**推理与证明复习：**

**知识梳理：**

**一、推理**

**1．合情推理**

**(1)归纳推理的一般步骤：**

**①通过观察个别事物发现某些相同的性质；**

**②从已知相同的性质中推出一个明确表述的一般性的命题．**

**归纳推理是一种由特殊到一般的推理；一般情况下，归纳的个别事物越多，越具有代表性，推广的一般结论也就越可靠．**

**(2)类比推理的一般步骤：**

**①找出两类事物之间的相似性或一致性；**

**②用一类事物的性质推测另一类事物的性质．得出一个明确的结论．**

**类比推理是由特殊到特殊的推理．**

**2．演绎推理**

**是由一般到特殊的推理．**

**二、证明**

**1．直接证明：常用的方法有综合法、分析法，**

**证明不等式时还常用比较法、放缩法等．**

**2．间接证明主要有反证法．**

**3．数学归纳法的主要步骤是：**

**(1)证明*n*取第一个值*n*0时结论成立．**

**(2)假设*n*＝*k*(*k*∈N\*，且*k*≥*n*0)时结论成立，证明*n*＝*k*＋1时结论也成立．**

**特别说明：在上面步骤(2)中括号内的*k*≥*n*0是同学们最容易漏掉的，没有这个条件，数学归纳法失去了依据，证明方法是错误的，要特别留心；另外，假设必须要在证明的过程中用上．**

**例题选讲：**

**例1(1)观察下列等式：**

**C＋C＝23－2，**

**C＋C＋C＝27＋23，**

**C＋C＋C＋C＝211－25，**

**C＋C＋C＋C＋C＝215＋27，**

**………**

**由以上等式推测到一个一般的结论：**

**对于*n*∈N\*，C＋C＋C＋…＋C＝\_\_\_\_\_ .**

**24*n*－1＋(－1)*n*22*n*－1**

**【解析】 (1)结论由两项构成，第二项前有(－1)*n*，两项指数分别为4*n*－1,2*n*－1，因此对于*n*∈N\*，C＋C＋C＋…＋C＝24*n*－1＋(－1)*n*22*n*－1，**

2． 古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数，如三角形数1，3，6，10，…，第n个三角形数为＝n2＋n，记第n个k边形数为N(n，k)(k≥3)，以下列出了部分k边形数中第n个数的表达式：

三角形数　N(n，3)＝n2＋n，

正方形数　N(n，4)＝n2，

五边形数　N(n，5)＝n2－n，

六边形数　N(n，6)＝2n2－n，

……

可以推测N(n，k)的表达式，由此计算N(10，24)＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

14．1 000　[解析] 观察得k每增加1，n2项系数增加，n项系数减少，N(n，k)＝n2＋(4－k)，故N(10，24)＝1 000.

**3．对于命题：如果*O*是线段*AB*上一点，则||·＋||·＝0；将它类比到平面的情形是：若*O*是△*ABC*内一点，有*S*△*OBC*·*OA*＋*S*△*OCA*·＋*S*△*OBA*·＝0；将它类比到空间的情形应该是：若*O*是四面体*ABCD*内一点，则有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．**

***VOBCD*·＋*VOACD*·＋*VOABD*·＋*VOABC*·＝0**

**【解析】 本题属于类比推理的应用，把线段上的向量关系先类比到平面，再类比到空间；把线段长类比到平面的三角形面积，到空间对应的是四面体的体积，故结论应是*VOBCD*·＋*VOACD*·＋*VOABD*·＋*VOABC*·＝0.**

**4.各项都为正数的数列{*an*}，满足*a*1＝1，*a*－*a*＝2.**

**(1)求数列{*an*}的通项公式；**

**(2)求证＋＋…＋≤对一切*n*∈N\*恒成立**

**【解答】 (1)∵*a*－*a*＝2，**

**∴{*a*}为首项为1，公差为2的等差数列，**

**∴*a*＝1＋(*n*－1)×2＝2*n*－1，又*an*>0，则*an*＝.**

**(2)要证原不等式成立，**

**只需证：1＋＋…＋≤.**

**方法一(放缩法)：当*n*＝1时，左边＝1，右边＝1，则命题成立．**

**当*n*≥2时，**

**∵＝<＝－**

**则＋＋…＋<1＋(－1)＋(－)＋…＋(－)＝.**

**∴原不等式成立．**

**方法二：(数学归纳法)**

**①当*n*＝1时，左边＝1，右边＝1，所以命题成立．**

**当*n*＝2时，左边<右边，所以命题成立．**

**②假设*n*＝*k*时命题成立，即1＋＋…＋≤，**

**当*n*＝*k*＋1时，左边＝1＋＋…＋＋≤＋<＋＝＋＝＝.命题成立．**

**由①②可知，对一切*n*∈N\*都有1＋＋…＋≤成立．**







5．（本小题满分14分）

已知数列的前项和为，且满足．

（1）求，，的值；

（2）（2）求数列的通项,要有推证过程；

（3）设，数列的前项和为，

求证：．

解：（1）当时，有，解得．

当时，有，解得．……2分

（2）（法一）当时，有, ………①

． ……………②

①—②得：，即：．5分

．

  ． …………………………8分

另解：．

又当时，有， ．…………8分

（法二）根据，，猜想：．……………3分

用数学归纳法证明如下：

（Ⅰ）当时，有，猜想成立．

（Ⅱ）假设当时，猜想也成立，即：．

那么当时，有，

即：，………………………①

又 ， …………………………②

①-②得：，

解，得 ．

当时，猜想也成立．

因此，由数学归纳法证得成立．…………8分

（3），…………10分

 



． ………………………………14分

6.（本小题满分12分）

设数列的前项和为，并且满足

（Ⅰ）猜想的通项公式，并用数学归纳法加以证明．

（Ⅱ）设，且，

证明：.

（Ⅰ）解　分别令*n*＝1,2,3，得

∵*an*>0，∴*a*1＝1，*a*2＝2，*a*3＝3.

猜想：*an*＝*n*.

由2*Sn*＝*a*＋*n*①

可知，当*n*≥2时，2*Sn*－1＝*a*＋(*n*－1)②

1. －②，得2*an*＝*a*－*a*＋1，

即*a*＝2*an*＋*a*－1，

(i)当*n*＝2时，*a*＝2*a*2＋12－1，

∵*a*2>0，∴*a*2＝2. …… 4分

(ii)假设当*n*＝*k*(*k*≥2)时，*ak*＝*k*，那么当*n*＝*k*＋1时，

*a*＝2*ak*＋1＋*a*－1＝2*ak*＋1＋*k*2－1

⇒[*ak*＋1－(*k*＋1)][*ak*＋1＋(*k*－1)]＝0，

∵*ak*＋1>0，*k*≥2，∴*ak*＋1＋(*k*－1)>0，

∴*ak*＋1＝*k*＋1.

即当*n*＝*k*＋1时也成立. …… 6分

∴*an*＝*n*(*n*≥2)．

显然*n*＝1时，也成立，故对于一切*n*∈*N*\*，

均有*an*＝*n*.

（Ⅱ）证明　要证＋≤，

只要证*nx*＋1＋2 ＋*ny*＋1≤2(*n*＋2).

即*n*(*x*＋*y*)＋2＋2≤2(*n*＋2)，

将*x*＋*y*＝1代入，得 2≤*n*＋2，

即只要证4(*n*2*xy*＋*n*＋1)≤(*n*＋2)2，

4*xy*≤1. …10分

∵*x*>0，*y*>0，且*x*＋*y*＝1，∴≤＝，

即，故成立，所以原不等式成立. …

**7．把正整数按上小下大、左小右大的原则排成如下数表：设*aij*(*i*、*j*∈N＋)是位于这个数表从上往下数第*i*行、从左往右数第*j*个数，数表中第*i*行共有2*i*－1个正整数\_\_\_\_\_\_\_\_．**

**1**

**2　3**

**4　5　6　7**

**8　9　10　11　12　13　14　15**

**……**

**(1)若*aij*＝2010，求*i*、*j*的值；**

**(2)记*An*＝*a*11＋*a*22＋*a*33＋…＋*ann*(*n*∈N＋)，试比较*An*与*Bn*＝*n*2＋*n*的大小，并说明理由．**

**【解答】 (1)由题意知第一列中第*n*个数为2*n*－1，**

**又210＝1024,211＝2048，**

**∴2010是数表中第11行中的数，∴*i*＝11.**

**由2010＝210＋(*j*－1)，∴*j*＝987.**

**(2)∵*ann*＝2*n*－1＋(*n*－1)**

**∴*An*＝(1＋2＋22＋…＋2*n*－1)＋[1＋2＋…＋(*n*－1)]＝2*n*－1＋**

**当*n*＝1时，*A*1＝1，*B*1＝2，∴*An*<*Bn*，**

**当*n*＝2时，*A*2＝4，*B*2＝6，*An*<*Bn*，**

**当*n*＝3时，*A*3＝10，*B*3＝12，*An*<*Bn*，**

**当*n*＝4时，*A*4＝21，*B*4＝20，*An*>*Bn*，**

**猜想：当1≤*n*≤3，*n*∈*N*＋，*An*<*Bn*，**

**当*n*≥4且*n*∈*N*＋，*An*＋*Bn*.**

**下面用数学归纳法证明当*n*≥4时*An*>*Bn*.**

**也就是证明2*n*－1＋>*n*2＋*n*即证明2*n*－1>*n*2＋*n*，**

**①当*n*＝4时，已证成立．**

**②假设*n*＝*k*时成立，即2*k*－1>*k*2＋*k*，**

**那么2*k*＋1－1＝2·(2*k*－1)＋1>2·＋1**

**＝*k*2＋3*k*＋1＝[(*k*＋1)2＋3(*k*＋1)2]＋，**

**∵*k*>4，∴*k*>2，故*k*2＋*k*－1>0，**

**∴2*k*＋1－1>＋即*n*＝*k*＋1时也成立，**

**由①②知∀*n*≥4，*An*>*Bn*，**

**综上，当1≤*n*≤3时，*An*<*Bn*，当*n*≥4时，*An*>*Bn*.**

**8.已知数列{*an*}满足，*a*1＝，＝，*anan*＋1<0**

**(*n*≥1)，数列{*bn*}满足：*bn*＝*a*－*a*(*n*≥1)．**

**(1)求数列{*an*}，{*bn*}的通项公式；**

**(2)求证：数列{*bn*}中的任意三项不可能成等差数列．**

**【解答】 (1)由题意可知1－*a*＝(1－*a*)，**

**令*cn*＝1－*a*，*cn*＋1＝*cn*.**

**又*c*1＝1－*a*＝，则数列{*cn*}是首项为*c*1＝，公比为的等比数列，即*cn*＝·*n*－1.故1－*a*＝·*n*－1⇒*a*＝1－·*n*－1，又*a*1＝>0，*anan*＋1<0，故*an*＝(－1)*n*－1.**

***bn*＝*a*－*a*＝－＝·*n*－1.**

**(2)用反证法证明．**

**假设数列{*bn*}存在三项*br*，*bs*，*bt*(*r*<*s*<*t*)按某种顺序成等差数列，由于数列{*bn*}是首项为，公比为的等比数列，于是有*br*>*bs*>*bt*，则只可能有2*bs*＝*br*＋*bt*成立．**

**∴2·*s*－1＝*r*－1＋*t*－1，**

**两边同乘3*r*－121－*r*，化简得3*t*－*r*＋2*t*－*r*＝2·2*s*－*r*3*t*－*s*.**

**由于*r*<*s*<*t*，所以上式左边为奇数，右边为偶数，故上式不可能成立，导致矛盾．**

**故数列{*bn*}中任意三项不可能成等差数列．**

**推理与证明复习：**

一、推理

1．合情推理

(1)归纳推理的一般步骤：

①通过观察个别事物发现某些相同的性质；

②从已知相同的性质中推出一个明确表述的一般性的命题．

归纳推理是一种由特殊到一般的推理；一般情况下，归纳的个别事物越多，越具有代表性，推广的一般结论也就越可靠．

(2)类比推理的一般步骤：

①找出两类事物之间的相似性或一致性；

②用一类事物的性质推测另一类事物的性质．得出一个明确的结论．

类比推理是由特殊到特殊的推理．

2．演绎推理

是由一般到特殊的推理．

二、证明

1．直接证明：常用的方法有综合法、分析法，

证明不等式时还常用比较法、放缩法等．

2．间接证明主要有反证法．

3．数学归纳法的主要步骤是：

(1)证明*n*取第一个值*n*0时结论成立．

(2)假设*n*＝*k*(*k*∈N\*，且*k*≥*n*0)时结论成立，证明*n*＝*k*＋1时结论也成立．

特别说明：在上面步骤(2)中括号内的*k*≥*n*0是同学们最容易漏掉的，没有这个条件，数学归纳法失去了依据，证明方法是错误的，要特别留心；另外，假设必须要在证明的过程中用上．

推理与证明复习：2016.6.29

例题选讲：

（一）类比推理和归纳推理

例1(1)观察下列等式：

C＋C＝23－2， C＋C＋C＝27＋23，

C＋C＋C＋C＝211－25， C＋C＋C＋C＋C＝215＋27，………

由以上等式推测到一个一般的结论：

对于*n*∈N\*，C＋C＋C＋…＋C＝\_\_\_\_\_ .

2． 古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数，如三角形数1，3，6，10，…，n个三角形数为＝n2＋n，记第n个k边形数为N(n，k)(k≥3)，以下列出了部分k边形数中第n个数的表达式：

三角形数　N(n，3)＝n2＋n，正方形数　N(n，4)＝n2，五边形数　N(n，5)＝n2－n，

六边形数　N(n，6)＝2n2－n，

……可以推测N(n，k)的表达式，由此计算N(10，24)＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

3．对于命题：如果*O*是线段*AB*上一点，则||·＋||·＝0；将它类比到平面的情形是：若*O*是△*ABC*内一点，有*S*△*OBC*·*OA*＋*S*△*OCA*·＋*S*△*OBA*·＝0；将它类比到空间的情形应该是：若*O*是四面体*ABCD*内一点，则有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

（二）证明方法：比较法、综合法、分析法、数学归纳法

4.各项都为正数的数列{*an*}，满足*a*1＝1，*a*－*a*＝2.

(1)求数列{*an*}的通项公式；

(2)求证＋＋…＋≤对一切*n*∈N\*恒成立

5.已知数列的前项和为，且满足．

（1）求，，的值；

（2）（2）求数列的通项,要有推证过程；

（3）设，数列的前项和为，求证：．

6.设数列的前项和为，并且满足

（Ⅰ）猜想的通项公式，并用数学归纳法加以证明．

（Ⅱ）设，且，证明：.

7．把正整数按上小下大、左小右大的原则排成如下数表：设*aij*(*i*、*j*∈N＋)是位于这个数表从上往下数第*i*行、从左往右数第*j*个数，数表中第*i*行共有2*i*－1个正整数\_\_\_\_\_\_\_\_．

1

2　3

4　5　6　7

8　9　10　11　12　13　14　15

……

(1)若*aij*＝2010，求*i*、*j*的值；

(2)记*An*＝*a*11＋*a*22＋*a*33＋…＋*ann*(*n*∈N＋)，试比较*An*与*Bn*＝*n*2＋*n*的大小，并说明理由．

8.已知数列{*an*}满足，*a*1＝，＝，*anan*＋1<0

(*n*≥1)，数列{*bn*}满足：*bn*＝*a*－*a*(*n*≥1)．

(1)求数列{*an*}，{*bn*}的通项公式；

(2)求证：数列{*bn*}中的任意三项不可能成等差数列．

**推理与证明复习：**

一、推理

1．合情推理

(1)归纳推理的一般步骤：

①通过观察个别事物发现某些相同的性质；

②从已知相同的性质中推出一个明确表述的一般性的命题．

归纳推理是一种由特殊到一般的推理；一般情况下，归纳的个别事物越多，越具有代表性，推广的一般结论也就越可靠．

(2)类比推理的一般步骤：

①找出两类事物之间的相似性或一致性；

②用一类事物的性质推测另一类事物的性质．得出一个明确的结论．

类比推理是由特殊到特殊的推理．

2．演绎推理

是由一般到特殊的推理．

二、证明

1．直接证明：常用的方法有综合法、分析法，

证明不等式时还常用比较法、放缩法等．

2．间接证明主要有反证法．

3．数学归纳法的主要步骤是：

(1)证明*n*取第一个值*n*0时结论成立．

(2)假设*n*＝*k*(*k*∈N\*，且*k*≥*n*0)时结论成立，证明*n*＝*k*＋1时结论也成立．

特别说明：在上面步骤(2)中括号内的*k*≥*n*0是同学们最容易漏掉的，没有这个条件，数学归纳法失去了依据，证明方法是错误的，要特别留心；另外，假设必须要在证明的过程中用上．

例题选讲：

（一）类比推理和归纳推理

例1(1)观察下列等式：

C＋C＝23－2，

C＋C＋C＝27＋23，

C＋C＋C＋C＝211－25，

C＋C＋C＋C＋C＝215＋27，

………

由以上等式推测到一个一般的结论：

对于*n*∈N\*，C＋C＋C＋…＋C＝\_\_\_\_\_ .

24*n*－1＋(－1)*n*22*n*－1

【解析】 (1)结论由两项构成，第二项前有(－1)*n*，两项指数分别为4*n*－1,2*n*－1，因此对于*n*∈N\*，C＋C＋C＋…＋C＝24*n*－1＋(－1)*n*22*n*－1，

2.． 古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数，如三角形数1，3，6，10，…，第n个三角形数为＝n2＋n，记第n个k边形数为N(n，k)(k≥3)，以下列出了部分k边形数中第n个数的表达式：

三角形数　N(n，3)＝n2＋n，

正方形数　N(n，4)＝n2，

五边形数　N(n，5)＝n2－n，

六边形数　N(n，6)＝2n2－n，

……

可以推测N(n，k)的表达式，由此计算N(10，24)＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

2．1 000　[解析] 观察得k每增加1，n2项系数增加，n项系数减少，N(n，k)＝n2＋(4－k)，故N(10，24)＝1 000.

3．对于命题：如果*O*是线段*AB*上一点，则||·＋||·＝0；将它类比到平面的情形是：若*O*是△*ABC*内一点，有*S*△*OBC*·*OA*＋*S*△*OCA*·＋*S*△*OBA*·＝0；将它类比到空间的情形应该是：若*O*是四面体*ABCD*内一点，则有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

*VOBCD*·＋*VOACD*·＋*VOABD*·＋*VOABC*·＝0

【解析】 本题属于类比推理的应用，把线段上的向量关系先类比到平面，再类比到空间；把线段长类比到平面的三角形面积，到空间对应的是四面体的体积，故结论应是*VOBCD*·＋*VOACD*·＋*VOABD*·＋*VOABC*·＝0.

（二）证明方法：比较法、综合法、分析法、数学归纳法

4.各项都为正数的数列{*an*}，满足*a*1＝1，*a*－*a*＝2.

(1)求数列{*an*}的通项公式；

(2)求证＋＋…＋≤对一切*n*∈N\*恒成立

【解答】 (1)∵*a*－*a*＝2，

∴{*a*}为首项为1，公差为2的等差数列，

∴*a*＝1＋(*n*－1)×2＝2*n*－1，又*an*>0，则*an*＝.

(2)要证原不等式成立，

只需证：1＋＋…＋≤.

方法一(放缩法)：当*n*＝1时，左边＝1，右边＝1，则命题成立．

当*n*≥2时，∵＝<＝－

则＋＋…＋<1＋(－1)＋(－)＋…＋(－)＝.

∴原不等式成立．

方法二：(数学归纳法)

①当*n*＝1时，左边＝1，右边＝1，所以命题成立．

当*n*＝2时，左边<右边，所以命题成立．

②假设*n*＝*k*时命题成立，即1＋＋…＋≤，

当*n*＝*k*＋1时，左边＝1＋＋…＋＋≤＋<＋＝＋＝＝.命题成立．

由①②可知，对一切*n*∈N\*都有1＋＋…＋≤成立．







5.已知数列的前项和为，且满足．

（1）求，，的值；

（2）（2）求数列的通项,要有推证过程；

（3）设，数列的前项和为，求证：．

解：（1）当时，有，解得．

当时，有，解得．……2分

（2）（法一）当时，有, ……………①

． …………………②

①—②得：，即：．…5分

．

  ． …………………………8分

另解：．

又当时，有， ．………………8分

（法二）根据，，猜想：．………………………3分

用数学归纳法证明如下：

（Ⅰ）当时，有，猜想成立．

（Ⅱ）假设当时，猜想也成立，即：．

那么当时，有，

即：，………………………①

又 ， …………………………②

①-②得：，

解，得 ．

当时，猜想也成立．

因此，由数学归纳法证得成立．………………………8分

（3），………………10分

 





． ………………………………………14分

6.设数列的前项和为，并且满足

（Ⅰ）猜想的通项公式，并用数学归纳法加以证明．

（Ⅱ）设，且，证明：.

（Ⅰ）解　分别令*n*＝1,2,3，得

∵*an*>0，∴*a*1＝1，*a*2＝2，*a*3＝3.

猜想：*an*＝*n*. …… 2分

由2*Sn*＝*a*＋*n*①

可知，当*n*≥2时，2*Sn*－1＝*a*＋(*n*－1)②

1. －②，得2*an*＝*a*－*a*＋1，

即*a*＝2*an*＋*a*－1， …… 3分

(i)当*n*＝2时，*a*＝2*a*2＋12－1，

∵*a*2>0，∴*a*2＝2. …… 4分

(ii)假设当*n*＝*k*(*k*≥2)时，*ak*＝*k*，那么当*n*＝*k*＋1时，

*a*＝2*ak*＋1＋*a*－1＝2*ak*＋1＋*k*2－1

⇒[*ak*＋1－(*k*＋1)][*ak*＋1＋(*k*－1)]＝0，

∵*ak*＋1>0，*k*≥2，∴*ak*＋1＋(*k*－1)>0，

∴*ak*＋1＝*k*＋1.

即当*n*＝*k*＋1时也成立. …… 6分

∴*an*＝*n*(*n*≥2)．

显然*n*＝1时，也成立，故对于一切*n*∈*N*\*，

均有*an*＝*n*. ……

（Ⅱ）证明　要证＋≤，

只要证*nx*＋1＋2 ＋*ny*＋1≤2(*n*＋2). ……8分

即*n*(*x*＋*y*)＋2＋2≤2(*n*＋2)，

将*x*＋*y*＝1代入，得 2≤*n*＋2，

即只要证4(*n*2*xy*＋*n*＋1)≤(*n*＋2)2，

即4*xy*≤1. ……10分

∵*x*>0，*y*>0，且*x*＋*y*＝1，∴≤＝，

即，故成立，所以原不等式成立. ……

7．把正整数按上小下大、左小右大的原则排成如下数表：设*aij*(*i*、*j*∈N＋)是位于这个数表从上往下数第*i*行、从左往右数第*j*个数，数表中第*i*行共有2*i*－1个正整数\_\_\_\_\_\_\_\_．

1

2　3

4　5　6　7

8　9　10　11　12　13　14　15

……

(1)若*aij*＝2010，求*i*、*j*的值；

(2)记*An*＝*a*11＋*a*22＋*a*33＋…＋*ann*(*n*∈N＋)，试比较*An*与*Bn*＝*n*2＋*n*的大小，并说明理由．

【解答】 (1)由题意知第一列中第*n*个数为2*n*－1，

又210＝1024,211＝2048，

∴2010是数表中第11行中的数，∴*i*＝11.

由2010＝210＋(*j*－1)，∴*j*＝987.

(2)∵*ann*＝2*n*－1＋(*n*－1)

∴*An*＝(1＋2＋22＋…＋2*n*－1)＋[1＋2＋…＋(*n*－1)]＝2*n*－1＋

当*n*＝1时，*A*1＝1，*B*1＝2，∴*An*<*Bn*，

当*n*＝2时，*A*2＝4，*B*2＝6，*An*<*Bn*，

当*n*＝3时，*A*3＝10，*B*3＝12，*An*<*Bn*，

当*n*＝4时，*A*4＝21，*B*4＝20，*An*>*Bn*，

猜想：当1≤*n*≤3，*n*∈*N*＋，*An*<*Bn*，

当*n*≥4且*n*∈*N*＋，*An*＋*Bn*.

下面用数学归纳法证明当*n*≥4时*An*>*Bn*.

也就是证明2*n*－1＋>*n*2＋*n*即证明2*n*－1>*n*2＋*n*，

①当*n*＝4时，已证成立．

②假设*n*＝*k*时成立，即2*k*－1>*k*2＋*k*，

那么2*k*＋1－1＝2·(2*k*－1)＋1>2·＋1

＝*k*2＋3*k*＋1＝[(*k*＋1)2＋3(*k*＋1)2]＋，

∵*k*>4，∴*k*>2，故*k*2＋*k*－1>0，

∴2*k*＋1－1>＋即*n*＝*k*＋1时也成立，

由①②知∀*n*≥4，*An*>*Bn*，

综上，当1≤*n*≤3时，*An*<*Bn*，当*n*≥4时，*An*>*Bn*.

**8.已知数列{*an*}满足，*a*1＝，＝，*anan*＋1<0**

**(*n*≥1)，数列{*bn*}满足：*bn*＝*a*－*a*(*n*≥1)．**

**(1)求数列{*an*}，{*bn*}的通项公式；**

**(2)求证：数列{*bn*}中的任意三项不可能成等差数列．**

**【解答】 (1)由题意可知1－*a*＝(1－*a*)，**

**令*cn*＝1－*a*，*cn*＋1＝*cn*.**

**又*c*1＝1－*a*＝，则数列{*cn*}是首项为*c*1＝，公比为的等比数列，即*cn*＝·*n*－1.故1－*a*＝·*n*－1⇒*a*＝1－·*n*－1，又*a*1＝>0，*anan*＋1<0，故*an*＝(－1)*n*－1.**

***bn*＝*a*－*a*＝－＝·*n*－1.**

**(2)用反证法证明．**

**假设数列{*bn*}存在三项*br*，*bs*，*bt*(*r*<*s*<*t*)按某种顺序成等差数列，由于数列{*bn*}是首项为，公比为的等比数列，于是有*br*>*bs*>*bt*，则只可能有2*bs*＝*br*＋*bt*成立．**

**∴2·*s*－1＝*r*－1＋*t*－1，**

**两边同乘3*r*－121－*r*，化简得3*t*－*r*＋2*t*－*r*＝2·2*s*－*r*3*t*－*s*.**

**由于*r*<*s*<*t*，所以上式左边为奇数，右边为偶数，故上式不可能成立，导致矛盾．**

**故数列{*bn*}中任意三项不可能成等差数列．**