解析几何专练：轨迹与方程问题（20151228）

班级 姓名

1. [2015·陕西卷] 已知椭圆*E*：＋＝1(*a*>*b*>0)的半焦距为*c*，原点*O*到经过两点(*c*，0)，(0，*b*)的直线的距离为*c*.

(1)求椭圆*E*的离心率；

(2)如图，*AB*是圆*M*：(*x*＋2)2＋(*y*－1)2＝的一条直径，若椭圆*E*经过*A*，*B*两点，求椭圆*E*的方程．

D:\2015文件\数学\陕西卷（理数）-TY1\15SXL7.EPS解：(1)过点(*c*，0)，(0，*b*)的直线方程为*bx*＋*cy*－*bc*＝0，

则原点*O*到该直线的距离*d*＝＝，

由*d*＝*c*，得*a*＝2*b*＝2，解得离心率＝.

(2)方法一：由(1)知，椭圆*E*的方程为*x*2＋4*y*2＝4*b*2.①

依题意，圆心*M*(－2，1)是线段*AB*的中点，且|*AB*|＝.

易知，*AB*与*x*轴不垂直，设其方程为*y*＝*k*(*x*＋2)＋1，代入①得

(1＋4*k*2)*x*2＋8*k*(2*k*＋1)*x*＋4(2*k*＋1)2－4*b*2＝0.

设*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，则*x*1＋*x*2＝－，*x*1*x*2＝.

由*x*1＋*x*2＝－4，得－＝－4，解得*k*＝.从而*x*1*x*2＝8－2*b*2.

于是|*AB*|＝|*x*1－*x*2|＝＝.

由|*AB*|＝，得＝，解得*b*2＝3.故椭圆*E*的方程为＋＝1.

方法二：由(1)知，椭圆*E*的方程为*x*2＋4*y*2＝4*b*2.②

依题意，点*A*，*B*关于圆心*M*(－2，1)对称，且|*AB*|＝.

设*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，则*x*＋4*y*＝4*b*2，*x*＋4*y*＝4*b*2，

两式相减并结合*x*1＋*x*2＝－4，*y*1＋*y*2＝2，得－4(*x*1－*x*2)＋8(*y*1－*y*2)＝0.

易知*AB*与*x*轴不垂直，则*x*1≠*x*2，所以*AB*的斜率*kAB*＝＝.

因此直线*AB*的方程为*y*＝(*x*＋2)＋1，代入②得*x*2＋4*x*＋8－2*b*2＝0，

所以*x*1＋*x*2＝－4，*x*1*x*2＝8－2*b*2.于是|*AB*|＝|*x*1－*x*2|＝

＝.

由|*AB*|＝，得＝，解得*b*2＝3.故椭圆*E*的方程为＋＝1.

全品高考网欢迎您！！！请登录：     http://gk.canpoint.cn                        全品中考网欢迎您！！！请登录：     http://zk.canpoint.cn  2. [2014·重庆卷] 如图所示，设椭圆＋＝1(*a*>*b*>0)的左、右焦点分别为*F*1，*F*2，点*D*在椭圆上，*DF*1⊥*F*1*F*2，＝2，△*DF*1*F*2的面积为.

(1)求椭圆的标准方程；

(2)设圆心在*y*轴上的圆与椭圆在*x*轴的上方有两个交点，且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点，求圆的半径．

解：(1)设*F*1(－*c*，0)，*F*2(*c*，0)，其中*c*2＝*a*2－*b*2.由＝2得|*DF*1|＝＝*c*.

从而*S*△*DF*1*F*2＝|*DF*1||*F*1*F*2|＝*c*2＝，故*c*＝1.

从而|*DF*1|＝，由*DF*1⊥*F*1*F*2得|*DF*2|2＝|*DF*1|2＋|*F*1*F*2|2＝，因此|*DF*2|＝，

所以2*a*＝|*DF*1|＋|*DF*2|＝2，故*a*＝，*b*2＝*a*2－*c*2＝1.

因此，所求椭圆的标准方程为＋*y*2＝1.

(2)如图所示，设圆心在*y*轴上的圆*C*与椭圆＋*y*2＝1相交，*P*1(*x*1，*y*1)，*P*2(*x*2，*y*2)是两个交点，*y*1>0，*y*2>0，*F*1*P*1，*F*2*P*2是圆*C*的切线，且*F*1*P*1⊥*F*2*P*2.由圆和椭圆的对称性，易知，*x*2＝－*x*1，*y*1＝*y*2，|*P*1*P*2|＝2|*x*1|.

全品高考网欢迎您！！！请登录：     http://gk.canpoint.cn                        全品中考网欢迎您！！！请登录：     http://zk.canpoint.cn  由(1)知*F*1(－1，0)，*F*2(1，0)，所以＝(*x*1＋1，*y*1)，＝(－*x*1－1，*y*1)．再由*F*1*P*1⊥*F*2*P*2得－(*x*1＋1)2＋*y*＝0.由椭圆方程得1－＝(*x*1＋1)2，即3*x*＋4*x*1＝0，解得*x*1＝－或*x*1＝0.

当*x*1＝0时，*P*1，*P*2重合，此时题设要求的圆不存在．

当*x*1＝－时，过*P*1，*P*2分别与*F*1*P*1，*F*2*P*2垂直的直线的交点即为圆心*C*.

由*F*1*P*1，*F*2*P*2是圆*C*的切线，且*F*1*P*1⊥*F*2*P*2，知*CP*1⊥*CP*2.又|*CP*1|＝|*CP*2|，故圆*C*的半径|*CP*1|＝|*P*1*P*2|＝|*x*1|＝.

3.[2014·陕西卷] 如图1­5所示，曲线*C*由上半椭圆*C*1：＋＝1(*a*>*b*>0，*y*≥0)和部分抛物线*C*2：*y*＝－*x*2＋1(*y*≤0)连接而成，*C*1与*C*2的公共点为*A*，*B*，其中*C*1的离心率为.

(1)求*a*，*b*的值；

(2)过点*B*的直线*l*与*C*1，*C*2分别交于点*P*，*Q*(均异于点*A*，*B*)，若*AP*⊥*AQ*，求直线*l*的方程．

全品高考网欢迎您！！！请登录：     http://gk.canpoint.cn                        全品中考网欢迎您！！！请登录：     http://zk.canpoint.cn  解：(1)在*C*1，*C*2的方程中，令*y*＝0，可得*b*＝1，且*A*(－1，0)，*B*(1，0)是上半椭圆*C*1的左、右顶点．

设*C*1的半焦距为*c*，由＝及*a*2－*c*2＝*b*2＝1得*a*＝2，∴*a*＝2，*b*＝1.

(2)方法一：由(1)知，上半椭圆*C*1的方程为＋*x*2＝1(*y*≥0)．

易知，直线*l*与*x*轴不重合也不垂直，设其方程为*y*＝*k*(*x*－1)(*k*≠0)，

代入*C*1的方程，整理得(*k*2＋4)*x*2－2*k*2*x*＋*k*2－4＝0.(\*)

设点*P*的坐标为(*xP*，*yP*)，∵直线*l*过点*B*，∴*x*＝1是方程(\*)的一个根．

由求根公式，得*xP*＝，从而*yP*＝，∴点*P*的坐标为.

同理，由得点*Q*的坐标为(－*k*－1，－*k*2－2*k*)．

∴＝(*k*，－4)，＝－*k*(1，*k*＋2)．∵*AP*⊥*AQ*，

∴*AP*·*AQ*＝0，即[*k*－4(*k*＋2)]＝0，∵*k*≠0，∴*k*－4(*k*＋2)＝0，解得*k*＝－.

经检验，*k*＝－符合题意，故直线*l*的方程为*y*＝－(*x*－1)．

方法二：若设直线*l*的方程为*x*＝*my*＋1(*m*≠0)，比照方法一给分．

4.[2014·辽宁卷] 圆*x*2＋*y*2＝4的切线与*x*轴正半轴，*y*轴正半轴围成—个三角形，当该三角形面积最小时，切点为*P*(如图所示)．双曲线*C*1：－＝1过点*P*且离心率为.

全品高考网欢迎您！！！请登录：     http://gk.canpoint.cn                        全品中考网欢迎您！！！请登录：     http://zk.canpoint.cn  (1)求*C*1的方程；

(2)椭圆*C*2过点*P*且与*C*1有相同的焦点，直线*l*过*C*2的右焦点且与*C*2交于*A*，*B*两点．若以线段*AB*为直径的圆过点*P*，求*l*的方程．

解：(1)设切点坐标为(*x*0，*y*0)(*x*0>0，*y*0>0)，则切线斜率为－，切线方程为*y*－*y*0＝－(*x*－*x*0)，即*x*0*x*＋*y*0*y*＝4，此时两个坐标轴的正半轴与切线的交点分别为，.故其围成的三角形的面积*S*＝··＝.由*x*＋*y*＝4≥2*x*0*y*0知，当且仅当*x*0＝*y*0＝时*x*0*y*0有最大值2，此时*S*有最小值4，因此点*P*的坐标为(，)．

由题意知解得*a*2＝1，*b*2＝2，故*C*1的方程为*x*2－＝1.

(2)由(1)知*C*2的焦点坐标为(－，0)，(，0)，由此可设*C*2的方程为＋＝1，其中*b*1>0.

由*P*(，)在*C*2上，得＋＝1，解得*b*＝3，

因此*C*2的方程为＋＝1.显然，*l*不是直线*y*＝0.

设直线*l*的方程为*x*＝*my*＋，点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，

由得(*m*2＋2)*y*2＋2 *my*－3＝0.又*y*1，*y*2是方程的根，因此

②

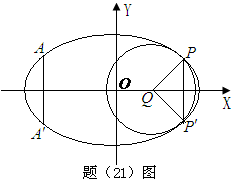
由*x*1＝*my*1＋，*x*2＝*my*2＋，得

因为＝(－*x*1，－*y*1)，＝(－*x*2，－*y*2)，由题意知·＝0，

所以*x*1*x*2－(*x*1＋*x*2)＋*y*1*y*2－(*y*1＋*y*2)＋4＝0，⑤

将①②③④代入⑤式整理得2*m*2－2 *m*＋4 －11＝0，

解得*m*＝－1或*m*＝－＋1.因此直线*l*的方程为

*x*－(－1)*y*－＝0或*x*＋(－1)*y*－＝0.

5. （2013重庆卷**）**如图所示，椭圆的中心为原点*O*，长轴在*x*轴上，离心率*e*＝，过左焦点*F*1作*x*轴的垂线交椭圆于*A*，*A*′两点，|*AA*′|＝4.

(1)求该椭圆的标准方程；

(2)取垂直于*x*轴的直线与椭圆相交于不同的两点*P*，*P*′，过*P*，*P*′作圆心为*Q*的圆，使椭圆上的其余点均在圆*Q*外，若*PQ*⊥*P*′*Q*，求圆*Q*的标准方程．

解：(1)由题意知点*A*(－*c*，2)在椭圆上，则＋＝1，从而*e*2＋＝1.

由*e*＝得*b*2＝＝8，从而*a*2＝＝16.故该椭圆的标准方程为＋＝1.

(2)由椭圆的对称性，可设*Q*(*x*0，0)．又设*M*(*x*，*y*)是椭圆上任意一点，则|*QM*|2＝(*x*－*x*0)2＋*y*2＝*x*2－2*x*0*x*＋*x*＋8＝(*x*－2*x*0)2－*x*＋8(*x*∈[－4，4])．

设*P*(*x*1，*y*1)，由题意，*P*是椭圆上到*Q*的距离最小的点，因此，上式当*x*＝*x*1时取得最小值．又因*x*1∈(－4，4)，所以上式当*x*＝2*x*0时取得最小值，从而*x*1＝2*x*0，且|*QP*|2＝8－*x*.

因为*PQ*⊥*P*′*Q*，且*P*′(*x*1，－*y*1)，所以·′＝(*x*1－*x*0，*y*1)·(*x*1－*x*0，－*y*1)＝0，

即(*x*1－*x*0)2－*y*＝0.由椭圆方程及*x*1＝2*x*0得*x*－8＝0，

解得*x*1＝±，*x*0＝＝±，从而|*QP*|2＝8－*x*＝.

故这样的圆有两个，其标准方程分别为＋*y*2＝，＋*y*2＝.

6. （2013四川卷）已知椭圆C：＋＝1(a>b>0)的两个焦点分别为F1(－1，0)，F2(1，0)，且椭圆C经过点P.

(1)求椭圆C的离心率；

(2)设过点A(0，2)的直线l与椭圆C交于M，N两点，点Q是线段MN上的点，且＝＋，求点Q的轨迹方程．

解：所以，.



又由已知，,所以椭圆C的离心率……………4分



由知椭圆C的方程为.



设点Q的坐标为(x,y).

(1)当直线与轴垂直时，直线与椭圆交于两点，此时点坐标为



(2) 当直线与轴不垂直时，设直线的方程为.



因为在直线上，可设点的坐标分别为，则



. 又



由，得，即



①



将代入中，得 ②



由得.由②可知



代入①中并化简，得 ③



因为点在直线上，所以，代入③中并化简，得.



由③及，可知,即.



又满足，故.



由题意，在椭圆内部，所以，又由有



且，则.



所以点的轨迹方程是，其中，，



7.（2013辽宁卷） 如图，抛物线*C*1：*x*2＝4*y*，*C*2：*x*2＝－2*py*(*p*>0)．点*M*(*x*0，*y*0)在抛物线*C*2上，过*M*作*C*1的切线，切点为*A*，*B*(*M*为原点*O*时，*A*，*B*重合于*O*)．当*x*0＝1－时，切线*MA*的斜率为－.

(1)求*p*的值；

(2)当*M*在*C*2上运动时，求线段*AB*中点*N*的轨迹方程(*A*，*B*重合于*O*时，中点为*O*)．

全品高考网欢迎您！！！请登录：     http://gk.canpoint.cn                        全品中考网欢迎您！！！请登录：     http://zk.canpoint.cn  解： (1)因为抛物线*C*1：*x*2＝4*y*上任意一点(*x*，*y*)的切线斜率为*y*′＝，且切线*MA*的斜率为－，所以*A*点坐标为.故切线*MA*的方程为*y*＝－(*x*＋1)＋.

因为点*M*(1－，*y*0)在切线*MA*及抛物线*C*2上，于是

*y*0＝－(2－)＋＝－，①

*y*0＝－＝－.②由①②得*p*＝2.

(2)设*N*(*x*，*y*)，*A*，*B*，*x*1≠*x*2，由*N*为线段*AB*中点知*x*＝，③

*y*＝.④切线*MA*，*MB*的方程为*y*＝(*x*－*x*1)＋，⑤

*y*＝(*x*－*x*2)＋.⑥由⑤⑥得*MA*，*MB*的交点*M*(*x*0，*y*0)的坐标为*x*0＝，*y*0＝.

因为点*M*(*x*0，*y*0)在*C*2上，即*x*＝－4*y*0，所以*x*1*x*2＝－.⑦

由③④⑦得*x*2＝*y*，*x*≠0.

当*x*1＝*x*2时，*A*，*B*重合于原点*O*，*AB*中点*N*为*O*，坐标满足*x*2＝*y*.

因此*AB*中点*N*的轨迹方程为*x*2＝*y*.

8. （2013福建）如图，在正方形中，为坐标原点，点的坐标为，点的坐标为．分别将线段和十等分，分点分别记为和，连结，过做轴的垂线与交于点．

（1）求证：点都在同一条抛物线上，并求该抛物线的方程；

（2）过点做直线与抛物线交于不同的两点，若与的面积比为，求直线的方程．

解：（Ⅰ）依题意，过且与x轴垂直的直线方程为

全品高考网欢迎您！！！请登录：     http://gk.canpoint.cn                        全品中考网欢迎您！！！请登录：     http://zk.canpoint.cn  ，直线的方程为

设坐标为，由得：，即，

都在同一条抛物线上，且抛物线方程为

（Ⅱ）依题意：直线的斜率存在，设直线的方程为

由得

此时，直线与抛物线恒有两个不同的交点

设：，则

又，

分别带入，解得直线的方程为，即或