高二数学周练20160305  **导数及其应用**

1.设函数f(x)=sin.若存在f(x)的极值点x0满足+[f(x0)]2<m2,则m的取值范围是(　　)

A.(-∞,-6)∪(6,+∞) B.(-∞,-4)∪(4,+∞) C.(-∞,-2)∪(2,+∞) D.(-∞,-1)∪(1,+∞)

2.当x∈[-2,1]时,不等式ax3-x2+4x+3≥0恒成立,则实数a的取值范围是(　　)

A.[-5,-3] B. C.[-6,-2] D.[-4,-3]

3.已知函数f(x)=x3+ax2+bx+c,下列结论中错误的是(　　)

A.∃x0∈R, f(x0)=0 C.若x0是f(x)的极小值点,则f(x)在区间(-∞,x0)单调递减

B.函数y=f(x)的图象是中心对称图形 D.若x0是f(x)的极值点,则f '(x0)=0

4.设函数f(x)满足x2·f '(x)+2xf(x)=, f(2)=,则x>0时, f(x)(　　)

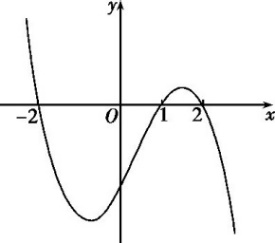
A.有极大值,无极小值 B.有极小值,无极大值

C.既有极大值又有极小值 D.既无极大值也无极小值

5.设函数f(x)=xex,则(　　)

A.x=1为f(x)的极大值点 B.x=1为f(x)的极小值点

C.x=-1为f(x)的极大值点 D.x=-1为f(x)的极小值点

6.设函数f(x)在R上可导,其导函数为f '(x),且函数y=(1-x)f '(x)的图象如图所示,则下列结论中一定成立的是(　　)

A.函数f(x)有极大值f(2)和极小值f(1)

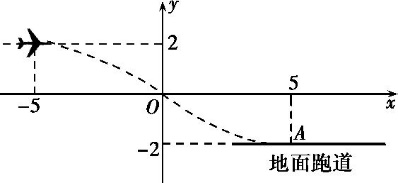
B.函数f(x)有极大值f(-2)和极小值f(1)

C.函数f(x)有极大值f(2)和极小值f(-2)

D.函数f(x)有极大值f(-2)和极小值f(2)

7.已知函数f(x)=ax3-3x2+1,若f(x)存在唯一的零点x0,且x0>0,则a的取值范围是(　　)

A.(2,+∞) B.(1,+∞) C.(-∞,-2) D.(-∞,-1)

8.如图,某飞行器在4千米高空水平飞行,从距着陆点A的水平距离10千米处开始下降,已知下降飞行轨迹为某三次函数图象的一部分,则该函数的解析式为(　　)

A.y=x3-x B.y=x3-x

C.y=x3-x D.y=-x3+x

9.设函数f(x)=(a∈R,e为自然对数的底数).若曲线y=sin x上存在点(x0,y0)使得f(f(y0))=y0,则a的取值范围是(　　)

A.[1,e] B.[e-1-1,1] C.[1,e+1] D.[e-1-1,e+1]

10.已知a为常数,函数f(x)=x(ln x-ax)有两个极值点x1,x2(x1<x2),则(　　)

A.f(x1)>0, f(x2)>- B.f(x1)<0, f(x2)<- C.f(x1)>0, f(x2)<- D.f(x1)<0, f(x2)>-

11.设函数f(x)=aexln x+,曲线y=f(x)在点(1, f(1))处的切线方程为y=e(x-1)+2.

(1)求a,b; (2)证明:f(x)>1.

12.已知函数f(x)=ae2x-be-2x-cx(a,b,c∈R)的导函数f '(x)为偶函数,且曲线y=f(x)在点(0, f(0))处的切线的斜率为4-c. (1)确定a,b的值; (2)若c=3,判断f(x)的单调性; (3)若f(x)有极值,求c的取值范围.

13.设函数f(x)=+c(e=2.718 28…是自然对数的底数,c∈R).

(1)求f(x)的单调区间、最大值; (2)讨论关于x的方程|ln x|=f(x)根的个数.

14.设函数f(x)=-k(k为常数,e=2.718 28…是自然对数的底数). (1)当k≤0时,求函数f(x)的单调区间; (2)若函数f(x)在(0,2)内存在两个极值点,求k的取值范围.

15.已知函数f(x)=ex-ax2-bx-1,其中a,b∈R,e=2.718 28…为自然对数的底数.

(1)设g(x)是函数f(x)的导函数,求函数g(x)在区间[0,1]上的最小值;

(2)若f(1)=0,函数f(x)在区间(0,1)内有零点,求a的取值范围.

16.已知函数f(x)=x3+3|x-a|(a∈R). (1)若f(x)在[-1,1]上的最大值和最小值分别记为M(a),m(a),求M(a)-m(a); (2)设b∈R.若[f(x)+b]2≤4对x∈[-1,1]恒成立,求3a+b的取值范围.

17.已知a>0,函数f(x)=. (1)记f(x)在区间[0,4]上的最大值为g(a),求g(a)的表达式;

(2)是否存在a,使函数y=f(x)在区间(0,4)内的图象上存在两点,在该两点处的切线互相垂直?若存在,求a的取值范围;若不存在,请说明理由.

**18.** 已知函数（），其中是自然对数的底数.

（1）当时，求的极值；（2）若在上是单调增函数，求的取值范围；（3）当时，求整数的所有值，使方程在上有解.

**19.** 已知函数在处的切线方程为. （1）求的值；（2）若对任意的，都有成立，求的取值范围；（3）若函数的两个零点为，试判断的正负，并说明理由.

高二数学周练20160305  **导数及其应用参考答案**

1.(2014课标Ⅱ,12,5分)设函数f(x)=sin.若存在f(x)的极值点x0满足+[f(x0)]2<m2,则m的取值范围是(　　)

A.(-∞,-6)∪(6,+∞) B.(-∞,-4)∪(4,+∞) C.(-∞,-2)∪(2,+∞) D.(-∞,-1)∪(1,+∞)

2.(2014辽宁,11,5分)当x∈[-2,1]时,不等式ax3-x2+4x+3≥0恒成立,则实数a的取值范围是(　　)

A.[-5,-3] B. C.[-6,-2] D.[-4,-3]

3.(2013课标全国Ⅱ,10,5分)已知函数f(x)=x3+ax2+bx+c,下列结论中错误的是(　　)

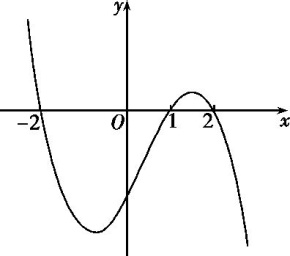
A.∃x0∈R, f(x0)=0 C.若x0是f(x)的极小值点,则f(x)在区间(-∞,x0)单调递减

B.函数y=f(x)的图象是中心对称图形 D.若x0是f(x)的极值点,则f '(x0)=0

4.(2013辽宁,12,5分)设函数f(x)满足x2·f '(x)+2xf(x)=, f(2)=,则x>0时, f(x)(　　)

A.有极大值,无极小值 B.有极小值,无极大值

C.既有极大值又有极小值 D.既无极大值也无极小值

5.(2012陕西,7,5分)设函数f(x)=xex,则(　　)

A.x=1为f(x)的极大值点 B.x=1为f(x)的极小值点

C.x=-1为f(x)的极大值点 D.x=-1为f(x)的极小值点

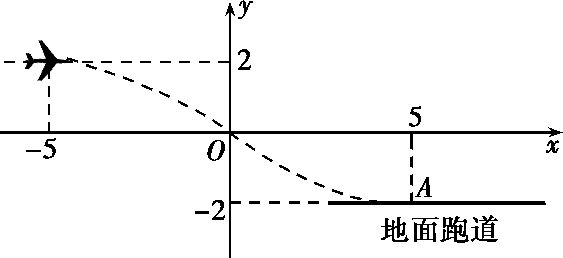
6.(2012重庆,8,5分)设函数f(x)在R上可导,其导函数为f '(x),且函数y=(1-x)f '(x)的图象如图所示,则下列结论中一定成立的是(　　)

A.函数f(x)有极大值f(2)和极小值f(1) B.函数f(x)有极大值f(-2)和极小值f(1)

C.函数f(x)有极大值f(2)和极小值f(-2) D.函数f(x)有极大值f(-2)和极小值f(2)

7.(2014课标Ⅰ,11,5分)已知函数f(x)=ax3-3x2+1,若f(x)存在唯一的零点x0,且x0>0,则a的取值范围是(　　)

A.(2,+∞) B.(1,+∞) C.(-∞,-2) D.(-∞,-1)

8.(2014陕西,10,5分)如图,某飞行器在4千米高空水平飞行,从距着陆点A的水平距离10千米处开始下降,已知下降飞行轨迹为某三次函数图象的一部分,则该函数的解析式为(　　)

A.y=x3-x B.y=x3-x C.y=x3-x D.y=-x3+x

9.(2013四川,10,5分)设函数f(x)=(a∈R,e为自然对数的底数).若曲线y=sin x上存在点(x0,y0)使得f(f(y0))=y0,则a的取值范围是(　　)

A.[1,e] B.[e-1-1,1] C.[1,e+1] D.[e-1-1,e+1]

10.(2013湖北,10,5分)已知a为常数,函数f(x)=x(ln x-ax)有两个极值点x1,x2(x1<x2),则(　　)

A.f(x1)>0, f(x2)>- B.f(x1)<0, f(x2)<- C.f(x1)>0, f(x2)<- D.f(x1)<0, f(x2)>-

11.(2014课标Ⅰ,21,12分)设函数f(x)=aexln x+,曲线y=f(x)在点(1, f(1))处的切线方程为y=e(x-1)+2. (1)求a,b; (2)证明:f(x)>1.

12.(2014重庆,20,12分)已知函数f(x)=ae2x-be-2x-cx(a,b,c∈R)的导函数f '(x)为偶函数,且曲线y=f(x)在点(0, f(0))处的切线的斜率为4-c.

(1)确定a,b的值; (2)若c=3,判断f(x)的单调性; (3)若f(x)有极值,求c的取值范围.

13.(2013山东,21,13分)设函数f(x)=+c(e=2.718 28…是自然对数的底数,c∈R).

(1)求f(x)的单调区间、最大值; (2)讨论关于x的方程|ln x|=f(x)根的个数.

14.(2014山东,20,13分)设函数f(x)=-k(k为常数,e=2.718 28…是自然对数的底数).

(1)当k≤0时,求函数f(x)的单调区间; (2)若函数f(x)在(0,2)内存在两个极值点,求k的取值范围.

15.(2014四川,21,14分)已知函数f(x)=ex-ax2-bx-1,其中a,b∈R,e=2.718 28…为自然对数的底数.

(1)设g(x)是函数f(x)的导函数,求函数g(x)在区间[0,1]上的最小值;

(2)若f(1)=0,函数f(x)在区间(0,1)内有零点,求a的取值范围.

16.(2014浙江,22,14分)已知函数f(x)=x3+3|x-a|(a∈R).

(1)若f(x)在[-1,1]上的最大值和最小值分别记为M(a),m(a),求M(a)-m(a);

(2)设b∈R.若[f(x)+b]2≤4对x∈[-1,1]恒成立,求3a+b的取值范围.

17.已知a>0,函数f(x)=. (1)记f(x)在区间[0,4]上的最大值为g(a),求g(a)的表达式;

(2)是否存在a,使函数y=f(x)在区间(0,4)内的图象上存在两点,在该两点处的切线互相垂直?若存在,求a的取值范围;若不存在,请说明理由.

**18.** 已知函数（），其中是自然对数的底数.

（1）当时，求的极值；（2）若在上是单调增函数，求的取值范围；（3）当时，求整数的所有值，使方程在上有解.

**19.** 已知函数在处的切线方程为. （1）求的值；（2）若对任意的，都有成立，求的取值范围；（3）若函数的两个零点为，试判断的正负，并说明理由.

1.C　f '(x)=cos,

∵f(x)的极值点为x0,

∴f '(x0)=0,∴cos=0,

∴x0=kπ+,k∈Z,

∴x0=mk+,k∈Z,

又∵+[f(x0)]2<m2,

∴+<m2,k∈Z,即m2+3<m2,k∈Z,

∵m≠0,∴<,k∈Z,

又∵存在x0满足+[f(x0)]2<m2,即存在k∈Z满足上式,

∴>,

∴>,∴m2-3>,∴m2>4,∴m>2或m<-2,故选C.

2.C　由题意知∀x∈[-2,1]都有ax3-x2+4x+3≥0,即ax3≥x2-4x-3在x∈[-2,1]上恒成立.当x=0时,a∈R.

当0<x≤1时,a≥=--+.

令t=(t≥1),g(t)=-3t3-4t2+t,因为g'(t)=-9t2-8t+1<0(t≥1),所以g(t)在[1,+∞)上单调递减,g(t)max=g(1)=-6(t≥1),所以a≥-6.

当-2≤x<0时,a≤--+,同理,g(t)在(-∞,-1]上递减,在上递增.

因此g(t)min=g(-1)=-2,所以a≤-2.

综上可知-6≤a≤-2,故选C.

3.C　由三次函数值域为R知f(x)=0有解,所以A项正确;因为y=x3的图象为中心对称图形,而f(x)=x3+ax2+bx+c的图象可以由y=x3的图象平移得到,故B项正确;若f(x)有极小值点,则f '(x)=0有两个不等实根x1,x2(x1<x2), f '(x)=3x2+2ax+b=3(x-x1)·(x-x2),则f(x)在(-∞,x1)上为增函数,在(x1,x2)上为减函数,在(x2,+∞)上为增函数,故C项错误;D项正确.故选C.

4.D　令F(x)=x2·f(x),则f '(x)===,

令h(x)=ex-2F(x),则h'(x)=ex-=.

当0<x<2时,h'(x)<0,h(x)在(0,2)上为减函数.

当x>2时,h'(x)>0,h(x)在(2,+∞)上为增函数,故h(x)≥h(2)在x∈(0,+∞)上恒成立.

h(2)=e2-2·F(2)=e2-2[22·f(2)]=e2-2=0,

即h(x)≥h(2)=0在x∈(0,+∞)上恒成立,则f '(x)=≥0在x∈(0,+∞)上恒成立,

∴f(x)在(0,+∞)上是单调递增的,

∴f(x)在(0,+∞)上无极值,故选D.

5.D　f '(x)=(x+1)ex,当x<-1时, f '(x)<0,当x>-1时, f '(x)>0,所以x=-1为f(x)的极小值点,故选D.

6.D　①当x<-2时,1-x>0.

∵(1-x)f '(x)>0,

∴f '(x)>0,即f(x)在(-∞,-2)上是增函数.

②当-2<x<1时,1-x>0.

∵(1-x)f '(x)<0,

∴f '(x)<0,即f(x)在(-2,1)上是减函数.

③当1<x<2时,1-x<0.

∵(1-x)f '(x)>0,∴f '(x)<0,

即f(x)在(1,2)上是减函数.

④当x>2时,1-x<0.∵(1-x)f '(x)<0,

∴f '(x)>0,即f(x)在(2,+∞)上是增函数.

综上:f(-2)为极大值, f(2)为极小值.

7.C　(1)当a=0时,显然f(x)有两个零点,不符合题意.

(2)当a≠0时, f '(x)=3ax2-6x,令f '(x)=0,解得x1=0,x2=.

当a>0时,>0,所以函数f(x)=ax3-3x2+1在(-∞,0)与上为增函数,在上为减函数,因为f(x)存在唯一零点x0,且x0>0,则f(0)<0,即1<0,不成立.

当a<0时,<0,所以函数f(x)=ax3-3x2+1在和(0,+∞)上为减函数,在上为增函数,因为f(x)存在唯一零点x0,且x0>0,则f>0,即a·-3·+1>0,解得a>2或a<-2,又因为a<0,故a的取值范围为(-∞,-2).选C.

8.A　根据题意知,所求函数在(-5,5)上单调递减.对于A,y=x3-x,∴y'=x2-=(x2-25),∴∀x∈(-5,5),y'<0,

∴y=x3-x在(-5,5)内为减函数,同理可验证B、C、D均不满足此条件,故选A.

9.A　曲线y=sin x上存在点(x0,y0)使得f(f(y0))=y0≥0,则有0≤y0=sin x0≤1,使得f(y0)=y0.证明如下:

易知f(x)=在定义域上是增函数,

若f(y0)>y0,则f(f(y0))>f(y0)>y0,与已知矛盾;

若f(y0)<y0,则f(f(y0))<f(y0)<y0,与已知矛盾.

故必有0≤y0≤1使得f(y0)=y0,

即有0≤x≤1使得f(x)=x,

对x∈[0,1],=x⇒a=ex-x2+x,

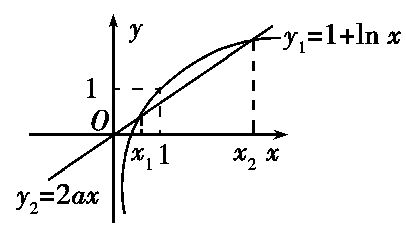
令g(x)=ex-x2+x,则g'(x)=ex-2x+1,

若x∈[0,1],则ex+1≥2,2x≤2,则g'(x)>0,所以g(x)在[0,1]上是增函数,

g(0)≤g(x)≤g(1)⇒1≤g(x)≤e,即1≤a≤e.故选A.

10.D　f '(x)=ln x-2ax+1,依题意知f '(x)=0有两个不等实根x1,x2.

即曲线y1=1+ln x与y2=2ax有两个不同交点,如图.



由直线y=x是曲线y1=1+ln x的切线,可知:0<2a<1,且0<x1<1<x2. ∴a∈.

由0<x1<1,得f(x1)=x1(ln x1-ax1)<0,

当x1<x<x2时, f '(x)>0,当x>x2时, f '(x)<0,∴f(x2)>f(1)=-a>-,故选D.

11.id:2147504957;FounderCES解析　(1)函数f(x)的定义域为(0,+∞), f '(x)=aexln x+ex-ex-1+ex-1.

由题意可得f(1)=2, f '(1)=e.

故a=1,b=2.

(2)由(1)知, f(x)=exln x+ex-1,

从而f(x)>1等价于xln x>xe-x-.

设函数g(x)=xln x,则g'(x)=1+ln x.

所以当x∈时,g'(x)<0;

当x∈时,g'(x)>0.

故g(x)在上单调递减,在上单调递增,从而g(x)在(0,+∞)上的最小值为g=-.

设函数h(x)=xe-x-,则h'(x)=e-x(1-x).

所以当x∈(0,1)时,h'(x)>0;当x∈(1,+∞)时,h'(x)<0.

故h(x)在(0,1)上单调递增,在(1,+∞)上单调递减,从而h(x)在(0,+∞)上的最大值为h(1)=-.

综上,当x>0时,g(x)>h(x),即f(x)>1.

12.id:2147504964;FounderCES解析　(1)对f(x)求导得f '(x)=2ae2x+2be-2x-c,由f '(x)为偶函数,知f '(-x)=f '(x),∴2(a-b)(e2x-e-2x)=0,

因为当x≠0时,e2x-e-2x≠0,所以a=b.

又f '(0)=2a+2b-c=4-c,故a=1,b=1.

(2)当c=3时, f(x)=e2x-e-2x-3x,

那么f '(x)=2e2x+2e-2x-3≥2-3=1>0,

故f(x)在R上为增函数.

(3)由(1)知f '(x)=2e2x+2e-2x-c,而2e2x+2e-2x≥2=4,当x=0时等号成立.

下面分三种情况进行讨论.

当c<4时,对任意x∈R, f '(x)=2e2x+2e-2x-c>0,此时f(x)无极值;

当c=4时,对任意x≠0, f '(x)=2e2x+2e-2x-4>0,此时f(x)无极值;

当c>4时,令e2x=t,注意到方程2t+-c=0有两根t1,2=>0,即f '(x)=0有两个根x1=ln t1,x2=ln t2.

当x1<x<x2时, f '(x)<0;

又当x>x2时, f '(x)>0,从而f(x)在x=x2处取得极小值.

综上,若f(x)有极值,则c的取值范围为(4,+∞).

13.id:2147504971;FounderCES解析　(1)f '(x)=(1-2x)e-2x,

令f '(x)=0,解得x=.

当x<时, f '(x)>0, f(x)单调递增;

当x>时, f '(x)<0, f(x)单调递减.

所以,函数f(x)的单调递增区间是,单调递减区间是,最大值为f=e-1+c.

(2)令g(x)=|ln x|-f(x)=|ln x|-xe-2x-c,x∈(0,+∞).

(i)当x∈(1,+∞)时,ln x>0,则g(x)=ln x-xe-2x-c,所以g'(x)=e-2x.

因为2x-1>0,>0,所以g'(x)>0.

因此g(x)在(1,+∞)上单调递增.

(ii)当x∈(0,1)时,ln x<0,则g(x)=-ln x-xe-2x-c,

所以g'(x)=e-2x.

因为e2x∈(1,e2),e2x>1>x>0,所以-<-1.

又2x-1<1,所以-+2x-1<0,即g'(x)<0.

因此g(x)在(0,1)上单调递减.

综合(i)(ii)可知,当x∈(0,+∞)时,

g(x)≥g(1)=-e-2-c.

当g(1)=-e-2-c>0,即c<-e-2时,g(x)没有零点,

故关于x的方程|ln x|=f(x)根的个数为0;

当g(1)=-e-2-c=0,即c=-e-2时,g(x)只有一个零点,

故关于x的方程|ln x|=f(x)根的个数为1;

当g(1)=-e-2-c<0,即c>-e-2时,

①当x∈(1,+∞)时,由(1)知

g(x)=ln x-xe-2x-c≥ln x->ln x-1-c,

要使g(x)>0,只需使ln x-1-c>0,即x∈(e1+c,+∞);

②当x∈(0,1)时,由(1)知

g(x)=-ln x-xe-2x-c≥-ln x->-ln x-1-c,

要使g(x)>0,只需-ln x-1-c>0,即x∈(0,e-1-c),

所以c>-e-2时,g(x)有两个零点,

故关于x的方程|ln x|=f(x)根的个数为2.

综上所述,

当c<-e-2时,关于x的方程|ln x|=f(x)根的个数为0;

当c=-e-2时,关于x的方程|ln x|=f(x)根的个数为1;

当c>-e-2时,关于x的方程|ln x|=f(x)根的个数为2.

14.id:2147504985;FounderCES解析　(1)函数y=f(x)的定义域为(0,+∞).

f '(x)=-k

=-=.

由k≤0可得ex-kx>0,

所以当x∈(0,2)时, f '(x)<0,函数y=f(x)单调递减,

当x∈(2,+∞)时, f '(x)>0,函数y=f(x)单调递增.

所以f(x)的单调递减区间为(0,2),单调递增区间为(2,+∞).

(2)由(1)知,当k≤0时,函数f(x)在(0,2)内单调递减,

故f(x)在(0,2)内不存在极值点;

当k>0时,设函数g(x)=ex-kx,x∈[0,+∞).

因为g'(x)=ex-k=ex-eln k,

当0<k≤1时,

当x∈(0,2)时,g'(x)=ex-k>0,y=g(x)单调递增,故f(x)在(0,2)内不存在两个极值点;

当k>1时,

得x∈(0,ln k)时,g'(x)<0,函数y=g(x)单调递减,

x∈(ln k,+∞)时,g'(x)>0,函数y=g(x)单调递增.

所以函数y=g(x)的最小值为g(ln k)=k(1-ln k).

函数f(x)在(0,2)内存在两个极值点,

当且仅当解得e<k<.

综上所述,函数f(x)在(0,2)内存在两个极值点时,k的取值范围为.

15.id:2147504992;FounderCES解析　(1)由f(x)=ex-ax2-bx-1,有g(x)=f '(x)=ex-2ax-b.

所以g'(x)=ex-2a.

因此,当x∈[0,1]时,g'(x)∈[1-2a,e-2a].

当a≤时,g'(x)≥0,所以g(x)在[0,1]上单调递增.

因此g(x)在[0,1]上的最小值是g(0)=1-b;

当a≥时,g'(x)≤0,所以g(x)在[0,1]上单调递减,

因此g(x)在[0,1]上的最小值是g(1)=e-2a-b;

当<a<时,令g'(x)=0,得x=ln(2a)∈(0,1).

所以函数g(x)在区间[0,ln(2a)]上单调递减,在区间(ln(2a),1]上单调递增.

于是,g(x)在[0,1]上的最小值是g(ln(2a))=2a-2aln(2a)-b.

综上所述,当a≤时,g(x)在[0,1]上的最小值是g(0)=1-b;

当<a<时,g(x)在[0,1]上的最小值是g(ln(2a))=2a-2aln(2a)-b;

当a≥时,g(x)在[0,1]上的最小值是g(1)=e-2a-b.

(2)设x0为f(x)在区间(0,1)内的一个零点,则由f(0)=f(x0)=0可知, f(x)在区间(0,x0)上不可能单调递增,也不可能单调递减.

则g(x)在(0,x0)上不可能恒为正,也不可能恒为负.

故g(x)在区间(0,x0)内存在零点x1.

同理g(x)在区间(x0,1)内存在零点x2.

所以g(x)在区间(0,1)内至少有两个零点.

由(1)知,当a≤时,g(x)在[0,1]上单调递增,故g(x)在(0,1)内至多有一个零点.

当a≥时,g(x)在[0,1]上单调递减,故g(x)在(0,1)内至多有一个零点.

所以<a<.

此时g(x)在区间[0,ln(2a)]上单调递减,在区间(ln(2a),1]上单调递增.

因此x1∈(0,ln(2a)],x2∈(ln(2a),1),必有g(0)=1-b>0,g(1)=e-2a-b>0.

由f(1)=0有a+b=e-1<2,有g(0)=1-b=a-e+2>0,g(1)=e-2a-b=1-a>0.

解得e-2<a<1.

当e-2<a<1时,g(x)在区间[0,1]内有最小值g(ln(2a)).

若g(ln(2a))≥0,则g(x)≥0(x∈[0,1]),

从而f(x)在区间[0,1]上单调递增,这与f(0)=f(1)=0矛盾,所以g(ln(2a))<0.

又g(0)=a-e+2>0,g(1)=1-a>0,

故此时g(x)在(0,ln(2a))和(ln(2a),1)内各只有一个零点x1和x2.

由此可知f(x)在[0,x1]上单调递增,在(x1,x2)上单调递减,在[x2,1]上单调递增.

所以f(x1)>f(0)=0, f(x2)<f(1)=0,

故f(x)在(x1,x2)内有零点.

综上可知,a的取值范围是(e-2,1).

16.id:2147504999;FounderCES解析　(1)因为f(x)=

所以f '(x)=

由于-1≤x≤1,

(i)当a≤-1时,有x≥a,故f(x)=x3+3x-3a.

此时f(x)在(-1,1)上是增函数,因此,M(a)=f(1)=4-3a,m(a)=f(-1)=-4-3a,

故M(a)-m(a)=(4-3a)-(-4-3a)=8.

(ii)当-1<a<1时,若x∈(a,1),则f(x)=x3+3x-3a,在(a,1)上是增函数;

若x∈(-1,a),则f(x)=x3-3x+3a,在(-1,a)上是减函数,所以,M(a)=max{f(1), f(-1)},m(a)=f(a)=a3,

由于f(1)-f(-1)=-6a+2,因此,

当-1<a≤时,M(a)-m(a)=-a3-3a+4;

当<a<1时,M(a)-m(a)=-a3+3a+2.

(iii)当a≥1时,有x≤a,故f(x)=x3-3x+3a,此时f(x)在(-1,1)上是减函数,因此,M(a)=f(-1)=2+3a,m(a)=f(1)=-2+3a,

故M(a)-m(a)=(2+3a)-(-2+3a)=4.

综上,M(a)-m(a)=

(2)令h(x)=f(x)+b,则h(x)=h'(x)=

因为[f(x)+b]2≤4对x∈[-1,1]恒成立,即-2≤h(x)≤2对x∈[-1,1]恒成立,所以由(1)知,

(i)当a≤-1时,h(x)在(-1,1)上是增函数,h(x)在[-1,1]上的最大值是h(1)=4-3a+b,最小值是h(-1)=-4-3a+b,则-4-3a+b≥-2且4-3a+b≤2,矛盾.

(ii)当-1<a≤时,h(x)在[-1,1]上的最小值是h(a)=a3+b,最大值是h(1)=4-3a+b,所以a3+b≥-2且4-3a+b≤2,从而-2-a3+3a≤3a+b≤6a-2且0≤a≤.

令t(a)=-2-a3+3a,则t'(a)=3-3a2>0,t(a)在上是增函数,故t(a)≥t(0)=-2,因此-2≤3a+b≤0.

(iii)当<a<1时,h(x)在[-1,1]上的最小值是h(a)=a3+b,最大值是h(-1)=3a+b+2,所以a3+b≥-2且3a+b+2≤2,解得-<3a+b≤0.

(iv)当a≥1时,h(x)在[-1,1]上的最大值是h(-1)=2+3a+b,最小值是h(1)=-2+3a+b,所以3a+b+2≤2且3a+b-2≥-2,解得3a+b=0.

综上,得3a+b的取值范围是-2≤3a+b≤0.

17.id:2147505006;FounderCES解析　(1)当0≤x≤a时, f(x)=;当x>a时, f(x)=.因此,当x∈(0,a)时, f '(x)=<0, f(x)在(0,a)上单调递减;

当x∈(a,+∞)时, f '(x)=>0, f(x)在(a,+∞)上单调递增.

①若a≥4,则f(x)在(0,4)上单调递减,g(a)=f(0)=.

②若0<a<4,则f(x)在(0,a)上单调递减,在(a,4)上单调递增.所以g(a)=max{f(0), f(4)}.而f(0)-f(4)=-=,故当0<a≤1时,g(a)=f(4)=;当1<a<4时,g(a)=f(0)=.

综上所述,g(a)=

(2)由(1)知,当a≥4时, f(x)在(0,4)上单调递减,故不满足要求.

当0<a<4时, f(x)在(0,a)上单调递减,在(a,4)上单调递增.若存在x1,x2∈(0,4)(x1<x2),使曲线y=f(x)在(x1, f(x1)),(x2, f(x2))两点处的切线互相垂直,则x1∈(0,a),x2∈(a,4),且f '(x1)·f '(x2)=-1.

即·=-1.

亦即x1+2a=.(\*)

由x1∈(0,a),x2∈(a,4)得

x1+2a∈(2a,3a), ∈.

故(\*)成立等价于集合A={x|2a<x<3a}与集合B=的交集非空.

因为<3a,所以当且仅当0<2a<1,即0<a<时,A∩B≠⌀.

综上所述,存在a使函数f(x)在区间(0,4)内的图象上存在两点,在该两点处的切线互相垂直,且a的取值范围是.

**18.** （扬州市2016届高三上期末）已知函数（），其中是自然对数的底数.

（1）当时，求的极值；

（2）若在上是单调增函数，求的取值范围；

（3）当时，求整数的所有值，使方程在上有解.

18、解：（1），则 ………2分

令 ，

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 0 |  |
|  | 增 | 极大值 | 减 | 极小值 | 增 |

 ， ………4分

（2）问题转化为在上恒成立；

又 即在上恒成立； ………6分

 ，对称轴

①当，即时，在上单调增，

  ………8分

②当，即时，在上单调减，在上单调增， 解得： 

综上，的取值范围是． ………10分

（3） 设 ，

令 ，

令

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 0 |  |
|  | 增 | 极大值 | 减 | 极小值 | 增 |

 ， ………13分

在上单调减，在上单调增

又

由零点的存在性定理可知： 即． ………16分

**19.** （南京、盐城市2016届高三上期末）已知函数在处的切线方程为.

（1）求的值；

（2）若对任意的，都有成立，求的取值范围；

（3）若函数的两个零点为，试判断的正负，并说明理由.

19、解：（1）由题意得，因函数在处的切线方程为，

所以，得. ……………4分

（2）由（1）知对任意都成立，

所以，即对任意都成立，从而. ………6分

又不等式整理可得，令，

所以，得， ……………8分

当时，，函数在上单调递增，

同理，函数在上单调递减，所以，

综上所述，实数的取值范围是. ……………10分

（3）结论是. …………11分

证明：由题意知函数，所以，

易得函数在单调递增，在上单调递减，所以只需证明即可. ……12分

因为是函数的两个零点，所以，相减得，

不妨令，则，则，所以，，

即证，即证， ……………14分

因为，所以在上单调递增，所以，

综上所述，函数总满足成立. …………16分