

# 基于紧框架正则化的并行磁共振图像重建算法研究

刘俊伟

## 摘要

并行磁共振成像（pMRI）是一种加速磁共振成像过程的技术，重建收集到的 pMRI 数据是一个病态问题，正则化方法是解决病态问题的必要条件。在原论文中，提出一个基于二维紧框架与 Haar 小波相融合的导向性 Haar 紧框架系统（DHF），以此来提出图像多个方向的特征，紧接着将 DHF 作为正则项，提出一个 pMRI 重建目标模。原论文利用快速近端算法求解该模型，且实现了自适应调整正则化参数。除复现之外，本文还引用 PD3O 算法进一步减少了求解模型最优解的时间。在模拟实验中表明，本文的复现结果良好，同时在脑部切片实验中也发现 PD3O 算法求解模型的时间比原作者提出的迭代模型速度快了近一倍以上。

**关键词：**pMRI；紧框架；邻近算子；PD3O 算法

## 1 引言

磁共振成像（Magnetic Resonance Imaging, MRI）是一种广泛使用医学成像技术，它可以直观地展示出人体内部器官和结构的截面图像。根据核磁共振（Nuclear Magnetic Resonance, NMR）原理，在外部磁场作用下，原子的旋转排列方向会发生改变，原子核会出现核自旋现象，在接收到特定频率的射频脉冲时，原子核会发生共振吸收，去掉射频脉冲后，原子核会将吸收的能量以电磁波的形式放出。MRI 技术利用这种原理，对人体施加磁场和射频脉冲，并接收人体内氢原子释放的电磁波。由于人体内不同组织结构的水含量不同，因此不同结构所释放的电磁波能量存在差异，结合计算机技术的处理就能检测出人体内部精确的结构图像。此外，快速变化梯度磁场的应用也加快了磁共振成像的速度，使得 MRI 具有良好的实用性，为临床诊断带来了极大的帮助。

与使用 X 射线的断层扫描（Computed Tomography, CT）技术不同，MRI 使用的是磁场，因此对人体没有电离辐射伤害，同时具有获取数据量大、成像分辨率高等特点，但缺点是扫描成像的时间长<sup>[1]</sup>。由于 MRI 机器扫描的过程中病人需要躺在狭窄的空间里，其会对漫长的成像过程感到不适<sup>[2]</sup>，而且人体和机器的抖动也会导致采集数据出现偏差，所以采集数据时病人不得不屏住呼吸。

为了加速 MRI 过程，近些年来的磁共振成像都是基于并行磁共振成像（parallel MRI, pMRI）技术，pMRI 可以同时使用多个接收线圈接收磁共振信号，并且仅采集部分 k-空间数据，减少成像扫描时间，最后通过重建算法重建出目标切片图像，从而极大地加速 MRI 过程。在采样率较低的情况下，由于视场（Field Of View, FOV）的缩小，重建出的图像容易存在严重的混叠伪影和细节模糊等瑕疵，影响临床诊断，因此需要研究重建算法来提高重建图像的质量。

## 2 相关工作

pMRI 系统采集频率域数据，再通过重建算法得到空域目标图像，其中频率域空间称为 k-空间（k-space）。pMRI 重建算法分为两大类，一类是基于图像域的算法如 SENSE(Sensitivity Encoding)<sup>[3]</sup>，该类算法在图像域中去除目标图像的混叠伪影，另一类是基于 k-空间的算法如 GRAPPA(Generalized Autocalibrating Partially Parallel Acquisitions)<sup>[4]</sup>，其通过填补缺失的 k-空间数据来完成磁共振图片重建。

## 2.1 基于图像域的重建算法

pMRI 系统将多个线圈设置在目标组织周围的不同位置，每个线圈对靠近它的组织区域所释放的频域信号更灵敏，因此在线圈接收到的信号中，靠近线圈的区域的信号强度更强，这种由空间位置不同造成的信号强弱差异称为线圈的灵敏度（Sensitivity），将其数值化可得到各个线圈的灵敏度矩阵（Sensitivity Map），每个线圈的灵敏度矩阵与目标图像的乘积即为该线圈的线圈图像（Coil Image），因此线圈灵敏度可以带来额外的空间位置信息。基于图像域的重建算法在图像域上借助灵敏度信息去除目标图像中的混叠伪影，得到清晰的目标图像。图像域算法的重建质量依赖于灵敏度信息的准确程度，在原始的 SENSE 算法中，灵敏度信息通过额外的预扫描得到，在自校准（Auto-Calibration）方法如 TSENSE<sup>[5]</sup>中，会使用 k-空间中心部分的全采样数据（Auto-Calibration Signal, ACS）来估计灵敏度。由于 MRI 在扫描采样过程中必定存在误差，所以灵敏度矩阵也不可能准确得知其真实值，所以有一些算法<sup>[6]</sup>会对灵敏度反复估计及更新，以此进一步提升图像重建质量。

除了改进灵敏度信息的准确性之外，图像域方法的另一个重要改进方向是引入先验知识，用稀疏表示和正则化约束的方式改善重建效果，其中最常用的技术是压缩感知（Compress Sensing, CS）。Lustig 等人<sup>[7]</sup>将压缩感知技术用于 MRI 重建，提出了 CS-MRI（Compress Sensing-MRI）重建模型，对二维目标图像进行稀疏变换，提取特征系数，对特征系数进行稀疏约束来去除其中的伪影和噪声信息，引入 CS 后可以提升重建质量并进一步降低 k-空间数据的采集量。CS-SENSE(Compress Sensing-MRI-SENSE)<sup>[8]</sup>结合 SENSE 算法与 CS-MRI 模型，在 SENSE 的基础上增加了稀疏约束和全变差（Total Variation, TV）正则化约束，提升重建图像对边缘细节的保留能力。

## 2.2 基于 k-空间的重建算法

在图像域中，每个线圈的灵敏度矩阵与目标图像的乘积为该线圈的线圈图像，而在全采样的情况下，线圈图像的傅里叶变换即为该线圈采集到的 k-空间数据，因此在 k-空间中，灵敏度信息的作用相当于灵敏度信息频谱与 k-空间数据的卷积，即每个 k-空间数据都能由其邻域数据的线性组合表示，且 k-空间数据存在冗余性。基于 k-空间的方法利用这种冗余性，使用已获得的数据估计出各个线圈缺失的 k-空间数据，通过傅里叶逆变换得到线圈图像，再将多幅线圈图像进行合并得到目标图像。

GRAPPA 算法的基本思想是任意位置的 k 空间数据可以通过在所有线圈相同位置邻近区域内的其他数据线性插值得到，插值核系数通过 ACS 的数据来进行校准。在重建过程中，通过插值核系数与采样数据的线性组合估计出未采样数据。SPIRiT (Iterative Self-consistent Parallel Imaging Reconstruction)<sup>[9]</sup>对 GRAPPA 进行改进，与 GRAPPA 只使用源点来拟合目标点不同，SPIRiT 使用目标点邻域内全部数据进行拟合，包括源点和未知的数据点，SPIRiT 通过迭代求解的方式，逐步地更新与校正缺失的数据来完成重建。

# 3 本文方法

## 3.1 本文方法概述

在 pMRI 重建问题中，线圈  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, p$ , 其中  $p$  代表线圈数目) 采集的数据  $g_l$  可以用数学公式表达成

$$g_l = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{P} \mathcal{F} S_l u + \eta_l \quad (3.1.1)$$

其中  $\eta_l$  为线圈  $l$  的加性噪声, 对角矩阵  $\mathcal{S}_l$  为线圈  $l$  的灵敏度矩阵,  $\mathcal{F}$  为离散傅里叶变换矩阵,  $\mathcal{F}^{-1}$  为离散逆傅里叶变换矩阵, 对角矩阵  $\mathcal{P}$  为采样矩阵, 对角元素由 1 和 0 构成, 分别表示对应位置采样和非采样,  $u$  为目标图像。为了方便表述, 将公式(3.1.1)中所代表的全部线圈数据结合起来, 记为矩阵形式, 则有如下公式。

$$g = Mu + \eta \quad (3.1.2)$$

其中  $g$  是叠放的线圈图像数据,  $M$  是  $\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{S}_l$ 、 $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{F}^{-1}$  的组合,  $\eta$  是叠放的噪声信息, 准确的数学公式表达如下。

$$g := \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix}, \quad M := \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{F}\mathcal{S}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{F}\mathcal{S}_p \end{bmatrix}, \quad \eta := \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

公式(3.1.2)在 SENSE<sup>[3]</sup>中使用最小二乘法来求解, 但由于接收线圈的复杂几何结构, 实际灵敏度  $\mathcal{S}_l$  在现实场景的应用中几乎不可能准确预估, 这些误差连同线圈图像中包含的噪声在重建图像中会被放大, 导致重建图像会出现混叠伪影, 这种现象在采样率较小时尤为严重, 所以 SENSE 模型并不能很好的解决这一问题, 因此必须加上正则项来构架目标模型以此得到一个较好的重建结果。

本文利用一个基于紧框架而得到的正则项来消除重建结果图中的混叠伪影以及保留图像中的边缘部分, 且正则化参数也在本文中实现了自适应调整。本文所提出的目标模型如下所示。

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \|Mu - g\|_2^2 + \|\Gamma W u\|_1 \right\} \quad (3.1.4)$$

上式中的  $\Gamma$  是对角矩阵且对角元素均是非负数,  $W$  是一个紧框架矩阵 (紧框架在 3.2 节会介绍到),  $\Gamma$  中的每个对角线元素正好对应着紧框架系数, 同时可以理解为里面存放着正则化参数。

本文通过改进 Li 等人<sup>[10]</sup>提出的迭代模型来求解目标函数(3.1.4), 本文第一个实验是一个仿真实验, 实验的对照图是图 1(a), 图 1(d)将会当作迭代模型的初始值, 该图如何得来将会在章节 3.5 中叙述, 通过迭代算法求解目标函数(3.1.4), 作者得到的重建结果如图 2(a)。

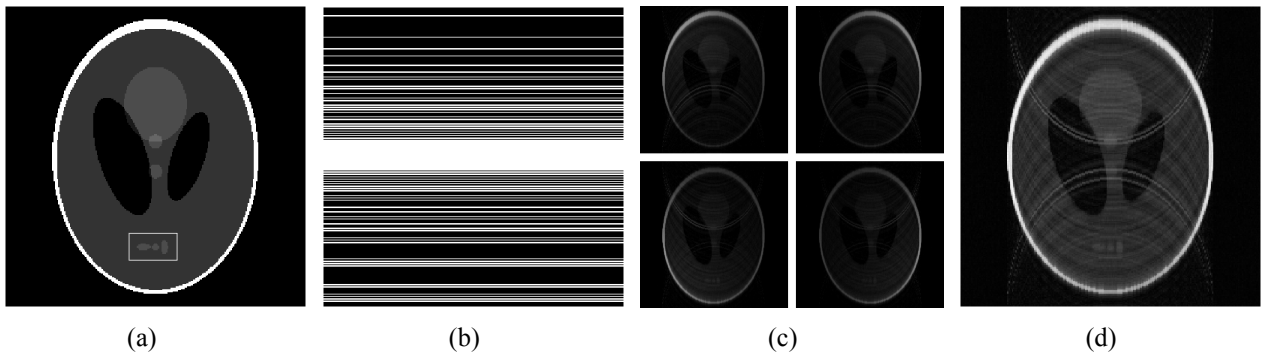


图 1: (a) 真实图 (白色框中的区域在后面将会放大做对比) (b) 采样图, 采样率为 33% (c) 四个线圈图 (d) 算法初始迭代图像 (SoS 图)

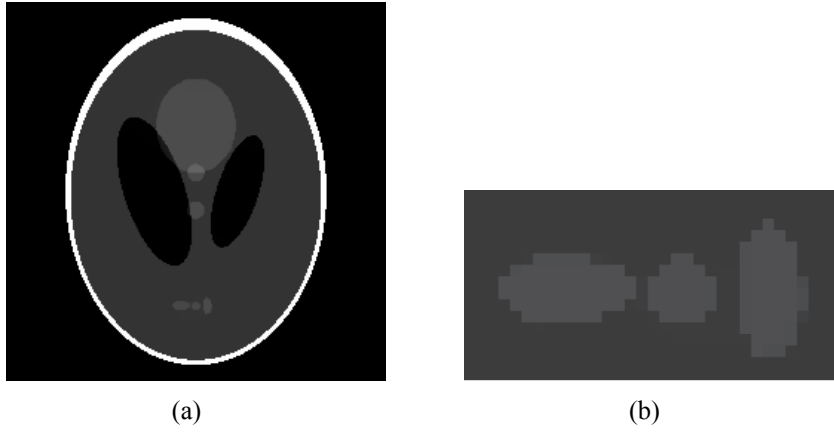


图 2: (a) 作者重建的结果图 (b) 按照图 1(a)白色框的区域放大图 2(a) 中的对应区域

### 3.2 紧框架介绍

首先介绍框架 (Frame) 和紧框架 (Tight Frame) 的概念与性质。考虑  $n$  维希尔伯特空间  $\mathcal{H}$ , 令  $\mathcal{N} = 1, \dots, n$  表示索引,  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  为  $\mathcal{H}$  中的一组向量。若对于任意  $x \in \mathcal{H}$ , 均存在两个常数  $0 < A \leq B < \infty$ , 满足以下框架条件:

$$A\|x\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^n |\langle x, \varphi_i \rangle|^2 \leq B\|x\|_2^2 \quad (3.2.1)$$

则  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  为  $\mathcal{H}$  的一个框架。其中  $A$  和  $B$  称为框架边界 (Frame Bounds)。框架与基 (Basis) 类似, 可以通过  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  和其对应的系数 (Coefficients) 表示  $x$ , 在信号和图像处理中框架可以用来表征目标信号或提取特征, 框架系数即为该框架提取的特征信息。与基不同, 构成基的向量组是线性独立的, 而框架中的各个向量不一定线性独立, 因此框架本身具有冗余性, 可以根据目的更加灵活地选择不同的向量来构成框架。

框架对目标信号  $x$  的作用为分解与重建。分解指的是计算框架系数, 提取特征; 重建则是使用框架系数重构目标信号。框架的分解操作分析算子 (Analysis Operator) 表示, 用于计算目标信号的框架系数, 表示该框架的特征提取操作, 定义如下:

$$W : x \in \mathcal{H} \mapsto \{\langle x, \varphi_i \rangle\}_{i \in \mathcal{N}} = \{X_i\}_{i \in \mathcal{N}} \in \ell^2 \quad (3.2.2)$$

其中  $X_i$  是  $\varphi_i$  对应的系数, 为  $x$  与  $\varphi_i$  的内积。综合算子 (Synthesis Operator) 为分析算子的伴随算子 (Adjoint Operator), 表示框架的重建过程:

$$W^T = \{X_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \ell^2 \mapsto \sum_{i \in \mathcal{N}} X_i \varphi_i \in \mathcal{H} \quad (3.2.3)$$

用框架算子 (Frame Operator)  $O$  表示框架的分解和重建操作的组合, 即:

$$O = W^T W \quad (3.2.4)$$

定义框架  $\varphi_{i \in \mathcal{N}}$  的对偶框架 (Dual Frame)  $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i \in \mathcal{N}} = \{O^{-1} \varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ , 其中:

$$\tilde{\varphi}_i = O^{-1} \varphi_i, i \in \mathcal{N} \quad (3.2.5)$$

则对偶框架  $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  的分析算子  $\tilde{W} = WO^{-1}$ 。由于

$$W^T \tilde{W} = W^T W O^{-1} = O O^{-1} = I \quad (3.2.6)$$

则目标信号  $x$  可以用框架  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  与其对偶框架  $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  的分析和综合算子表示，即：

$$x = \sum_{i \in \mathcal{N}} \langle x, \tilde{\varphi}_i \rangle \varphi_i = W^T \tilde{W} x = \tilde{W}^T W x = \sum_{i \in \mathcal{N}} \langle x, \varphi_i \rangle \tilde{\varphi}_i \quad (3.2.7)$$

因此框架可以在框架域内表示目标信号，提取其特征信息，并通过对偶框架完整地重构目标信息。给定一组框架  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  与其对偶框架  $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ ，在框架域内， $x$  可被变换为

$$X = \tilde{W} x \quad (3.2.8)$$

其中  $\tilde{W}$  表示变换或者特征提取的操作， $X$  为框架系数的叠加。重建  $x$  的过程则为

$$x = W^T X \quad (3.2.9)$$

其中  $W^T$  表示用框架系数  $X$  重建  $x$  的操作。在框架条件(3.2.1)中，如果框架边界  $A = B$ ，则称框架  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  为紧框架，有

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, \varphi_i \rangle|^2 = A \|x\|_2^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left| \left\langle \frac{1}{\sqrt{A}} x, \varphi_i \right\rangle \right|^2 = \|x\|_2^2 \quad (3.2.10)$$

则任意一组紧框架  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  可以缩放为框架边界等于 1 的 Parseval 紧框架  $\{(1/\sqrt{A})\varphi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ 。Parseval 紧框架有自对偶（Self Dual）和完美重构的性质，即：

$$\tilde{W} = W, \quad W^T W = I \quad (3.2.11)$$

因此使用紧框架系统在分解和重建目标信号的过程中，不需要额外计算其对偶框架，使用  $W$  对目标信号进行分解后，直接使用其伴随算子  $W^T$  就可以完整地重构目标信号。

本文提出的紧框架提取特征的过程如图 3 所示。

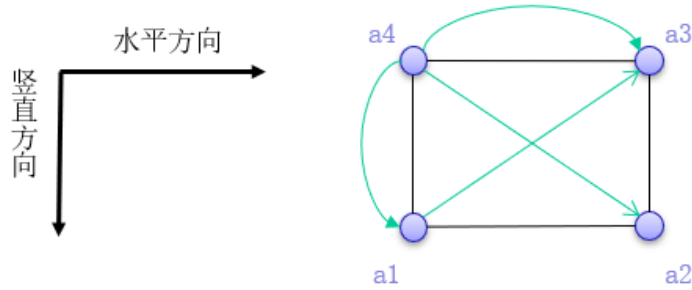


图 3: 紧框架提取特征示意图

其中提取四个方向的特征作为高频信息，分别是水平方向  $\left(\frac{a4 - a3}{4}\right)$ 、竖直方向  $\left(\frac{a4 - a1}{4}\right)$ 、 $\pm 45^\circ$  方向  $\left(\frac{a4 - a2}{4}\right)$  与  $\left(\frac{a1 - a3}{4}\right)$ 。此外还提出图像的低频信息  $\left(\frac{a1 + a2 + a3 + a4}{4}\right)$ 。

### 3.3 迭代模型介绍

目标函数(3.1.4)中的保真项是  $\|Mu - g\|^2$ ，其中  $u$  是一个实向量，而  $g$  是一个复向量，由于矩阵  $M$  包含傅里叶矩阵  $\mathcal{F}$ ，所以矩阵  $M$  也是一个复矩阵，所以为了避免实数与复数混淆，需要修改保真项，使其由一个实矩阵和实向量构成。

定义

$$P = \begin{bmatrix} \text{Re}(M) \\ \text{Im}(M) \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \text{Re}(g) \\ \text{Im}(g) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \text{Re}(\eta) \\ \text{Im}(\eta) \end{bmatrix}. \quad (3.3.1)$$

上式中  $\text{Re}(\cdot)$  和  $\text{Im}(\cdot)$  分别表示实部和虚部。利用上式可以重新改写公式(3.1.1)，得到如下公式。

$$z = Pu + \varepsilon \quad (3.3.2)$$

对于实向量  $u$  则有  $\|Mu - g\|_2^2 = \|Pu - z\|_2^2$  成立，所以公式(3.1.4)将会被改写成如下形式。

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \|Pu - z\|_2^2 + \|\Gamma W u\|_1 \right\}. \quad (3.3.3)$$

上式中全是实数，没有复数，可以避免运算时混淆，实际实验时将会采用公式(3.3.3)。

对于目标函数(3.3.3)，定义向量  $\omega$  是向量  $u$  经过紧框架矩阵  $W$  运算后得到的紧框架系数，即  $\omega = Wu$ 。因为  $W$  是紧框架矩阵，所以根据 3.2 节的内容介绍，会有  $W^T W = I$  成立，因此向量  $\omega$  就会满足  $\omega = WW^T \omega$ ，因此目标函数(3.3.3)会转换成

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \frac{1}{2} \|PW^T w - z\|_2^2 + \|\Gamma w\|_1 \\ & \text{subject to } w = WW^T \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

目标函数(3.3.3)与目标函数(3.3.4)是等价的。当  $u^*$  是目标函数(3.3.3)的一个解时，则  $\omega^* = Wu^*$  是目标函数(3.3.4)的解。相反地，当  $\omega^*$  是目标函数(3.3.4)的一个解时，则  $u^* = W^T \omega^*$  是目标函数(3.3.3)的一个解。接下来将引入迭代模型求解目标函数(3.3.4)，在此之前先介绍邻近算子 (proximal operator) 和部分凸优化概念。

假设凸函数  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$  满足  $\text{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$ ，则将该凸函数称为下半连续凸函数，全体下半连续凸函数记为  $\Gamma_0(\mathbb{R}^d)$ 。假设  $u \in \mathbb{R}^d$ ，则在  $\mathbb{R}^d$  上的闭凸集  $C$  的指示函数定义为

$$\iota_C(u) := \begin{cases} 0 & \text{若 } u \in C, \\ +\infty & \text{其他} \end{cases}$$

显而易见对于任意的非空闭凸集  $C$ ，其指示函数  $\iota_C$  都在  $\Gamma_0(\mathbb{R}^d)$  上。根据指示函数的定义，目标函数(3.3.4)则可以被重写为

$$\min_w \left\{ \frac{1}{2} \|PW^T w - z\|_2^2 + \|\Gamma w\|_1 + \iota_{\{0\}}((I - WW^T)w) \right\}. \quad (3.3.5)$$

目标函数(3.3.5)是三个凸函数之和，对于此类模型 Li<sup>[11]</sup>等人提出了一个迭代模型求解该类问题。接下来回顾邻近算子与共轭函数的概念。

假设函数  $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$  以及参数  $\lambda \geq 0$ ，函数  $f$  的邻近算子记为  $\text{prox}_{\lambda f}$ ，给定一个固定点  $x \in \mathbb{R}^d$ ，函数  $f$  的邻近算子表示为

$$\text{prox}_{\lambda f}(x) := \underset{u}{\text{argmin}} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|_2^2 + f(u) : u \in \mathbb{R}^d \right\}$$

对于函数  $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$ ，其共轭函数记为  $f^* \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$ ，假设  $x \in \mathbb{R}^d$ ，则  $f^*(x) := \sup \{ \langle u, x \rangle - f(u) : u \in \mathbb{R}^d \}$ 。下面将介绍 Li<sup>[11]</sup>等人提出的迭代模型。

**定理 1:** 对于  $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ ， $r \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ ，以及一个可微函数  $h \in \Gamma_0(\mathbb{R}^m)$ ，考虑以下形式的最优化问题

$$\min_w \{h(w) + f(w) + r(Bw)\}, \quad (3.3.6)$$

上式中的  $B$  是一个  $n \times m$  的实矩阵。给定正数  $\alpha$ ， $\beta$  与参数  $\theta \geq 0$ ，假定初始迭代时有  $t^0 = 1$  与

$(v^0, w^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , 则根据下面的迭代模型逐步得到序列  $\{(v^k, w^k)\}$ :

$$\begin{cases} \tilde{v}^{k+1} = \text{prox}_{\beta r^*}(v^k + \beta B w^k), \\ \tilde{w}^{k+1} = \text{prox}_{\alpha f}(w^k - \alpha B^\top (2\tilde{v}^{k+1} - v^k) - \alpha \nabla h(w^k)), \\ t^k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(t^{k-1})^2}}{2} \\ \begin{bmatrix} v^{k+1} \\ w^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^k \\ w^k \end{bmatrix} + \left( \frac{t^{k-1} - 1}{t^k} + \theta \right) \begin{bmatrix} \tilde{v}^{k+1} - v^k \\ \tilde{w}^{k+1} - w^k \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.3.7)$$

假定模型(3.3.6)有解, 且  $h$  的梯度函数是利普希茨连续的 (记利普希茨常数为  $\mathcal{L}$ )。如果满足

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{\mathcal{L}}{2} > \beta \|B\|_2^2 \quad \text{与} \quad \theta < \frac{1 + \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L} + 2\rho}\right\}}{2 \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L} + 2\rho}\right\}} - 1$$

其中  $\rho = \min\left\{\frac{1}{\alpha} - \frac{\mathcal{L}}{2}, \frac{1}{\beta}\right\} \cdot \left(1 - \|B\|_2 \sqrt{\beta \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\mathcal{L}}{2}\right)^{-1}}\right)$ , 则序列  $\{w^k\}$  收敛于模型(3.3.6)的解。将  $\frac{1}{2} \|PW^\top \cdot -z\|_2^2, \|\cdot\|_1 \circ \Gamma, \iota_{\{0\}}$  以及  $I - WW^\top$  分别替换模型(3.3.6)中的  $h, f, r, B$  时, 定理 1 将可以用于求解模型(3.3.5)。

原论文中有三个引理及各自的证明, 这里不重复证明, 只重复叙述三个引理, 在这三个引理引出前需要定义一个与灵敏度矩阵  $\mathcal{S}_i$  相关的常数  $\kappa$ , 其表达式如下。

$$\kappa := \max_k \sum_{i=1}^p \left| s_k^{(i)} \right|^2 \quad (3.3.8)$$

上式中的  $|s_k^{(i)}|$  表示灵敏度矩阵  $\mathcal{S}_i$  中第  $k$  个对角线元素, 即第  $i$  个线圈中的第  $k$  个像素。此外为了简洁性, 将公式(3.1.4)中的  $W$  称为  $DHF$  矩阵。接下来叙述引理 1 与引理 2。

**引理 1:** 令  $W$  是一个  $DHF$  矩阵, 则有  $\|W\|_2 = 1$  与  $\|I - WW^\top\|_2 = 1$ 。

**引理 2:** 取公式(3.3.1)中的  $P$  和  $z$ , 令  $W$  是  $DHF$  矩阵, 定义  $h(w) = \frac{1}{2} \|PW^\top w - z\|_2^2$ , 其中  $w \in \mathbb{R}^m$ , 则  $h$  的梯度函数是  $\kappa$ -利普希茨连续, 这里的  $\kappa$  在公式(3.3.8)已定义。

接下来回顾软收缩 (soft shrinkage, 又称软阈值) 算子。对于一个给定的  $p \times p$  且对角元素非负的对角矩阵  $D$ , 与矩阵  $D$  对应的软阈值算子记为  $shrink_D$ , 该算子的定义域与值域都是  $\mathbb{R}^p$ 。对于一个向量  $x \in \mathbb{R}^p$ , 向量  $y = shrink_D(x)$  的第  $i$  个值等于  $sign(x_i) \max\{|x_i| - d_{ii}, 0\}$ , 其中  $x_i$  是  $x$  的第  $i$  个值,  $d_{ii}$  是矩阵  $D$  的第  $i$  个对角元素。

**引理 3:** 令  $\Gamma$  是一个大小为  $m \times m$  且对角线元素非负的对角矩阵, 定义  $f(w) = \|\Gamma w\|_1$  和  $r(w) = \iota_{\{0\}}(w)$ , 其中  $w \in \mathbb{R}^m$ , 则对于任意的  $w \in \mathbb{R}^m$  以及正整数  $\alpha$  与  $\beta$ , 会有性质

$$\text{prox}_{\alpha f}(w) = \text{shrink}_{\alpha \Gamma}(w) \quad \text{与} \quad \text{prox}_{\beta r^*}(w) = w$$

根据上面的引理及定义可以将定理 1 的迭代模型应用到目标函数(3.3.5), 具体迭代模型在下面的定理 2 中。

**定理 2:** 给定正数  $\alpha, \beta$  与参数  $\theta \geq 0$ , 初始迭代  $t^0 = 1$  与  $(v^0, w^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , 则根据下面的迭

代模型逐步得到序列  $\{(v^k, w^k)\}$ :

$$\begin{cases} \tilde{w}^{k+1} = \text{shrink}_{\alpha\Gamma}(w^k - \alpha(I - WW^\top)(v^k + 2\beta w^k) - \alpha WP^\top(PW^\top w^k - z)), \\ t^k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(t^{k-1})^2}}{2}, \\ \begin{bmatrix} v^{k+1} \\ w^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^k \\ w^k \end{bmatrix} + \left(\frac{t^{k-1} - 1}{t^k} + \theta\right) \begin{bmatrix} \beta(I - WW^\top)w^k \\ \tilde{w}^{k+1} - w^k \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (3.3.10)$$

如果参数  $\alpha$ ,  $\beta$ , 和  $\theta$  满足条件

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{\kappa}{2} > \beta \quad \text{与} \quad \theta < \frac{1 + \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\kappa}{\kappa + 2\rho}\right\}}{2 \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\kappa}{\kappa + 2\rho}\right\}} - 1, \quad (3.3.11)$$

上式中  $\kappa$  在公式(3.3.8)中给出,  $\rho = \min\left\{\frac{1}{\alpha} - \frac{\kappa}{2}, \frac{1}{\beta}\right\} \cdot \left(1 - \sqrt{\beta\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\kappa}{2}\right)^{-1}}\right)$ , 则序列  $\{w^k\}$  收敛于模型(3.3.5)的解。

**证明:** 将模型(3.3.5)中的  $\frac{1}{2}\|PW^\top \cdot - z\|_2^2, \|\cdot\|_1 \circ \Gamma, \iota_{\{0\}}$  以及  $I - WW^\top$  分别替换模型(3.3.6)中的  $h, f, r, B$ , 通过引理 3, 迭代模型(3.3.7)中的第一个公式将会变成  $\tilde{v}^{k+1} = v^k + \beta(I - WW^\top)w^k$ 。将(3.3.7)的第二个公式和第四个公式中的  $\tilde{v}^{k+1}$  替换成  $v^k + \beta(I - WW^\top)w^k$ , 则迭代模型(3.3.7)将会变成(3.3.10)。根据引理 1、引理 2 以及定理 1, 如果条件(3.3.11)满足, 则序列  $\{w^k\}$  收敛于模型(3.3.5)的解。

### 3.4 正则化参数 $\Gamma$ 估计

由(3.3.10)中的第一个公式可以得知,  $\tilde{w}$  由  $\Gamma$  中对应的阈值以及  $\omega$  中对应的值所决定。直观来说,  $\omega$  中较大的值对应于图像中的边缘信息, 则此时应该保留或较小地改变这个数值, 即取一个较小的阈值; 相反,  $\omega$  中较小的值应该被一个较大的阈值所抹除。简而言之,  $\Gamma$  中的正则化参数取决于图像的信息以及紧框架系数的统计模型。接下来介绍如何找出  $\Gamma$  的数值。假设  $W \in \mathbb{R}^{m \times q}$  是一个  $J$  层紧框架分解所采用的一个矩阵,  $w \in \mathbb{R}^m$  是一张图片经过矩阵  $W$  运算后得到的向量(里面记录了图像分解后的紧框架系数), 对于  $\omega$  中的第  $i$  数值记为  $\mathcal{L}(i)$ 。定义一个有序对  $(\ell, j, \mathbf{k})$ , 其中  $1 \leq \ell \leq J$  (一次紧框架分解会  $J$  个特征, 每个特征成为一个子带(subband)),  $0 \leq j \leq 6$ , 以及  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$ , 若  $\mathcal{L}(i) = (\ell, j, \mathbf{k})$ , 则表示  $\omega_i$  是在第  $\ell$  层分解的第  $j$  个子带中, 某个矩阵第  $\mathbf{k}$  个位置上提取出来的系数。 $\Gamma$  中的第  $i$  个对角元素可以通过以下公式估计。

$$\gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{若 } (\ell, j) = (J, 0), \\ \frac{\sqrt{2}\sigma_{\ell, i}^2}{\sigma_{\mathcal{L}(i)}} & \text{其他} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

其中  $\mathcal{I}(i) = (\ell, j, \mathbf{k})$ ,  $\sigma_{\ell, j}^2$  代表第  $\ell$  层分解的第  $j$  个子带中系数的噪声方差。假设  $\omega_i$  服从拉普拉斯分布, 则  $\sigma_{\mathcal{L}(i)}$  代表  $\omega_i$  的方差。 $\sigma_{\ell, j}^2$  可以用 [12] 中提出的方法求解, 同时  $\sigma_{\mathcal{L}(i)}^2$  可以近似估计为 ([13] 中提及):

$$\sigma_{\mathcal{L}(i)}^2 = \max \left\{ \left[ \frac{1.25\sqrt{2}}{|\mathfrak{W}(\mathcal{L}(i))|} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}(i))} |w_{\mathbf{k}}| \right]^2 - \sigma_{\ell, j}^2, 10^{-9} \right\},$$



在第  $l$  层分解的第  $j$  个子带中，上式的  $\mathfrak{W}(\mathcal{L}(i))$  包含了系数  $\omega_i$  其临近系数的所有索引， $|\mathfrak{W}(\mathcal{L}(i))|$  表示  $\mathfrak{W}(\mathcal{L}(i))$  的基数。 $10^{-9}$  只是方便进行数值实验。在本文中， $\mathfrak{W}(\mathcal{L}(i))$  包含了一个  $3 \times 3$  大小的临近系数。

### 3.5 算法介绍

对于问题(3.3.4)，一个基于迭代模型(3.3.10)的快速自适应算法将会在接下来展示。本文紧框架分解层数为两层，参数  $\kappa$  通过公式(3.3.8)计算得来，对于一个固定的  $\alpha > 0$ ，选定  $\beta = \frac{1}{\alpha} - \frac{\kappa}{2} - 0.001$  依次满足条件(3.3.11)，初始  $\omega^0$  是根据 sum-of-squares(SoS) 图像 ( $u_{SoS}^g$ ，可以参考图 1(d)) 得到，SoS 图像第  $\mathbf{k}$  位置的值定义为

$$u_{SoS}^g[\mathbf{k}] := \sqrt{\sum_{\ell=1}^p |g_{\ell}[\mathbf{k}]|^2}, \quad (3.5.1)$$

上式中  $g_{\ell}$  是第  $\ell$  个线圈图像，[14] 中提出当线圈灵敏度已知时，利用 SoS 图像作为初始值是最好的无偏重建方法，换言之， $u_{SoS}^g$  与目标图像最近似，因此，本文选择  $v^0 = w^0 = W u_{SoS}^g$ 。算法 1 的伪代码如下。

---

**Procedure 1** MRI 的快速自适应导向性 Haar 紧框架算法（FADHF 算法）

---

**Input:** 线圈数据  $g$ , 参数  $\alpha < 2/\kappa$ , 参数  $\beta < \frac{1}{\alpha} - \frac{\kappa}{2} - 0.001$ , 参数  $\theta$  满足(3.3.11)

**Output:** 重建目标图像  $u$

初始化:  $v^0 = w^0 = W u_{SoS}^g$  ( $u_{SoS}^g$  在(3.5.1)中给出)

**for**  $k = 1, 2, \dots$  **do**

当  $k = 1, 6, 11, 16, 21, 26$  时，才通过(3.4.1)估计  $\Gamma$   
通过迭代模型(3.3.10)求出  $(v^{k+1}, w^{k+1})$

**end**

计算图像  $u^{k+1} = W^{\top} v^{k+1}$ ，当终止条件满足时，结束算法

---

当  $k = 1, 6, 11, 16, 21, 26$  时才更新  $\Gamma$  矩阵这是由原论文通过实验分析所得的。

### 3.6 指标介绍

本文采用的一个指标是归一化均方误差 (normalized mean-squared error, 简称 NMSE)，这是一个全局度量指标，且在真实图像存在情况下才使用该指标，其度量的是重建图像  $\hat{u}$  与真实图像  $u$  之间的差异，计算公式为：

$$\text{NMSE} = \frac{\|u - \hat{u}\|_2^2}{\|u\|_2^2}$$

本文将用该指标验证算法的可行性。当证明出算法确实可以较好地重建出原图像时，接下来当不存在真实图像时只观察重建结果的细节部分是否保留边缘细节与图像是否清除了噪声，不再用指标衡量。

## 4 复现细节

### 4.1 与已有开源代码对比

本文的代码只引用了两个原作者编写的函数，一个是对图像进行紧框架分解及重建的函数，另一个是矩阵  $\Gamma$  更新的函数，整个实验的其余代码都独自编写，本文除了复现原作者的实验外，还额外利用 Yan<sup>[15]</sup>等人提出的一个基于线性算子实现最小化三个函数之和的原始-对偶算法（PD3O）去缩短重建时间。

## 4.2 实验环境搭建

本实验在 Matlab R2022b 上编写完成, 只需要下载 Matlab 提供的 Image Processing Toolbox、Wavelet Toolbox 即可运行代码, 无其他额外环境搭配。

## 4.3 界面分析与使用说明

本文只需要在 Matlab 上运行代码跑出结果即可, 无可视化界面操作。

## 4.4 创新点

PD3O 算法用于求解三个下半连续凸函数之和的最小化问题, 适用于不可导的优化模型的求解, 与现有优化算法对比, PD3O 具有较低的时间复杂度和较大的参数选取范围, 同时保证了算法的收敛性。PD3O 求解问题的一般形式如下:

$$u^* = \arg \min_u \{f(u) + g(u) + h(Au)\} \quad (4.4.1)$$

PD3O 求解模型(4.4.1)有如下的迭代形式:

$$\begin{cases} u^k = \text{prox}_{rg}(v^k) \\ s^{k+1} = \text{prox}_{\delta h^*}((I - \gamma \delta AA^T)s^k + \delta A(2u^k - v^k - \gamma \nabla f(u^k))) \\ v^{k+1} = u^k - \gamma \nabla f(u^k) - \gamma A^T s^{k+1} \end{cases} \quad (4.4.2)$$

在算法迭代(4.4.2)中,  $r$ 、 $\delta$ 、 $\gamma$  为算法参数, 设函数  $f$  的梯度函数为利普希茨连续函数, 利普希茨常数为  $L$ , 当  $\gamma < 2/L$ ,  $\delta \gamma \|AA^T\|_2 < 1$  时, 算法可以收敛到最优解。根据函数  $h$  以及共轭函数  $h^*$  的邻近算子的特性, 则有:

$$\text{prox}_{\delta h}(y) + \delta \text{prox}_{\delta^{-1}h^*}(\frac{y}{\delta}) = y \quad (4.4.3)$$

因此, (4.4.2)中  $s^{k+1}$  的迭代步骤可以修改成:

$$s^{k+1} = x^k - \delta \text{prox}_{\delta^{-1}h}(\delta^{-1}x^k) \quad (4.4.4)$$

其中  $x^k$  是求解  $s^{k+1}$  的辅助变量, 它具体定义为:

$$x^k = (I - \gamma \delta AA^T)s^k + \delta A(2u^k - v^k - \gamma \nabla f(u^k)) \quad (4.4.5)$$

因此, 结合(4.4.3)、(4.4.4)、(4.4.5), PD3O 算法的迭代模型(4.4.2)可以重新写为:

$$\begin{cases} u^k = \text{prox}_{rg}(v^k) \\ x^k = (I - \gamma \delta AA^T)s^k + \delta A(2u^k - v^k - \gamma \nabla f(u^k)) \\ s^{k+1} = x^k - \delta \text{prox}_{\delta^{-1}h}(\delta^{-1}x^k) \\ v^{k+1} = u^k - \gamma \nabla f(u^k) - \gamma A^T s^{k+1} \end{cases} \quad (4.4.6)$$

当函数  $g = 0$  时, (4.4.6)可以写为:

$$\begin{cases} x^k = (I - \gamma \delta AA^T)s^k + \delta A(u^k - \gamma \nabla f(u^k)) \\ s^{k+1} = x^k - \delta \text{prox}_{\delta^{-1}h}(\delta^{-1}x^k) \\ u^{k+1} = u^k - \gamma \nabla f(u^k) - \gamma A^T s^{k+1} \end{cases} \quad (4.4.7)$$

令  $P$ 、 $u$ 、 $z$ 、 $\Gamma$ 、 $W$  与模型(3.3.3)中的定义一致, 定义函数

$$f(u) = \frac{1}{2} \|Pu - z\|_2^2 \quad h(v) = \|\Gamma v\|_1 \quad g = 0$$

令  $v = Wu$ , 将  $f(u)$  与  $h(v)$  代入(4.4.1)中, 则有:

$$\arg \min_u f(u) + h(Wu) \quad (4.4.8)$$

分析可知, 目标模型(4.4.8)与目标模型(3.3.3)完全一致, 所以当选取合适的  $\gamma$  与  $\delta$  时, 迭代模型(4.4.7)可以求解目标模型(3.3.3)。

由引理 2 可知, 模型(3.3.3)满足  $\kappa$ -利普希茨连续 ( $\kappa$  定义于(3.3.8)), 此外, 由于  $WW^\top$  是个对称矩阵, 所以  $\|WW^\top\|_2 = 1$ , 因此当  $\gamma < 2/\kappa$ ,  $\delta < \frac{1}{\gamma}$  时, 将模型(4.4.7)应用于目标函数(3.3.3)时会达到收敛状态。因此可以得出下面的算法 2。

---

**Procedure 2** 基于 PD3O 的 MRI 重建算法

---

**Input:** 线圈数据  $g$ , 参数  $\gamma < 2/\kappa$ , 参数  $\delta = \frac{1}{\gamma} - 0.0001$

**Output:** 重建目标图像  $u$

初始化:  $u^0 = u_{SoS}^g$  ( $u_{SoS}^g$  在(3.5.1)中给出),  $s^0 = Wu$

**for**  $k = 1, 2, \dots$  **do**

当  $k = 1, 6, 11, 16, 21, 26$  时, 才通过(3.4.1)估计  $\Gamma$   
 计算  $x^k = (I - \gamma\delta WW^\top) s^k + \delta W (u^k - \gamma \nabla f(u^k))$   
 计算  $s^{k+1} = x^k - \delta \text{prox}_{\delta^{-1}h}(\delta^{-1}x^k)$   
 计算  $u^{k+1} = u^k - \gamma \nabla f(u^k) - \gamma W^\top s^{k+1}$

**end**

---

## 5 实验结果分析

本文复现 FADHF 算法时, 采用了原作者提供的真实图 1(a), 该实验模拟时有四个线圈通道, 按照原论文中给出的公式构造出四个灵敏度矩阵  $\mathcal{S}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1[i, j] &= \zeta / (25000 + (i + 40)^2 + (j + 20)^2), \\ \mathcal{S}_2[i, j] &= \zeta / (25000 + (i + 50)^2 + (j - 290)^2), \\ \mathcal{S}_3[i, j] &= \zeta / (25000 + (i - 290)^2 + (j + 10)^2), \\ \mathcal{S}_4[i, j] &= \zeta / (25000 + (i - 280)^2 + (j - 310)^2), \end{aligned}$$

然后给图像加上方差为 0.01 的高斯噪声后, 经过傅里叶变换、采样与傅里叶逆变换便可得到四个线圈图像, 再将四个线圈图像经过公式(3.5.1)求得 SoS 图像, 如图 4 所示。通过对比图 4 与图 1(d)可以发现, SoS 图的构造与原论文几乎没有偏差。

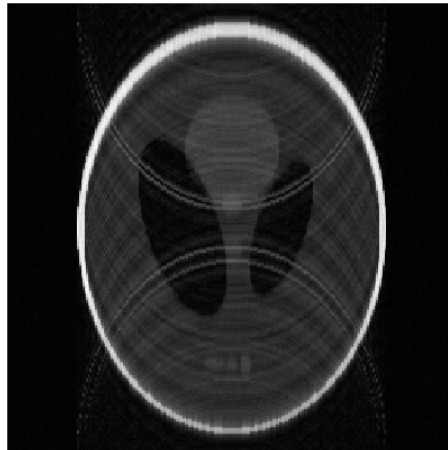


图 4: 复现 SoS 图

本文接下来实现目标模型(3.3.10)的相关代码, 其中迭代求解次数设定为 100 次, 或者当邻近两次

的图像达到所有像素差值的平方和小于  $10^{-9}$  时提前停止迭代。最终复现的结果图如图 5 所示。通过对比图 1(a)与图 5 可以发现两者几乎一致，此外计算得出图 5 的 NMSE 值为  $2.15 \times 10^{-4}$ ，而原作者实验所计算出来的 NMSE 值为  $2.19 \times 10^{-4}$ ，本文与原作者计算出的 NMSE 存在差异是由于迭代次数的不同以及随机误差所造成的，因此可以认为复现过程没有错误之处。



图 5: 复现 FADHF 算法得到的结果图

利用代码实现 PD3O 算法时，其使用的 SoS 图像也是图 4，设置迭代次数为 50 次，修复的结果如图 6 所示。由于 PD3O 算法与 FADHF 算法的计算方式不同，导致图像最终在计算机上的数值大小不同，因此计算 PD3O 算法重建图的 NMSE 值不具有对比性，故本文只是直观对比图 1(a)与图 6 来验证 PD3O 算法的合理性，从结果图来看可以发现两者几乎一致，所以也可以验证 PD3O 迭代模型(4.4.7)同样可以求解目标函数(3.3.3)。



图 6: PD3O 算法得到的结果图

接下来按照图 1(a)中指定的白色框区域放大将图 5 与图 6，三个结果图的放大区域展示在下图中。通过对比图 7(a)、7(b)与 7(c)的细节部分可以发现，无论是复现的 FADFA 算法还是额外实现的 PD3O 算法均已经较为接近原作者的修复结果图，所以通过这些细节部位可以进一步证明复现效果已经没有太大缺陷。值得注意的是由于 PD3O 的特性，其只需要进行较少的迭代次数就可以找到模型的解。在做 FADHF 算法与 PD3O 算法的对比实验时，分别统计五十轮重建过程，计算每轮平均迭代次数与平均运行时间，结果如表 1 所示。通过表 1 可以发现因为 PD3O 需要较少的迭代次数所以其花销时间更短，可以更快速地得出模型的解。

表 1: FADHF 算法与 PD3O 算法对比 (原论文的实验图)

	FADHF 算法	PD3O 算法
平均迭代次数 (次)	83	50
平均运行时间 (秒)	7.586	3.099

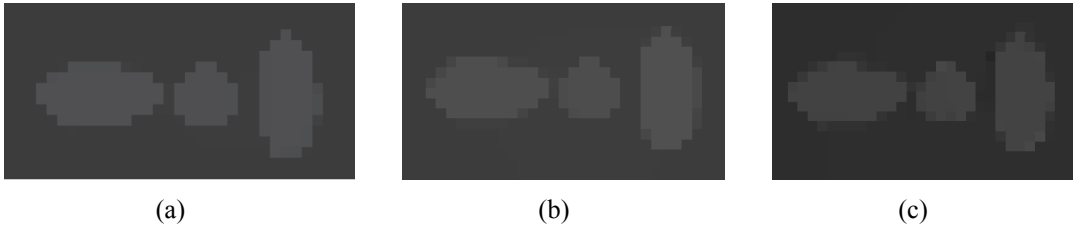


图 7: (a) 作者重建结果放大图 (b) 复现 FADFA 算法结果放大图 (c)PD3O 算法重建结果放大图

由上面的实验可以验证出 FADHF 与 PD3O 基本上可以较好地重建出图像，接下来测试其他案例，这些案例是现实情况中全采样得到的数据，由于采集数据时存在噪声且噪声是无法估计得，因此在实验时不存在完全无噪声的真实图像作为对比图。接下来进行两个实验，实验结果如图 8与图 9所示。通过观察这两个实验可以发现 FADHF 算法与 PD3O 算法的重建图从视觉上与全采样的 SoS 图几乎一致，且从局部放大图可以发现两个算法消除了 SoS 图中存在的噪声，因此再一次证明了两个算法的可行性。

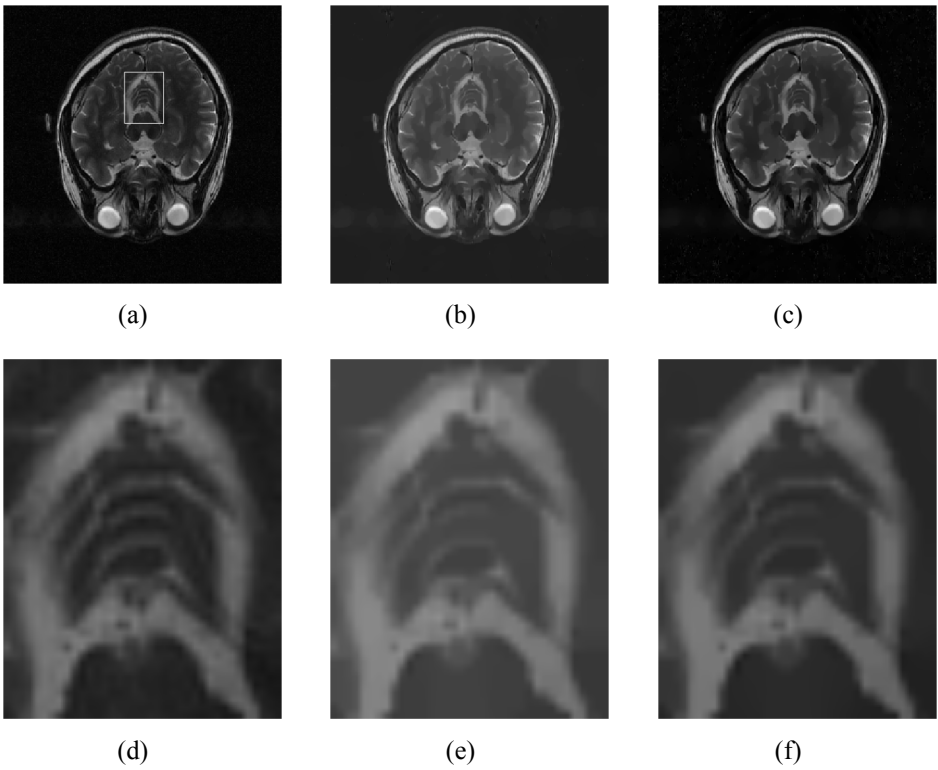


图 8: 第一个脑部切片实验，采样率为 33%，(a) 全采样时的 SoS 图，(b)FADFA 算法重建结果图，(c)PD3O 算法重建结果图，第二行图片分别是第一行图片对应的局部放大图

表 2: FADHF 算法与 PD3O 算法的脑部切片实验数据, 括号中第一个数据为算法迭代次数, 第二个数字为运行时间 (单位: 秒)

	FADHF 算法	PD3O 算法
第一个脑部切片	(117, 29.88)	(50, 14.39)
第二个脑部切片	(110, 31.16)	(50, 14.24)

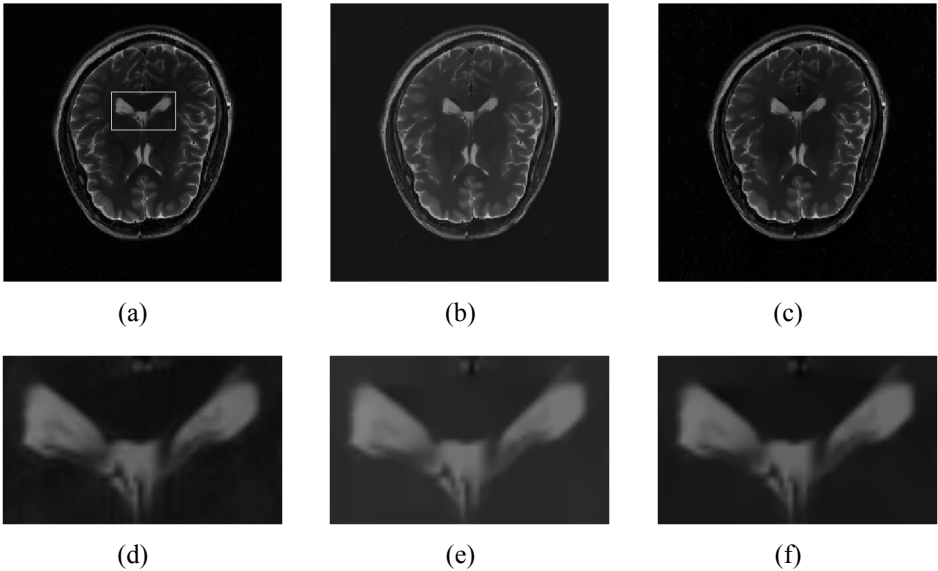


图 9: 第二个脑部切片实验, 采样率为 33%, (a) 全采样时的 SoS 图, (b)FADFA 算法重建结果图, (c)PD3O 算法重建结果图, 第二行图片分别是第一行图片对应的局部放大图

统计 FADHF 算法与 PD3O 算法在上面两个脑部切片的重建时的迭代次数与运行时间, 如表 2 所示。可以发现, PD3O 算法所花费的时间几乎都是 FADHF 算法的一半左右, 因此再一次验证了该算法的优越性。

6 总结与展望

本文首先介绍了磁共振成像（MRI）的研究意义以及研究现状, 然后详细地叙述了原作者所提出的目标函数以及其所使用的迭代模型, 紧接着引入 PD3O 模型求解同一个目标函数。从结果上分析得出, 本次复现的 FADHF 算法比较成功, 相比原作者所使用的迭代模型, PD3O 模型的引入实现了更快速地完成重建磁共振图像, 且 PD3O 模型的重建结果也较为不错。

本文不足之处在于复现实验不够充足。希望接下来能够进一步研究 MRI 方向的论文, 实现基于 k 空间的重建技术, 试着将 k 空间的成像技术与图像域的成像技术相融合, 探究是否会得到更高质量的修复结果。

参考文献

[1] LAUTERBUR P C. Image formation by induced local interactions: examples employing nuclear magnetic resonance[J]. nature, 1973, 242(5394): 190-191.

[2] MURPHY K J, BRUNBERG J A. Adult claustrophobia, anxiety and sedation in MRI[J]. Magnetic resonance imaging, 1997, 15(1): 51-54.

[3] PRUESSMANN K P, WEIGER M, SCHEIDEGGER M B, et al. SENSE: sensitivity encoding for fast MRI[J]. Magnetic Resonance in Medicine: An Official Journal of the International Society for Magnetic

Resonance in Medicine, 1999, 42(5): 952-962.

- [4] GRISWOLD M A, JAKOB P M, HEIDEMANN R M, et al. Generalized autocalibrating partially parallel acquisitions (GRAPPA)[J]. Magnetic Resonance in Medicine: An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine, 2002, 47(6): 1202-1210.
- [5] KELLMAN P, EPSTEIN F H, MCVEIGH E R. Adaptive sensitivity encoding incorporating temporal filtering (TSENSE)[J]. Magnetic Resonance in Medicine: An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine, 2001, 45(5): 846-852.
- [6] MORRISON R L, JACOB M, DO M N. Multichannel estimation of coil sensitivities in parallel MRI [C]//2007 4th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro. 2007: 117-120.
- [7] MORRISON R L, JACOB M, DO M N. Multichannel estimation of coil sensitivities in parallel MRI [C]//2007 4th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro. 2007: 117-120.
- [8] LIANG D, LIU B, WANG J, et al. Accelerating SENSE using compressed sensing[J]. Magnetic Resonance in Medicine: An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine, 2009, 62(6): 1574-1584.
- [9] LUSTIG M, PAULY J M. SPIRiT: iterative self-consistent parallel imaging reconstruction from arbitrary k-space[J]. Magnetic resonance in medicine, 2010, 64(2): 457-471.
- [10] LI Q, ZHANG N. Fast proximity-gradient algorithms for structured convex optimization problems[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2016, 41(2): 491-517.
- [11] LI Q, ZHANG N. Fast proximity-gradient algorithms for structured convex optimization problems[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2016, 41(2): 491-517.
- [12] LI Y R, DAI D Q, SHEN L. Multiframe super-resolution reconstruction using sparse directional regularization[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2010, 20(7): 945-956.
- [13] HYVÄRINEN A, HOYER P, OJA E. Sparse code shrinkage: Denoising by nonlinear maximum likelihood estimation[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 1998, 11.
- [14] LARSSON E G, ERDOGMUS D, YAN R, et al. SNR-optimality of sum-of-squares reconstruction for phased-array magnetic resonance imaging[J]. Journal of Magnetic Resonance, 2003, 163(1): 121-123.
- [15] YAN M. A new primal–dual algorithm for minimizing the sum of three functions with a linear operator [J]. Journal of Scientific Computing, 2018, 76(3): 1698-1717.