*h*(*x*)在(0，＋∞)递增，无最小值．

故*h*(*x*)的最小值*φ*(*a*)的解析式为*φ*(*a*)＝2*a*(1－ln2*a*)(*a*>0)．

5．解：(1)函数*y*＝*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，

*f*′(*x*)＝－*k*＝－＝.

由*k*≤0可得e*x*－*kx*>0，

所以当*x*∈(0，2)时，*f*′(*x*)<0，函数*y*＝*f*(*x*)单调递减；*x*∈(2，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，函数*y*＝*f*(*x*)单调递增．

所以*f*(*x*)的单调递减区间为(0，2)，单调递增区间为(2，＋∞)．

(2)由(1)知，当*k*≤0时，函数*f*(*x*)在(0，2)内单调递减，故*f*(*x*)在(0，2)内不存在极值点；

当*k*>0时，设函数*g*(*x*)＝e*x*－*kx*，*x*∈(0，＋∞)．

因为*g*′(*x*)＝e*x*－*k*＝e*x*－eln *k*，

当0<*k*≤1时，当*x*∈(0，2)时，*g*′(*x*)＝e*x*－*k*>0，*y*＝*g*(*x*)单调递增，

故*f*(*x*)在(0，2)内不存在两个极值点．

当*k*>1时，得*x*∈(0，ln *k*)时，*g*′(*x*)<0，函数*y*＝*g*(*x*)单调递减；

*x*∈(ln *k*，＋∞)时，*g*′(*x*)>0，函数*y*＝*g*(*x*)单调递增．

所以函数*y*＝*g*(*x*)的最小值为*g*(ln *k*)＝*k*(1－ln *k*)．

函数*f*(*x*)在(0，2)内存在两个极值点．

当且仅当，解得e<*k*<.

综上所述，函数*f*(*x*)在(0，2)内存在两个极值点时，*k*的取值范围为.

6.【解答】 (1)当*x*>－1时，*f*(*x*)≥当且仅当e*x*≥1＋*x*.

令*g*(*x*)＝e*x*－*x*－1，则*g*′(*x*)＝e*x*－1.

当*x*≥0时*g*′(*x*)≥0，*g*(*x*)在[0，＋∞)上是增函数；

当*x*≤0时*g*′(*x*)≤0，*g*(*x*)在(－∞，0]上是减函数．

于是*g*(*x*)在*x*＝0处达到最小值，因而当*x*∈R时，*g*(*x*)≥*g*(0)，即e*x*≥1＋*x*，

所以当*x*>－1时，*f*(*x*)≥.

(2)由题设*x*≥0，此时*f*(*x*)≥0.

当*a*<0时，若*x*>－，则<0，*f*(*x*)≤不成立；

当*a*≥0时，令*h*(*x*)＝*axf*(*x*)＋*f*(*x*)－*x*，则*f*(*x*)≤当且仅当*h*(*x*)≤0时,

*h*′(*x*)＝*af*(*x*)＋*axf*′(*x*)＋*f*′(*x*)－1＝*af*(*x*)－*axf*(*x*)＋*ax*－*f*(*x*)．

(i)当0≤*a*≤时，由(1)知*x*≤(*x*＋1)*f*(*x*)．

*h*′(*x*)≤*af*(*x*)－*axf*(*x*)＋*a*(*x*＋1)*f*(*x*)－*f*(*x*)＝(2*a*－1)*f*(*x*)≤0，

*h*(*x*)在[0，＋∞)是减函数，*h*(*x*)≤*h*(0)＝0，即*f*(*x*)≤.

(ii)当*a*>时，由(i)知*x*≥*f*(*x*)，*h*′(*x*)＝*af*(*x*)－*axf*(*x*)＋*ax*－*f*(*x*)≥

*af*(*x*)－*axf*(*x*)＋*af*(*x*)－*f*(*x*)＝(2*a*－1－*ax*)*f*(*x*)，

当0<*x*<时，*h*′(*x*)>0，所以*h*(*x*)>*h*(0)＝0，即*f*(*x*)>.

综上，*a*的取值范围是(0，).

7. （1）由题意，得，因为与轴相切于坐标原点，故，即，故．

（2），，．

①当时，由于，有，于是在上单调递增，从而，因此在上单调递增，即，而且仅有，符合；

②当时，由于，有，于是在上单调递减，从而，因此在上单调递减，即不符；

③当时，令，当时，，于是在上单调递减，从而，因此在上单调递减，即，而且仅有，不符．

综上可知，所求实数的取值范围是．

（3）对要证明的不等式等价变形如下：对于任意的正整数，不等式恒成立，等价变形相当于（2）中，的情形，在上单调递减，即，而且仅有；取，得：对于任意正整数都有成立；令得证．

8.（Ⅰ）解:当时，,则．…………………1分

令，得．

当时, ; 当时, ． …………………………2分

∴函数在区间上单调递减,在区间上单调递增．

∴当时,函数取得最小值,其值为． ……………………3分

（Ⅱ）解:若时,,即．（\*）

令,

则．

① 若,由（Ⅰ）知,即,故．

∴．

…………………………………………4分

∴函数在区间上单调递增．

∴．∴（\*）式成立．

②若,令,

则．

∴函数在区间上单调递增．

由于,．

…………………………………………6分

故,使得． …………………………………………7分

则当时,,即．

∴函数在区间上单调递减．

∴ ,即（\*）式不恒成立． ………………………………………8分

综上所述,实数的取值范围是． ………………………………………9分

（Ⅲ）证明:由（Ⅱ）知,当时, 在上单调递增．

则,即．…………………………………10分

∴． …………………………………………11分

∴,即． …………………………………………12分

**9.**（Ⅰ）**解：**因为，

所以.……………………………………………………………1分

因为曲线在点处的切线斜率为，

所以，解得.…………………………………………………2分

（Ⅱ）**证法一：**因为,，

所以等价于．

当时，．

要证，只需证明.………………4分

**以下给出三种思路证明****．**

**思路1：**设，则.

设，则．

所以函数在上单调递增．…………………6分

因为，，

所以函数在上有唯一零点，且.

………………………………8分

因为，所以，即.………………9分

当时，；当时，，

所以当时，取得最小值.………………………………………10分

所以.

综上可知，当时，. ……………………………………12分

**思路2：**先证明．……………………………………………5分

设，则．

因为当时，，当时，，

所以当时，函数单调递减，当时，函数单调递增．

所以．

所以（当且仅当时取等号）．…………………………………7分

所以要证明，

只需证明．………………………………………………8分

下面证明**．**

设****，则**．**

当时，，当时，，

所以当时，函数单调递减，当时，函数单调递增．

所以．

所以****（当且仅当时取等号）**．**……………………………10分

由于取等号的条件不同，

所以．

综上可知，当时，. ……………………………………12分

**（若考生先放缩，或、同时放缩，请参考此思路给分！）**

**证法二：**因为,，

所以等价于．…………………………4分

**以下给出两种思路证明**．

**思路1：**设，则.

设，则．

所以函数在上单调递增．………………6分

因为，

所以，.

所以函数在上有唯一零点，且.

…………………8分

因为，所以，即．………………9分

当时，；当时，.

所以当时，取得最小值．……………………………………10分

所以

．

综上可知，当时，．……………………………………12分

**思路2：**先证明，且．…………………5分

设，则．

因为当时，；当时，，

所以在上单调递减，在上单调递增．

所以当时，取得最小值．

所以，即．…………………………………7分

所以（当且仅当时取等号）．…………………………………8分

再证明．

由，得（当且仅当时取等号）．…………9分

因为，，且与不同时取等号，

所以 

．

综上可知，当时，．……………………………………12分

10.已知函数*f*(*x*)＝e*x*－*ax*2－*bx*－1，其中*a*，*b*∈**R**，e＝2.718 28…为自然对数的底数．

(1)设*g*(*x*)是函数*f*(*x*)的导函数，求函数*g*(*x*)在区间[0，1]上的最小值；

(2)若*f*(1)＝0，函数*f*(*x*)在区间(0，1)内有零点，求*a*的取值范围．

21．解：(1)由*f*(*x*)＝e*x*－*ax*2－*bx*－1，得*g*(*x*)＝*f*′(*x*)＝e*x*－2*ax*－*b*.

所以*g*′(*x*)＝e*x*－2*a*.

当*x*∈[0，1]时，*g*′(*x*)∈[1－2*a*，e－2*a*]．

当*a*≤时，*g*′(*x*)≥0，所以*g*(*x*)在[0，1]上单调递增，

因此*g*(*x*)在[0，1]上的最小值是*g*(0)＝1－*b*；

当*a*≥时，*g*′(*x*)≤0，所以*g*(*x*)在[0，1]上单调递减，

因此*g*(*x*)在[0，1]上的最小值是*g*(1)＝e－2*a*－*b*；

当<*a*<时，令*g*′(*x*)＝0，得*x*＝ln(2*a*)∈(0，1)，所以函数*g*(*x*)在区间[0，ln(2*a*)]上单调递减，在区间(ln(2*a*)，1]上单调递增，

于是，*g*(*x*)在[0，1]上的最小值是*g*(ln(2*a*))＝2*a*－2*a*ln(2*a*)－*b*.

综上所述，当*a*≤时，*g*(*x*)在[0，1]上的最小值是*g*(0)＝1－*b*；

当<*a*<时，*g*(*x*)在[0，1]上的最小值是*g*(ln(2*a*))＝2*a*－2*a*ln(2*a*)－*b*；

当*a*≥时，*g*(*x*)在[0，1]上的最小值是*g*(1)＝e－2*a*－*b*.

(2)设*x*0为*f*(*x*)在区间(0，1)内的一个零点，

则由*f*(0)＝*f*(*x*0)＝0可知，*f*(*x*)在区间(0，*x*0)上不可能单调递增，也不可能单调递减．

则*g*(*x*)不可能恒为正，也不可能恒为负．

故*g*(*x*)在区间(0，*x*0)内存在零点*x*1.

同理*g*(*x*)在区间(*x*0，1)内存在零点*x*2.

故*g*(*x*)在区间(0，1)内至少有两个零点．

由(1)知，当*a*≤时，*g*(*x*)在[0，1]上单调递增，故*g*(*x*)在(0，1)内至多有一个零点；

当*a*≥时，*g*(*x*)在[0，1]上单调递减，故*g*(*x*)在(0，1)内至多有一个零点，都不合题意．

所以<*a*<.

此时*g*(*x*)在区间[0，ln(2*a*)]上单调递减，在区间(ln(2*a*)，1]上单调递增．

因此*x*1∈(0，ln(2*a*)]，*x*2∈(ln(2*a*)，1)，必有

*g*(0)＝1－*b*>0，*g*(1)＝e－2*a*－*b*>0.

由*f*(1)＝0得*a*＋*b*＝e－1<2，

则*g*(0)＝*a*－e＋2>0，*g*(1)＝1－*a*>0，

解得e－2<*a*<1.

当e－2<*a*<1时，*g*(*x*)在区间[0，1]内有最小值*g*(ln(2*a*))．

若*g*(ln(2*a*))≥0，则*g*(*x*)≥0(*x*∈[0，1])，

从而*f*(*x*)在区间[0，1]内单调递增，这与*f*(0)＝*f*(1)＝0矛盾，所以*g*(ln(2*a*))<0.

又*g*(0)＝*a*－e＋2>0，*g*(1)＝1－*a*>0.

故此时*g*(*x*)在(0，ln(2*a*))和(ln(2*a*)，1)内各只有一个零点*x*1和*x*2.

由此可知*f*(*x*)在[0，*x*1]上单调递增，在(*x*1，*x*2)上单调递减，在[*x*2，1]上单调递增．

所以*f*(*x*1)>*f*(0)＝0，*f*(*x*2)<*f*(1)＝0，

故*f*(*x*)在(*x*1，*x*2)内有零点．

综上可知，*a*的取值范围是(e－2，1)．

11.已知函数*f*(*x*)＝－2(*x*＋*a*)ln *x*＋*x*2－2*ax*－2*a*2＋*a*，其中*a*>0.

(1)设*g*(*x*)是*f*(*x*)的导函数，讨论*g*(*x*)的单调性；

(2)证明：存在*a*∈(0，1)，使得*f*(*x*)≥0在区间(1，＋∞)内恒成立，且*f*(*x*)＝0在区间(1，＋∞)内有唯一解．

21．解：(1)由已知得，函数*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，

*g*(*x*)＝*f*′(*x*)＝2(*x*－*a*)－2ln *x*－2，

所以*g*′(*x*)＝2－＋＝.

当0<*a*<时，*g*(*x*)在区间，上单调递增，

在区间上单调递减；

当*a*≥时，*g*(*x*)在区间(0，＋∞)上单调递增．

(2)证明：由*f*′(*x*)＝2(*x*－*a*)－2ln *x*－2＝0，解得*a*＝.

令*φ*(*x*)＝－2ln *x*＋*x*2－2··*x*－2＋，

则*φ*(1)＝1>0，*φ*(e)＝－－2<0，

故存在*x*0∈(1，e)，使得*φ*(*x*0)＝0.

令*a*0＝**，*u*(*x*)＝*x*－1－ln *x*(*x*≥1)．

由*u*′(*x*)＝1－≥0知，函数*u*(*x*)在区间(1，＋∞)上单调递增，

所以0＝< **＝*a*0<＝<1，即*a*0∈(0，1)．

当*a*＝*a*0时，有*f*′(*x*0)＝0，*f*(*x*0)＝*φ*(*x*0)＝0，由(1)知，*f*′(*x*)在区间(1，＋∞)上单调递增，

故当*x*∈(1，*x*0)时，*f*′(*x*)<0，从而*f*(*x*)>*f*(*x*0)＝0；

当*x*∈(*x*0，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，从而*f*(*x*)>*f*(*x*0)＝0.

所以当*x*∈(1，＋∞)时，*f*(*x*)≥0.

综上所述，存在*a*∈(0，1)，使得*f*(*x*)≥0在区间(1，＋∞)内恒成立，且*f*(*x*)＝0在区间(1，＋∞)内有唯一解．

21.解：（I）由已知得 ，. ……………………1分

10若时，

由得,恒有，所以在上单调递增；

20若时，

由得,恒有，所以在上单调递减.

综上：当时，在上单调递增；

当时，在上单调递减. ……………………4分

（II），

所以. ……………………5分

令，

当时，，，所以不存在极值点； …………………6分【来源：全,品…中&高\*考+网】

当时，令，得，

由的定义域可知，所以，

解得. ……………………7分

所以为的两个极值点，即，

且，得



.

学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！ ……………………8分

令，，【来源：全,品…中&高\*考+网】

10 当时，，

所以. 所以.

所以在上单调递减，.

即当时，成立，符合条件. ……………………10分

20当时，，所以，得.

所以在上单调递减，.

即当时，，不符合条件.

综上所述，的取值范围为. ……………………12分