解析几何专练：定值问题（20151224）

1. [2014·安徽卷] 如图1­4，已知两条抛物线*E*1：*y*2＝2*p*1*x*(*p*1＞0)和*E*2：*y*2＝2*p*2*x*(*p*2＞0)，过原点*O*的两条直线*l*1和*l*2，*l*1与*E*1，*E*2分别交于*A*1，*A*2两点，*l*2与*E*1，*E*2分别交于*B*1，*B*2两点．

(1)证明：*A*1*B*1∥*A*2*B*2；

(2)过*O*作直线*l*(异于*l*1，*l*2)与*E*1，*E*2分别交于*C*1，*C*2两点，记△*A*1*B*1*C*1与△*A*2*B*2*C*2的面积分别为*S*1与*S*2，求的值．

解：(1)证明：设直线*l*1，*l*2的方程分别为*y*＝*k*1*x*，*y*＝*k*2*x*(*k*1，*k*2≠0)，

全品高考网欢迎您！！！请登录：     http://gk.canpoint.cn                        全品中考网欢迎您！！！请登录：     http://zk.canpoint.cn  则由 得*A*1，由得*A*2.

同理可得*B*1，*B*2.

所以＝＝2*p*1，

＝＝2*p*2.

故＝，所以*A*1*B*1∥*A*2*B*2

(2)由(1)知*A*1*B*1∥*A*2*B*2，同理可得*B*1*C*1∥*B*2*C*2，*C*1*A*1∥*C*2*A*2，所以△*A*1*B*1*C*1∽△*A*2*B*2*C*2，

因此＝.又由(1)中的＝||知，＝，故＝.

全品高考网欢迎您！！！请登录：     http://gk.canpoint.cn                        全品中考网欢迎您！！！请登录：     http://zk.canpoint.cn  2.[2014·江西卷] 如图1­7所示，已知双曲线*C*：－*y*2＝1(*a*>0)的右焦点为*F*，点*A*，*B*分别在*C*的两条渐近线上，*AF*⊥*x*轴，*AB*⊥*OB*，*BF*∥*OA*(*O*为坐标原点)．

(1)求双曲线*C*的方程；

(2)过*C*上一点*P*(*x*0，*y*0)(*y*0≠0)的直线*l*：－*y*0*y*＝1与直线*AF*相交于点*M*，与直线*x*＝相交于点*N*.证明：当点*P*在*C*上移动时，恒为定值，并求此定值．

解：(1)设*F*(*c*，0)，因为*b*＝1，所以*c*＝.

由题意，直线*OB*的方程为*y*＝－*x*，直线*BF*的方程为*y*＝(*x*－*c*)，所以*B*.

又直线*OA*的方程为*y*＝*x*，则*A*，所以*kAB*＝＝.

又因为*AB*⊥*OB*，所以·＝－1，解得*a*2＝3，故双曲线*C*的方程为－*y*2＝1.

(2)由(1)知*a*＝，则直线*l*的方程为－*y*0*y*＝1(*y*0≠0)，即*y*＝(*y*0≠0)．

因为直线*AF*的方程为*x*＝2，所以直线*l*与*AF*的交点为*M*，直线*l*与直线*x*＝的交点为*N*，，则＝＝＝·.

又*P*(*x*0，*y*0)是*C*上一点，则－*y*＝1，

代入上式得＝·＝·＝，所以＝＝，为定值．

3．（2013山东数学（理）试题（含答案））椭圆的左、右焦点分别是,离心率为,过且垂直于轴的直线被椭圆截得的线段长为1.



(Ⅰ)求椭圆的方程;



(Ⅱ)点是椭圆上除长轴端点外的任一点,连接,设的角平分线交 的长轴于点,求的取值范围;



(Ⅲ)在(Ⅱ)的条件下,过点作斜率为的直线,使得与椭圆有且只有一个公共点,设直线的斜率分别为,若,试证明为定值,并求出这个定值.



【答案】解:(Ⅰ)由于,将代入椭圆方程得



由题意知,即 又



所以, 所以椭圆方程为



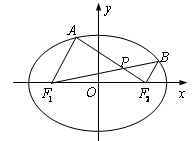
(Ⅱ)由题意可知:=,=,设其中,将向量坐标代入并化简得:m(,因为,

所以,而,所以

(3)由题意可知,*l*为椭圆的在p点处的切线,由导数法可求得,切线方程为:

,所以,而,代入中得

为定值.

4. **（2012年江苏省16分）**如图，在平面直角坐标系lfxlby中，椭圆lfxlby的左、右焦点分别为lfxlby，lfxlby．已知lfxlby和lfxlby都在椭圆上，其中lfxlby为椭圆的离心率．

（1）求椭圆的方程；

（2）设lfxlby是椭圆上位于lfxlby轴上方的两点，且直线lfxlby与直线lfxlby平行，lfxlby与lfxlby交于点P．

（i）若lfxlby，求直线lfxlby的斜率；

（ii）求证：lfxlby是定值．

**【答案】**解：（1）由题设知，lfxlby，由点lfxlby在椭圆上，得

lfxlby，∴lfxlby。

由点lfxlby在椭圆上，得

lfxlby

∴椭圆的方程为lfxlby。

（2）由（1）得lfxlby，lfxlby，又∵lfxlby∥lfxlby，

∴设lfxlby、lfxlby的方程分别为lfxlby，lfxlby。

∴lfxlby。

∴lfxlby。①

同理，lfxlby。②

1. 由①②得，lfxlby。解lfxlby得lfxlby=2。

∵注意到lfxlby，∴lfxlby。 ∴直线lfxlby的斜率为lfxlby。

（ii）证明：∵lfxlby∥lfxlby，∴lfxlby，即lfxlby。

∴lfxlby。 由点lfxlby在椭圆上知，lfxlby，∴lfxlby。

同理。lfxlby。

∴lfxlby

由①②得，lfxlby，lfxlby， ∴lfxlby。

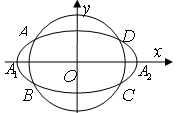
∴lfxlby是定值。

5. （2012辽宁卷）

如图，椭圆lfxlby，动圆lfxlby.点lfxlby分别为lfxlby的左、右顶点，lfxlby与lfxlby相交于lfxlby四点

（1）求直线lfxlby与直线lfxlby交点lfxlby的轨迹方程；

（2）设动圆lfxlby与lfxlby相交于lfxlby四点，其中lfxlby，lfxlby.若矩形lfxlby与矩形lfxlby的面积相等，证明：lfxlby为定值

【命题意图】本题主要考查圆的方程、椭圆方程、轨迹求法、解析几何中的定值问题，考查转化与化归能力、运算求解能力，是难题.

【解析】设lfxlby，又知lfxlby，则

直线lfxlby的方程为 lfxlby ①

直线lfxlby的方程为 lfxlby ②

由①②得 lfxlby ③

由点lfxlby在椭圆lfxlby上，故可得lfxlby，从而有lfxlby，代入③得

lfxlby ……6分

（2）证明：设lfxlby，由矩形lfxlby与矩形lfxlby的面积相等，得

lfxlby，因为点lfxlby均在椭圆上，所以lfxlby

由lfxlby，知lfxlby，所以lfxlby。从而lfxlby，因而lfxlby为定值.

6.（2012上海）在平面直角坐标系lfxlby中，已知双曲线lfxlby.

（1）过lfxlby的左顶点引lfxlby的一条渐近线的平行线，求该直线与另一条渐近线及*x*轴围成

的三角形的面积；（4分）

（2）设斜率为1的直线*l*交lfxlby于*P*、*Q*两点，若*l*与圆lfxlby相切，求证：

*OP*⊥*OQ*；（6分）

（3）设椭圆lfxlby. 若*M*、*N*分别是lfxlby、lfxlby上的动点，且*OM*⊥*ON*，

求证：*O*到直线*MN*的距离是定值.（6分）

[解]（1）双曲线lfxlby，左顶点lfxlby，渐近线方程：lfxlby.

过点A与渐近线lfxlby平行的直线方程为lfxlby，即lfxlby.

解方程组lfxlby，得lfxlby. ……2分

所以所求三角形的面积1为lfxlby. ……4分

（2）设直线*PQ*的方程是lfxlby.因直线与已知圆相切，

故lfxlby，即lfxlby. ……6分

由lfxlby，得lfxlby.

设*P*(*x*1, *y*1)、*Q*(*x*2, *y*2)，则lfxlby.（lb ylfx）

又2，所以

lfxlby

lfxlby，

故*OP*⊥*OQ*. ……10分

（3）当直线*ON*垂直于*x*轴时，

|*ON*|=1，|*OM*|=lfxlby，则*O*到直线*MN*的距离为lfxlby.

当直线*ON*不垂直于*x*轴时，

设直线*ON*的方程为lfxlby（显然lfxlby），则直线*OM*的方程为lfxlby.

由lfxlby，得lfxlby，所以lfxlby.

同理lfxlby. ……13分

设*O*到直线*MN*的距离为*d*，因为lfxlby，

所以lfxlby，即*d*=lfxlby.

综上，*O*到直线*MN*的距离是定值.

7. （2011山东卷）已知动直线6ec8aac122bd4f6e与椭圆C: 6ec8aac122bd4f6e交于P6ec8aac122bd4f6e、Q6ec8aac122bd4f6e两不同点，且△OPQ的面积6ec8aac122bd4f6e=6ec8aac122bd4f6e,其中O为坐标原点.

（Ⅰ）证明6ec8aac122bd4f6e和6ec8aac122bd4f6e均为定值;

（Ⅱ）设线段PQ的中点为M，求6ec8aac122bd4f6e的最大值；

（Ⅲ）椭圆C上是否存在点D,E,G，使得6ec8aac122bd4f6e?若存在，判断△DEG的形状；若不存在，请说明理由.

（I）解：（1）当直线的斜率不存在时，P，Q两点关于x轴对称，所以

因为在椭圆上，因此①又因为所以 ②

由①、②得此时

（2）当直线的斜率存在时设直线的方程为由题意知m，将其代入，得

，其中

即（\*）又

所以

因为点O到直线的距离为所以

又

整理得且符合（\*）式，

此时

综上所述，结论成立。

（II）解法一：

（1）当直线的斜率存在时，由（I）知

因此

（2）当直线的斜率存在时，由（I）知



所以



所以，当且仅当时，等号成立.

综合（1）（2）得|OM|·|PQ|的最大值为

解法二：

因为



所以

即当且仅当时等号成立。

因此 |OM|·|PQ|的最大值为

（III）椭圆C上不存在三点D，E，G，使得

证明：假设存在，

由（I）得



因此D，E，G只能在这四点中选取三个不同点，

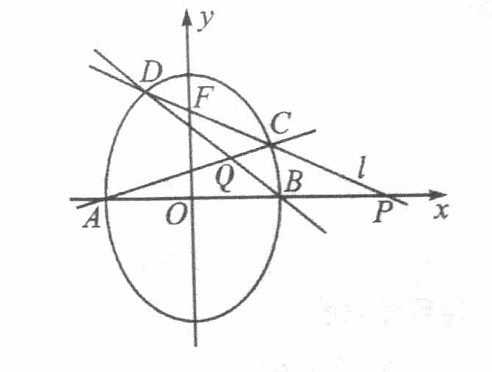
而这三点的两两连线中必有一条过原点，

与矛盾，

所以椭圆C上不存在满足条件的三点D，E，G.

8. （2011四川）椭圆有两顶点A（-1，0）、B（1，0），过其焦点F（0，1）的直线l与椭圆交于C、D两点，并与x轴交于点P．直线AC与直线BD交于点Q．

（I）当|CD | = 时，求直线l的方程；

（II）当点P异于A、B两点时，求证： 为定值。

解：（Ⅰ）因椭圆的焦点在y轴上，设椭圆的标准方程为[](http://www.zxsx.com)，

由已知得[](http://www.zxsx.com)，[](http://www.zxsx.com)，所以[](http://www.zxsx.com)，则椭圆方程为[](http://www.zxsx.com)．

直线[](http://www.zxsx.com)垂直于x轴时与题意不符．

设直线[](http://www.zxsx.com)的方程为[](http://www.zxsx.com)，联立[](http://www.zxsx.com)得[](http://www.zxsx.com)，

设[](http://www.zxsx.com)，[](http://www.zxsx.com)，则[](http://www.zxsx.com)，[](http://www.zxsx.com)，[](http://www.zxsx.com)，

[](http://www.zxsx.com)．

由已知得[](http://www.zxsx.com)，解得[](http://www.zxsx.com)，

所以直线[](http://www.zxsx.com)的方程为[](http://www.zxsx.com)或[](http://www.zxsx.com)．

（Ⅱ）直线[](http://www.zxsx.com)垂直于x轴时与题意不符．

设直线[](http://www.zxsx.com)的方程为[](http://www.zxsx.com)（[](http://www.zxsx.com)且[](http://www.zxsx.com)），所以P点的坐标为[](http://www.zxsx.com)．

设[](http://www.zxsx.com)，[](http://www.zxsx.com)，由（Ⅰ）知[](http://www.zxsx.com)，[](http://www.zxsx.com)，

直线AC的方程为：[](http://www.zxsx.com)，直线BD的方程为：[](http://www.zxsx.com)，

方法一：

联立方程[](http://www.zxsx.com)设[](http://www.zxsx.com)，解得[](http://www.zxsx.com)，

不妨设[](http://www.zxsx.com)，则[](http://www.zxsx.com)

[](http://www.zxsx.com)，

因此Q点的坐标为[](http://www.zxsx.com)，又[](http://www.zxsx.com)，∴[](http://www.zxsx.com)．

故[](http://www.zxsx.com)为定值．