解析几何专练：证明问题（20151230）

班级 姓名

1. [2015·湖南卷] 已知抛物线*C*1：*x*2＝4*y*的焦点*F*也是椭圆*C*2：＋＝1(*a*>*b*>0)的一个焦点，*C*1与*C*2的公共弦的长为2.

(1)求*C*2的方程．

(2)过点*F*的直线*l*与*C*1相交于*A*，*B*两点，与*C*2相交于*C*，*D*两点，且与同向．

(i)若|*AC*|＝|*BD*|，求直线*l*的斜率；

(ii)设*C*1在点*A*处的切线与*x*轴的交点为*M*，证明：直线*l*绕点*F*旋转时，△*MFD*总是钝角三角形．

20．解：(1)由*C*1：*x*2＝4*y*知其焦点*F*的坐标为(0，1)．因为*F*也是椭圆*C*2的一个焦点，所以

*a*2－*b*2＝1.①

又*C*1与*C*2的公共弦的长为2，*C*1与*C*2都关于*y*轴对称，且*C*1的方程为*x*2＝4*y*，

由此易知*C*1与*C*2的公共点的坐标为±，，所以＋＝1.②

联立①②，得*a*2＝9，*b*2＝8，

故*C*2的方程为＋＝1.

(2)如图所示，设*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，*C*(*x*3，*y*3)，*D*(*x*4，*y*4)．

(i)因为与同向，且|*AC*|＝|*BD*|，所以＝，从而*x*3－*x*1＝*x*4－*x*2，即*x*1－*x*2＝*x*3－*x*4，于是(*x*1＋*x*2)2－4*x*1*x*2＝(*x*3＋*x*4)2－4*x*3*x*4.③

设直线*l*的斜率为*k*，则*l*的方程为*y*＝*kx*＋1.

由得*x*2－4*kx*－4＝0，而*x*1，*x*2是这个方程的两根，所以*x*1＋*x*2＝4*k*，*x*1*x*2＝－4.④

由得(9＋8*k*2)*x*2＋16*kx*－64＝0.

而*x*3，*x*4是这个方程的两根，所以

*x*3＋*x*4＝－，*x*3*x*4＝－.⑤

将④⑤代入③，得16(*k*2＋1)＝＋，即16(*k*2＋1)＝，

所以(9＋8*k*2)2＝16×9，解得*k*＝±，即直线*l*的斜率为±.

D:\2015文件\数学\湖南卷（理数）-TY1\15HNL12.EPS

(ii)证明：由*x*2＝4*y*得*y*′＝，所以*C*1在点*A*处的切线方程为*y*－*y*1＝(*x*－*x*1)，即*y*＝－.

令*y*＝0，得*x*＝，即*M*，0，所以＝，－1.而＝(*x*1，*y*1－1)，于是·＝－*y*1＋1＝＋1>0，

因此∠*AFM*是锐角，从而∠*MFD*＝180°－∠*AFM*是钝角．

故直线*l*绕点*F*旋转时，△*MFD*总是钝角三角形．

2. 18．**H10**[2015·福建卷] 已知椭圆*E*：＋＝1(*a*＞*b*＞0)过点(0，)，且离心率*e*＝.

(1)求椭圆*E*的方程；

(2)设直线*l*：*x*＝*my*－1(*m*∈**R**)交椭圆*E*于*A*，*B*两点，判断点*G*与以线段*AB*为直径的圆的位置关系，并说明理由．

D:\2015文件\数学\福建卷（理数）-TY3\FJL4.EPS

图1­4

18．解：方法一：(1)由已知得，

解得

所以椭圆*E*的方程为＋＝1.

(2)设点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，*AB*的中点为*H*(*x*0，*y*0)．

由得(*m*2＋2)*y*2－2*my*－3＝0，

所以*y*1＋*y*2＝，*y*1*y*2＝－，

从而*y*0＝，

所以|*GH*|2＝＋*y*＝＋*y*＝(*m*2＋1)*y*＋*my*0＋.

又＝

＝

＝

＝(1＋*m*2)(*y*－*y*1*y*2)，

故|*GH*|2－＝*my*0＋(1＋*m*2)*y*1*y*2＋

＝－＋

＝＞0，

所以|*GH*|＞.

故点*G*在以*AB*为直径的圆外．

方法二：(1)同方法一．

(2)设点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，则＝，＝.

由得(*m*2＋2)*y*2－2*my*－3＝0，

所以*y*1＋*y*2＝，*y*1*y*2＝－，

从而·＝＋*y*1*y*2

＝＋*y*1*y*2

＝(*m*2＋1)*y*1*y*2＋*m*(*y*1＋*y*2)＋

＝＋＋

＝＞0，

所以cos〈，〉＞0.

又，不共线，所以∠*AGB*为锐角．

故点*G*在以*AB*为直径的圆外．

3. 21．、[2014·浙江卷] 如图1­6，设椭圆*C*：＋＝1(*a*>*b*>0)，动直线*l*与椭圆*C*只有一个公共点*P*，且点*P*在第一象限．

(1)已知直线*l*的斜率为*k*，用*a*，*b*，*k*表示点*P*的坐标；

(2)若过原点*O*的直线*l*1与*l*垂直，证明：点*P*到直线*l*1的距离的最大值为*a*－*b*.

全品高考网欢迎您！！！请登录：     http://gk.canpoint.cn                        全品中考网欢迎您！！！请登录：     http://zk.canpoint.cn  

图1­6

21．解：(1)设直线*l*的方程为*y*＝*kx*＋*m*(*k*<0)，由消去*y*得(*b*2＋*a*2*k*2)*x*2＋2*a*2*kmx*＋*a*2*m*2－*a*2*b*2＝0.

由于*l*与*C*只有一个公共点，故*Δ*＝0，即*b*2－*m*2＋*a*2*k*2＝0，解得点*P*的坐标为.

又点*P*在第一象限，故点*P*的坐标为*P*.

(2)由于直线*l*1过原点*O*且与*l*垂直，故直线*l*1的方程为*x*＋*ky*＝0，所以点*P*到直线*l*1的距离*d*＝，

整理得*d*＝.

因为*a*2*k*2＋≥2*ab*，所以≤＝*a*－*b*，

当且仅当*k*2＝时等号成立．

所以，点*P*到直线*l*1的距离的最大值为*a*－*b*.

4.[2014·四川卷] 已知椭圆*C*：＋＝1(*a*>*b*>0)的焦距为4，其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形．

(1)求椭圆*C*的标准方程．

(2)设*F*为椭圆*C*的左焦点，*T*为直线*x*＝－3上任意一点，过*F*作*TF*的垂线交椭圆*C*于点*P*，*Q*.

①证明：*OT*平分线段*PQ*(其中*O*为坐标原点)；

②当最小时，求点*T*的坐标．

20．解：(1)由已知可得

解得*a*2＝6，*b*2＝2，

所以椭圆*C*的标准方程是＋＝1.

(2)①证明：由(1)可得，*F*的坐标是(－2，0)，设*T*点的坐标为(－3，*m*)，

则直线*TF*的斜率*kTF*＝＝－*m*.

当*m*≠0时，直线*PQ*的斜率*kPQ*＝.直线*PQ*的方程是*x*＝*my*－2.

当*m*＝0时，直线*PQ*的方程是*x*＝－2，也符合*x*＝*my*－2的形式．

设*P*(*x*1，*y*1)，*Q*(*x*2，*y*2)，将直线*PQ*的方程与椭圆*C*的方程联立，得

消去*x*，得(*m*2＋3)*y*2－4*my*－2＝0，

其判别式*Δ*＝16*m*2＋8(*m*2＋3)>0.

所以*y*1＋*y*2＝，*y*1*y*2＝，

*x*1＋*x*2＝*m*(*y*1＋*y*2)－4＝.

设*M*为*PQ*的中点，则*M*点的坐标为.

所以直线*OM*的斜率*kOM*＝－，

又直线*OT*的斜率*kOT*＝－，

所以点*M*在直线*OT*上，

因此*OT*平分线段*PQ*.

②由①可得，

|*TF*|＝，

|*PQ*|＝

＝

＝

＝.

所以＝＝

≥＝.

当且仅当*m*2＋1＝，即*m*＝±1时，等号成立，此时取得最小值．

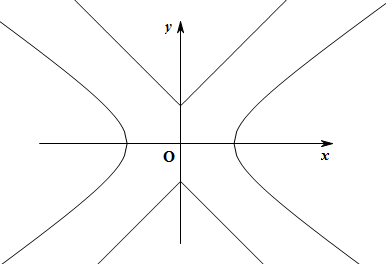
故当最小时，*T*点的坐标是(－3，1)或(－3，－1)．

5. （2013年上海市秋季高考理科数学）（3分+5分+8分）如图，已知曲线，曲线，P是平面上一点，若存在过点P的直线与都有公共点，则称P为“C1—C2型点”．

(1)在正确证明的左焦点是“C1—C2型点”时，要使用一条过该焦点的直线，试写出一条这样的直线的方程（不要求验证）；

(2)设直线与有公共点，求证，进而证明原点不是“C1—C2型点”；

(3)求证：圆内的点都不是“C1—C2型点”．



解：（1）C1的左焦点为，过F的直线与C1交于，与C2交于，故C1的左焦点为“C1-C2型点”，且直线可以为；

（2）直线与C2有交点，则

，若方程组有解，则必须；[来源:学§科§网Z§X§X§K]

直线与C2有交点，则

，若方程组有解，则必须

故直线至多与曲线C1和C2中的一条有交点，即原点不是“C1-C2型点”。

（3）显然过圆内一点的直线若与曲线C1有交点，则斜率必存在；

根据对称性，不妨设直线斜率存在且与曲线C2交于点，则



直线与圆内部有交点，故

化简得，。学科网(www.zxxk.com)--国内最大的教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！。。。。。。。。。。。①

若直线与曲线C1有交点学科网(www.zxxk.com)--国内最大的教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！，则





化简得，。。。。。②

由①②得，

但此时，因为，即①式不成立；

当时，①式也不成立

综上，直线若与圆内有交点，则不可能同时与曲线C1和C2有交点，

即圆内的点都不是“C1-C2型点” ．

6. （2012北京卷）

已知曲线lfxlby.

（1）若曲线lfxlby是焦点在lfxlby轴上的椭圆，求lfxlby的取值范围；

（2）设lfxlby，曲线lfxlby与lfxlby轴的交点为lfxlby，lfxlby（点lfxlby位于点lfxlby的上方），直线lfxlby与

曲线lfxlby交于不同的两点lfxlby，lfxlby，直线lfxlby与直线lfxlby交于点lfxlby，求证：lfxlby，lfxlby，lfxlby

三点共线.

解：（1）原曲线方程可化简得：lfxlby

由题意可得：lfxlby，解得：lfxlby

（2）由已知直线代入椭圆方程化简得：lfxlby，

lfxlby，解得：lfxlby  
由韦达定理得：lfxlby①，lfxlby，②

设lfxlby，lfxlby，lfxlby

lfxlby方程为：lfxlby，则lfxlby，

lfxlbylfxlby，lfxlby，

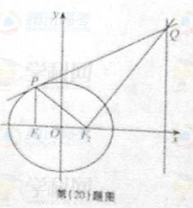
欲证lfxlby三点共线，只需证lfxlby，lfxlby共线

即lfxlby成立，化简得：lfxlby

将①②代入易知等式成立，则lfxlby三点共线得证。（lby lfx）

7.（ 2012安徽卷）如图，lfxlby分别是椭圆lfxlby

的左，右焦点，过点lfxlby作lfxlby轴的垂线交椭圆的上半部分于点lfxlby，

过点lfxlby作直线lfxlby的垂线交直线lfxlby于点lfxlby；

（I）若点lfxlby的坐标为lfxlby；求椭圆lfxlby的方程；

（II）证明：直线lfxlby与椭圆lfxlby只有一个交点。

【解析】（I）点lfxlby代入lfxlby得：lfxlby

lfxlby ①

又lfxlby ② lfxlby③

由①②③得：lfxlby 既椭圆lfxlby的方程为lfxlby

（II）设lfxlby；则lfxlby

得：lfxlby lfxlby

过点lfxlby与椭圆lfxlby相切的直线斜率lfxlby

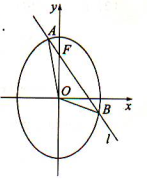
得：直线lfxlby与椭圆lfxlby只有一个交点。

8.（2011全国大纲理21）

已知O为坐标原点，F为椭圆在y轴正半轴上的焦点，过F且斜率为的直线与C交于A、B两点，点P满足

（Ⅰ）证明：点P在C上；

（Ⅱ）设点P关于点O的对称点为Q，证明：A、P、B、Q四点在同一圆上．



解：

（I）F（0，1），的方程为，

代入并化简得

 …………2分

设

则



由题意得

所以点P的坐标为

经验证，点P的坐标为满足方程

故点P在椭圆C上。 …………6分

（II）由和题设知， 

PQ的垂直平分线的方程为

 ①

设AB的中点为M，则，AB的垂直平分线为的方程为

 ②

由①、②得的交点为。 …………9分



故|NP|=|NA|。

又|NP|=|NQ|，|NA|=|NB|，

所以|NA|=|NP|=|NB|=|MQ|，

由此知A、P、B、Q四点在以N为圆心，NA为半径的圆上 …………12分