课程论文题目

A Novel Neural Network for Solving Nonsmooth Nonconvex Optimization Problems

摘要

随着自然科学工程中不断涌现的非凸优化问题，用递归神经网络求解这类约束优化问题成为研究热门。人工神经网络具备大规模并行处理的能力，可以求解实时问题，弥补了传统方式解决优化问题的不足。近几十年来，研究学者致力于凸、非凸优化问题的研究依旧存在一定的局限性，为丰富解决非凸优化问题的神经网络模型，论文基于微分包含思想，构造了一种新型的递归神经网络用以解决非光滑非凸优化问题。

关键词： 递归神经网络；非凸优化；实时问题

1 引言

优化问题在科学与工程应用中随处可见，神经网络在解决实时性、大规模问题时，具有无与伦比的优越性，神经网络主要特征之一就是可以获得实时解，这个特征使其在人工智能、模式识别、工程控制等领域得到广泛应用。最开始，神经网络在光滑凸优化问题中兴盛，用来解决线性规划问题、非线性规划问题，研究学者基于梯度法、罚函数法，投影法等提出了许多神经网络模型。随着研究的深入，神经网络延伸到了非光滑凸优化问题中，再次激发了研究学者的研究热情，继而出现了更多的神经网络模型，引入了更多的方法。而伴随着实际生活应用中普遍出现的非凸优化问题，利用神经网络来解决这类问题也越来越受到重视。研究非凸优化问题，是对凸优化问题的延伸与扩展，目前求解非凸优化问题存在一些局限性。由此可见，基于神经网络来解决非凸优化问题的研究是一件十分有价值的工作。

论文研究的出发点基于以下：

首先，现有的绝大多数神经网络都是研究非光滑凸优化问题，仅有少数提出解决非光滑非凸优化问题的神经网络。因为凸函数具有良好的性质——凸性，学者可以利用凸性更好的求证定理，但是凸性也是一个很强的性质，使得原始优化问题的适用范围受限。而现实生活以及工程应用中，非凸优化问题随处可见，处理这类问题的理论不是那么成熟，处理起来较为棘手，构造神经网络求解非光滑非凸优化问题是一种科研挑战。

其次，现有的解决非光滑非凸优化问题的神经网络，很多都是基于精确罚因子构建的。在利用神经网络求解最优化问题时，精确罚因子通常很难计算，这限制了神经网络的应用。除此之外，有的神经网络需要在给定范围内选取初始点，才能保证神经网络的准确性。构造新型神经网络，既不依赖于精确罚因子，也不限制初始点的选取，对现有非光滑非凸优化问题来说是研究的重点。

最后，研究发现目前对非光滑非凸优化问题的研究，都是在可行域有界的情况下。而实际工程中，会发现有很多约束优化问题可行域是无界的。如此一来，现有神经网络无法适用。

2 相关工作

随着科技的发展，尤其是人工智能的发展，神经网络受到了极大的关注。最优化问题是工程应用和生活中普遍的问题，以往的方式只能求解历史数据优化问题，而神经网络能求解实时优化问题，且求解速度快，具有巨大的优势。神经网络解决优化问题，通常将优化问题转换为抽象的数学概括式，然后构建相应的神经网络模型，从而利用计算机模拟电路求解最优值。

优化问题根据目标函数与限制条件又可以分为光滑优化与非光滑优化、凸优化与非凸优化。下面我们主要介绍神经网络在解决非光滑凸优化与非光滑非凸优化问题的研究现状。

2.1 神经网络解决非光滑凸优化问题

Tank 和 Hopfield[1]在 1986 年首次采用了 Hopfield 神经网络来求解线性规划问题，这启发了许多研究人员开发其他神经网络模型来进行优化。1988 年，Kennedy 和 Chua[2]引入了动态规范非线性规划电路 (NPC)，利用有限罚参数进行非线性规划，可以生成近似最优解。从那时起,NPC 的研究得到了很好的发展，并为优化问题设计了许多神经网络模型[3-6]。其中，拉格朗日网络（基于拉格朗日方

法）由 Zhang 和 Constantinides[7]提出，用于求解凸非线性规划问题。为解决线性凸规划问题，Wang[8]提出了确定性退火神经网络。

非光滑凸优化问题的主要数学模型如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & g(x) \ge 0 \\ & Ax = b \end{aligned}$$

其中，目标函数 $f(x)$ 是凸函数，等式约束函数与不等式约束函数都是定义在 $x \in \mathbb{R}^n$ 上的非光滑凸函数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为行满秩矩阵。2004 年，意大利著名学者 Forti 等人[9]构造了如下的神经网络模型：

$$\dot{x} \in -\partial E(x) - \sigma \partial B(x)$$

其中 $E(x)$，$B(x)$ 都是凸函数，σ 为惩罚因子，这是一种典型的基于微分包含思想来求解非光滑优化问题的模型。

近年来，基于惩罚方法的递归神经网络被广泛用于解决非光滑优化问题。在[10]中，Forti 等人提出的广义 NPC（G-NPC），可以被认为是 NPC 的自然扩展，用于求解具有不等式约束的非光滑优化问题。Xue 和 Bian[11]提出了一种基于次梯度和罚参数法的递归神经网络模型，用于解决非光滑凸优化

$$\dot{x}(t) \in -\partial f(x(t)) - \sigma \partial g(x(t)) - \mu \partial L(x(t))$$

其中，$\partial L(x(t))$ 是一个严格可微的凸函数，是等式约束函数的等价替换，该模型需要准确计算罚因子 σ 与 μ 的值，才能确保模型的正确性。但在大多数情况下，惩罚因子的计算是困难的甚至无法计算的。基于正则项方法，Bian 等人[12]提出了另一种神经网络模型来解决文献[11]中的问题，成功避免了计算罚因子这一过程且证明了该模型具有全局吸引性。Qin 等人在文献[13]中构建了一种基于 Tikhonov 正则化的神经网络模型，与文献[16]相比，该模型大大减弱了对可行域与目标函数的假设条件。随后，Qin 等人[14]构造了一种双层神经网络模型来求解此类问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -(I-P)[\partial f(x(t)) + \partial g(x(t))^T \bar{\mu}(t)] - A^T h(Ax(t)-b) \\ 2\dot{\mu}(t) = -\mu(t) + (\mu(t) + g(x(t)))^+ \end{cases}$$

其中，I 为单位矩阵，$P = A(AA^T)^{-1}A$，$\bar{\mu} = (\mu + g(x))^+$。Cheng 等人[15]还提出了一种三层神经网络模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2(x - \overline{x}) \\ \dot{\lambda}(t) = -(\lambda - \overline{\lambda}) \\ \dot{\mu}(t) = -(Ax - b) \end{cases}$$

其中，$\overline{x} = P_{\Omega}[x - \nabla f(x) + (g'(x))^T \overline{\lambda} + A^T(\mu - Ax + b)]$，$\overline{\lambda} = (\lambda - g(x))^+ = \max(0, \lambda - g(x))$，$g'(x) = [\nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \cdots, \nabla g_m(x)]^T$，$P_{\Omega}(u): \mathbb{R}^n \to \Omega$ 是投影算子。两种模型虽然都无需预先计算精确的罚因子，对假设条件的限制也相对较弱，但由于增加了模型的层数，结构变得复杂而导致难以硬件实现。

2.2 神经网络解决非光滑非凸优化问题

经过几十年的发展，研究者们对凸优化问题的研究已经愈发成熟，许多非光滑凸优化问题由于凸性的存在而得到很好地解决。随着研究深入，学者们发现工程应用与实际生活中的问题更多是非凸优化问题，而凸函数的很多良好的性质在此类问题上失效了。因此，研究者们便开始把目光聚焦在非凸优化问题上[16-22]。非凸优化问题中有着一位特殊的成员——伪凸优化问题，频繁出现在了模式识别、机器学习等科学与工程技术领域，也引起了学者们的广泛关注[23-32]。非光滑非凸优化问题的主要数学表达式如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & g(x) \geq 0 \\ & Ax = b \end{aligned}$$

其中，目标函数 $f(x)$ 是非光滑非凸函数，等式约束函数与不等式约束函数都是定义在 $x \in \mathbb{R}^n$ 上的非光滑凸函数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为行满秩矩阵。为了解决优化问题（1-6），Hosseini 等人[33]提出了一类基于微分包含思想的新型神经网络

$$\dot{x}(t) \in -\{\prod_{i=1}^{m}(1 - \theta[g_i(x(t))])\}\partial f(x(t)) - \sum_{i=1}^{m}\theta[g_i(x(t))]\partial g_i(x(t))$$

其中，$\theta[u] = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ [0,1] & u = 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$。该模型不需要提前计算准确的惩罚参数，但只能解决带有不等式约束的非光滑非凸优化问题，模型的应用范围受到了限制。Hu 等人[34]针对目标函数是光滑伪凸的优化问题，提出了一种基于投影法的神经网络模

型，然而该网络不能解决非光滑伪凸优化问题。在[35]和[36]中，Qin 等和 Gao 等分别提出了一种神经网络模型来处理一类约束条件仅含线性方程的非光滑伪凸优化问题。基于惩罚函数法，Liu 等在[37]中构造了一种神经网络模型

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} \in -\partial f(x) - \mu g_{[u,v]}(x) - \sigma A^T g_0(Ax-b)$$

其中，ε 是一个正缩放常数，μ 和 σ 为非负常数。该模型虽然能够求解限制条件包括等式与盒集的非光滑伪凸优化问题，然而这种网络的有效性依赖于精确的惩罚参数，而这些参数通常很难计算。Li 等在[38]中构造了一种基于投影法的神经网络模型

$$\dot{x}(t) \in -x(t) + P_\Omega[x(t) - \partial P(x(t)) - \varepsilon(t)\partial f(x(t))]$$

其中，$\Omega = \{x : Ax = b\}$，$P_\Omega(x) = x - A^T(AA^T)^{-1}(Ax-b)$，$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0}{t+1}$。该模型它不需要事先计算惩罚参数，可以处理一类更广泛的非光滑伪凸优化问题，其中的约束条件包括一些不等式和一个凸集。针对优化问题（1-6），Qin 等人[39]引入了强制函数 $D(x)$ 的方法，构造了一种求解同时带有不等式约束与等式约束的非光滑伪凸优化问题的神经网络模型

$$\dot{x}(t) \in -(I-P)[\partial f(x(t)) + \varepsilon(t)\partial D(x(t))] - A^T h(Ax(t)-b)$$

其中，$\varepsilon(t)$ 是一个满足一定条件的 Tikhonov 正则项。该模型可以在初始点任意选取的情况下收敛到最优解，但目标函数必须满足在等式可行域中存在下界这一条件。

3 本文方法

3.1 本文方法概述

本文提出的神经网络模型如下所示：

$$\dot{x}(t) \in -\mu(t)(I-P)\{\gamma + (\frac{\|\gamma\|\|x(t)-\hat{x}\|}{\hat{g}} + \alpha)\xi\}_{\gamma\in\partial V(x(t)),\xi\in\partial\beta(x(t))} - A^T h(Ax(t)-b) \qquad (1)$$

该模型的广义非线性规划架构图如图 1 所示：

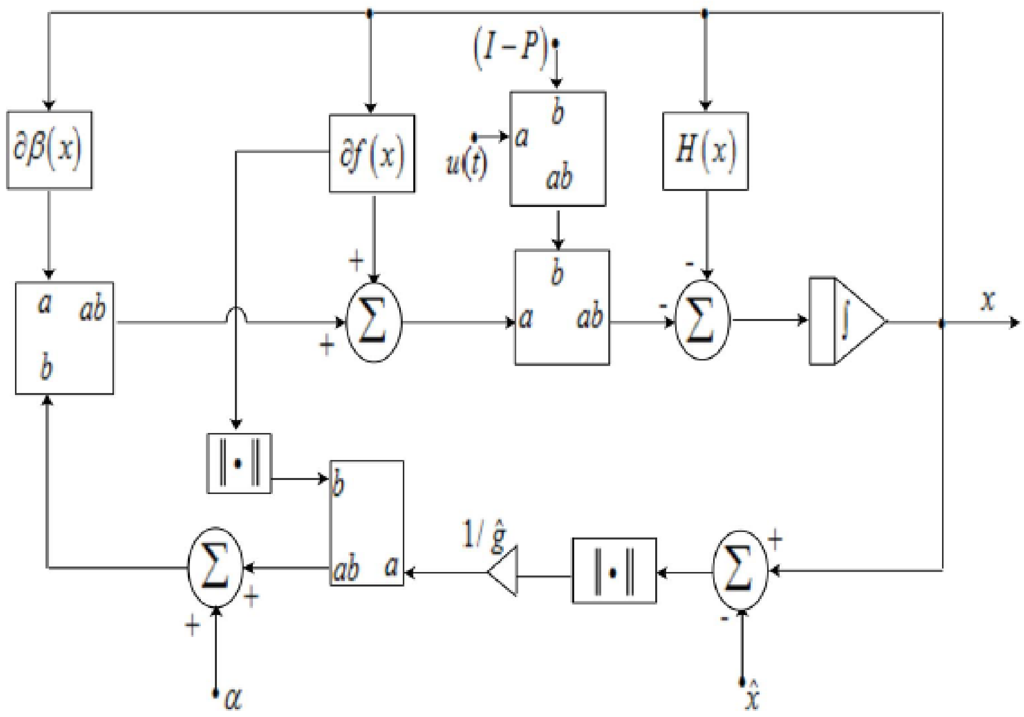

图 1：神经网络模型式(1)的架构图

3.2 证明方法

为了验证所提出的神经网络模型的有效性，论文使用了严谨的理论分析方法，证明了文中提出的神经网络模型（1）在初始点任意选取的前提下，都可以使状态解最终进入到可行域内，并收敛于原优化问题的关键点集。

证明步骤一共有如下五步：

（1）局部解的存在性

（2）有限时间收敛到等式可行域 S_2

（3）有限时间收敛到可行域 S

（4）全局解的存在性

（5）收敛到关键点集 C

4 复现细节

4.1 与已有开源代码对比

本论文复现没有参考任何的开源代码。

4.2 实验环境搭建

论文的数值仿真实验在 MATLAB 2012a 平台上进行。

5 实验结果分析

仿真实验 A：具有无界可行域的非光滑非凸优化问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & V(x)=|x_1|-x_2x_3+(x_2+x_4)^2 \\
\text{s.t.} \quad & G_1(x)=|2x_1-x_3|-6\le 0 \\
& G_2(x)=-3x_1+2x_2-5\le 0 \\
& G_3(x)=x_1+x_2+x_3+x_4-5\le 0 \\
& x_1+2x_2-x_3=3
\end{aligned}
$$

这里我们选择 $\hat{x}=(1,1,0,1)^T\in \mathrm{int}(S_1)\cap S_2$，则我们可以计算出 $\hat{g}=2$。

通过简单的分析，目标函数 $V(x)$ 是非光滑非凸的，不等式约束函数 $G_1(x)$，$G_2(x)$ 和 $G_3(x)$ 都是凸的，可行域 S 是无界的，$V(x)$ 在 S 中是强制的。因此，文中提出的 RNN 可以用来解决此类问题。

图 1 和图 2 分别展示了两个不同的初始点 $(0,3,8,-9)^T$ 和 $(-6,-2,-15,2)^T$ 的状态向量的轨迹方程。其中图 1 的初始点轨迹收敛到关键点 $(1.105,4.158,6.421,-6.684)^T$，图 2 的初始点轨迹收敛到关键点 $(-4,-3.5,-14,3.5)^T$。

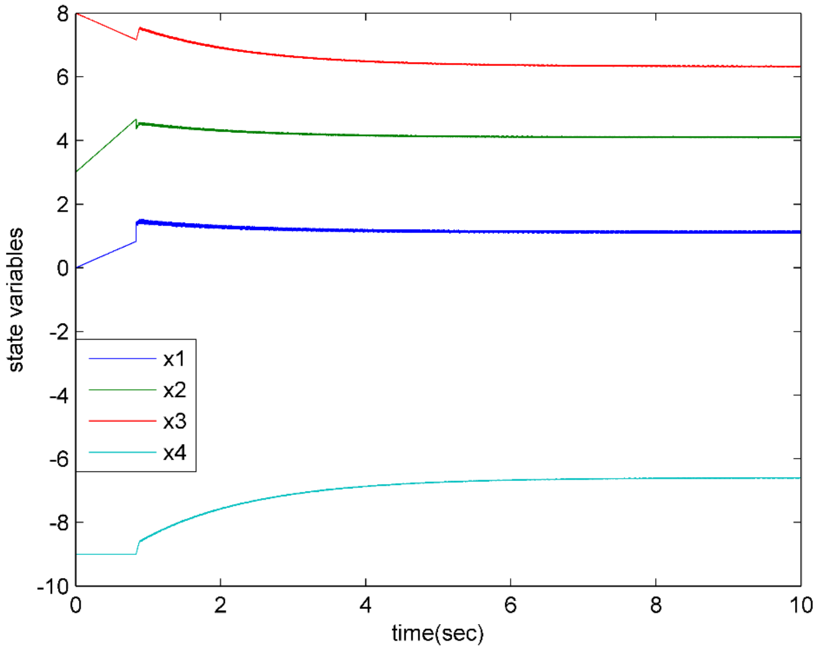

图 1 初始点为 $(0,3,8,-9)^T$ 时神经网络的状态轨迹图

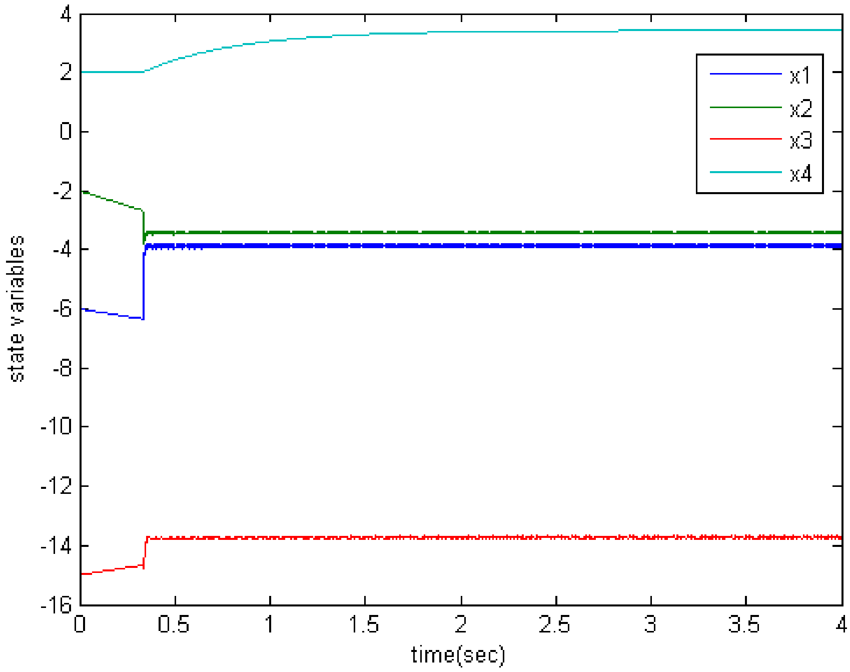

图 2 初始点为$(-6,-2,-15,2)^T$时神经网络的状态轨迹图

仿真实验 B：具有有界可行域的非光滑非凸优化问题

$$\min \quad V(x)=x_1^2+x_2-2x_7+(x_3+0.5)^2-\cos(x_4-x_2)$$
$$-x_5^5+|x_3-x_1|-x_6^2+0.5(x_4-0.2)^2-x_1x_3$$
$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1-x_2+x_3-x_7\le 1\\ & 0.5x_3-x_5+x_6\le 1\\ & -x_1+x_2\le 1\\ & x_4^2-x_5\le 1\\ & x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\\ & x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2\le 1\\ & x_7\le 1\\ & 0.2x_6+x_3\le 1\\ & \sum_{i=1}^{7}x_i=0\end{aligned}$$

目标函数$V(x)$是非凸非光滑的，而不等式约束函数是凸的。这里，我们选择$\hat{x}=0_7\in \mathrm{int}(S_1)\bigcap S_2$，因此我们可以计算出。通过简单的分析，不等式约束域S_1是有界的且满足$S_1\subset B(\hat{x},\sqrt{2.1})$。因此，我们可以计算出目标函数$V(x)$在$B(\hat{x},\sqrt{2.1})$中的 Lipschitz 上界为$l_V=24$。这里选取了任意一个初始点$(-4,3,1,-3,3,-1,-2)^T$

来说明提出的神经网络模型的收敛性。

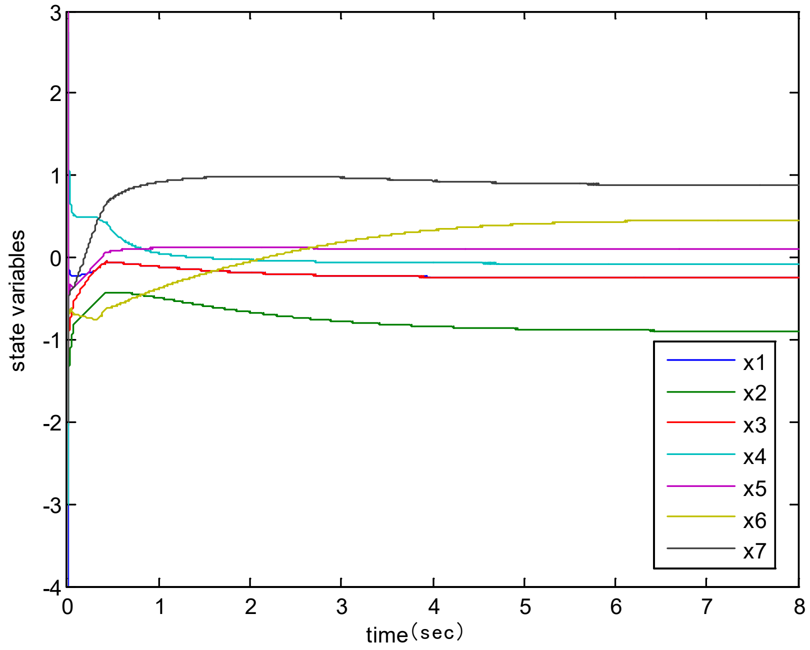

图 3 初始点为 $(-4,3,1,-3,3,-1,-2)^T$ 时神经网络的状态轨迹图

为了比较 RNN 在收敛方面的优劣，论文中分别与[16]、[19]和[39]中的模型进行了对比，这里我们选取了相同的初始点 $(-4,3,1,-3,3,-1,-2)^T$ 。

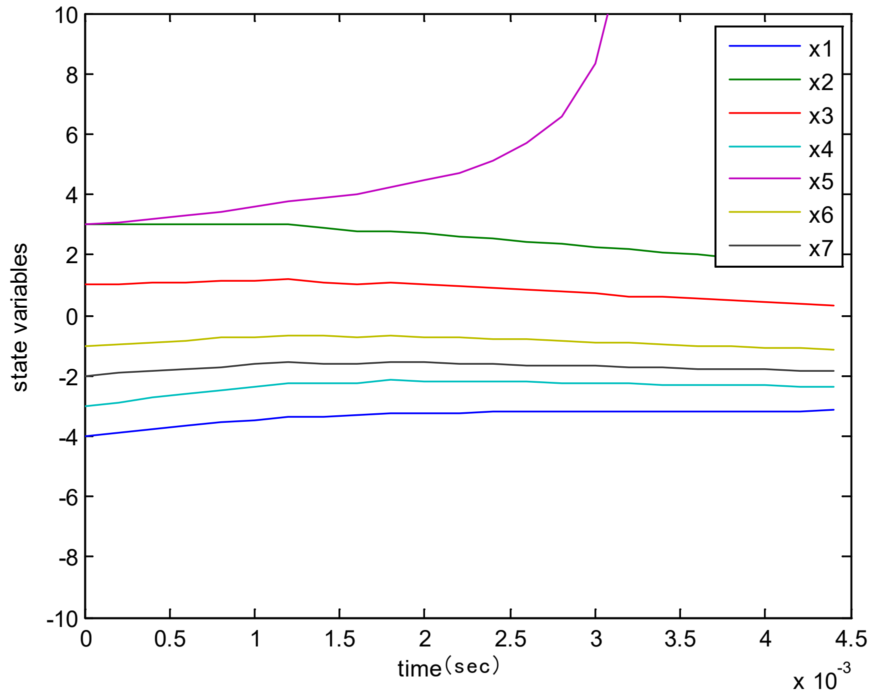

图 4 初始点为 $(-4,3,1,-3,3,-1,-2)^T$ 时文献[16]中神经网络的状态轨迹图

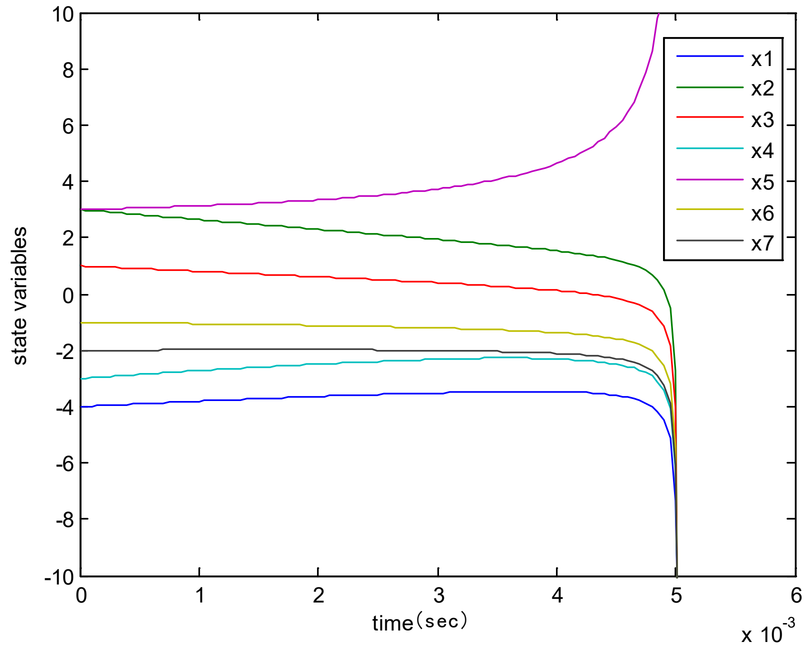

图 5 初始点为$(-4,3,1,-3,3,-1,-2)^T$时文献[19]中神经网络的状态轨迹图

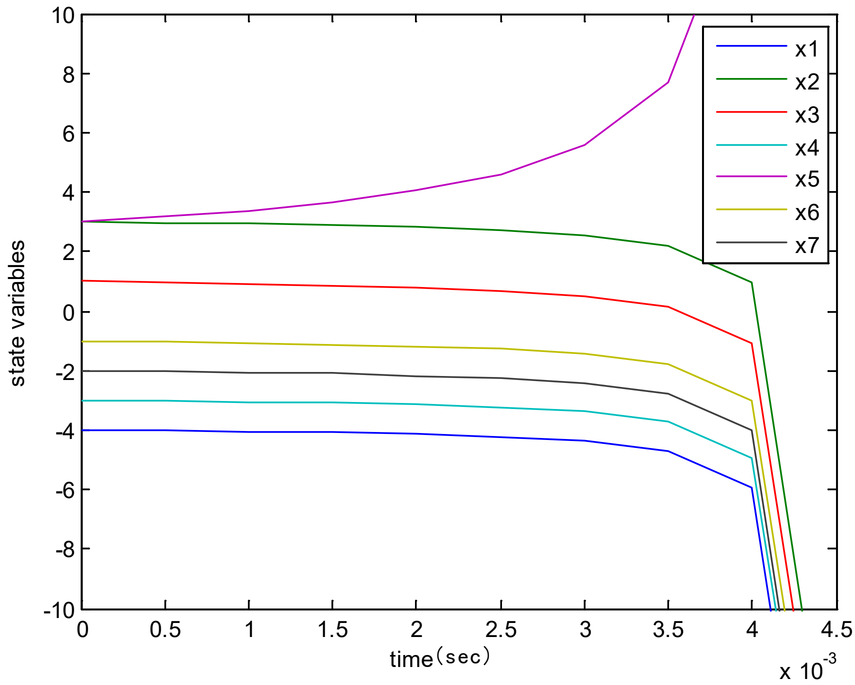

图 6 初始点为$(-4,3,1,-3,3,-1,-2)^T$时文献[39]中神经网络的状态轨迹图

6 总结与展望

到目前为止，人们已经提出了许多用于处理非光滑凸优化问题的 RNN。然而，能够处理非光滑非凸优化问题的 RNN 却很少。现有的用于非光滑非凸优化的 RNN 通常采用罚函数法，因此需要预先估计精确的罚参数。然而，参数的估计是困难和昂贵的。此外，这些 RNN 往往要求可行域的有界性，甚至从给定的有界集合中选择初始状态，这极大地减少了这些 RNN 的应用。因此，为了克服上述不足，论文提出了一种新的 RNN 来处理非光滑非凸优化问题。文中提出的 RNN 不要求可行域的有界性。此外，如果某些适当的假设成立，则在任意初始状态下，其解仍然可以收敛到原优化问题的关键点集。

更重要的是，与基于惩罚方法、拉格朗日方法等经典方法的神经网络不同，所提出的神经网络从可行域外任意初始状态出发，使用一种独特的机制来迫使神经网络的轨迹进入可行域。因此，该论文为处理非凸非光滑优化问题提供了一种新的方法。

众所周知，关键点可能不是局部极小点，有时，关键点可能是局部最大值点。因此，在未来工作中，可以开发一种只能收敛于局部极小点的 RNN。

参考文献

[1] Tank D W, Hopfield J J. Simple ‘neural’ optimization networks: An A/D convertersignal decision circuit, and a linear programming circuit[J]. IEEE Transaction on CircuitsSystem, 1986, 33(5):533-541.

[2] Kennedy M P, Chua L O. Neural networks for nonlinear programming[J]. IEEE Transactions on Circuits System, 1988, 35(5): 554-562.

[3] Bouzerdoum A, Pattison T R. Neural network for quadratic optimization with bound constraints[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1993, 4(2): 93-304.

[4] Chong E, Hui S, Zak S H. An analysis of a class of neural networks for solving linear programming problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(11): 1995–2006.

[5] Maa C Y, Shanblatt M A. Linear and quadratic programming neural network analysis[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1992, 3(4): 580–594.

[6] Wang J. Analysis and design of a recurrent neural network for linear programming[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 1993, 40(9): 613–618.

[7] Zhang S, Constantinides A G. Lagrange programming neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems II, 1992, 39(7): 441–452.

[8] Wang J. A deterministic annealing neural network for convex programming[J]. Neural Netwoeks, 1994, 7(4): 629–641.

[9] Forti M, Nistri P, Quincampoix M. Generalized neural network for nonsmooth nonlinear programming problems[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems I, Regular Papers, 2004.51(9): 1741-1754.

[10] Forti M, Nistri P, Quincampoix M. Generalized neural network for nonsmooth nonlinear programming problems[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems I: Regular Papers, 2004, 51(9): 1741–1754.

[11] Xue X, Bian W. Subgradient-based neural networks for nonsmooth convex optimization problems[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems I: Regular Papers, 2008.55(8): 2378-2391.

[12] Bian W, Xue X. Neural network for solving constrained convex optimization

problems with global attractivity[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems I: Regular Papers, 2013.60(3): 710-723.

[13]Qin S, Fan D, Wu G, et al. Neural network for constrained nonsmooth optimization using Tikhonov regularization[J]. Neural Network, 2015, 63(C): 272-281.

[14]Qin S, Xue X. A two-layer recurrent neural network for nonsmooth convex optimization problems[J]. IEEE Transactions on Neural Network and Learning Systems, 2015, 26(6): 1149-1160.

[15]Zhang W, Hou Z, Lin Y, et al. Recurrent neural network for nonsmooth convex optimization problems with application to the identification of genetic regulatory networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(5): 714-726.

[16]Bian W, Xue X. Subgradient-based neural networks for nonsmooth nonconvex optimization problems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2009, 20(6):1024-1038.

[17]Henrion D, Lasserre J B. Solving nonconvex optimization problems[J].IEEE Control Systems Magazine, 2004, 24(3): 72-83.

[18]Kiwiel K C. Convergence of the gradient sampling algorithm for nonsmooth nonconvex optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2007, 18(2): 379-388.

[19]Liu Q, Wang J. A one-layer recurrent neural network for constrained nonsmooth optimization[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics part B-Cybernetics, 2011, 41(5): 1323-1333.

[20]Latorre V, Gao D. Conical dual solutions to nonconvex radial basis neural network optimization problem[J]. Neurocomputing, 2014, 134: 189-197.

[21]喻昕，许治健，陈昭蓉，等. 拉格朗日神经网络解决带等式和不等式约束的非光滑非凸优化问题[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(08): 1950-1955.

[22]喻昕，陈昭蓉. 一类非光滑非凸优化问题的神经网络方法[J]. 计算机应用研究, 2019,36(09): 2575-2578.

[23]Guo Z, Liu Q, Wang J. A one-layer recurrent neural network for pseudoconvex optimization subject to liner equality constraints[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2011, 22(12): 1982-1900.

[24]Liu Q, Guo Z, Wang J. A one-layer recurrent neural network for constrained pseudoconvex optimization and its application for dynamic portfolio optimization[J]. Neural Networks, 2011, 26: 99-109.

[25]喻昕，伍灵贞，汪炎林. 一种解决受约束的非光滑伪凸优化问题的新型神经网络方法[J]. 小型微型计算机系统, 2020, 41(03): 544-550.

[26]喻昕，伍灵贞，汪炎林. 一种解决非光滑伪凸优化问题的新型神经网络[J]. 计算机工程与应用，2019，55(12)：37-43.
[27]Qin S, Yang X, Xue X, et al. A one-layer recurrent neural network for pseudoconvex optimization problems with equality and inequality constraints[J]. IEEE transactions on cybernetics, 2016, 47(10): 3063-3074.
[28] Bian W, Ma L, Qin S, et al. Neural network for nonsmooth pseudconvex optimization with general convex constraints[J]. Neural Networks,2018,101: 1-14
[29]喻昕,马崇,胡悦,伍灵贞,汪炎林. 一种新型解决非光滑伪凸优化问题的神经网络方法[J]. 计算机科学,2019,46(11):228-234.
[30]Liu N, Qin S. A neurodynamic approach to nonlinear optimization problems with affine equality and convex inequality constraints[J]. Neural Networks, 2019, 109: 147-158.
[31]Xu C, Chai Y, Qin S, et al. A neurodynamic approach to nonsmooth constrained pseudoconvex optimization problem[J]. Neural Networks, 2020,124:180–192.
[32]Qin S, Fan D, Su P, et al. A simplified recurrent neural network for pseudoconvex optimization subject to linear equality constraints[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(4):789–798.
[33]Hosseini A. A non-penalty recurrent neural network for solving a class of constrained optimization problems[J]. Neural Network. 2016,73: 10-25.
[34]Hu X, Wang J. Solving pseudomonotone variational inequalities and pseudoconvex optimization problems using the projection neural network[J]. IEEE Transactions on Neural Network, 2006.17(6): 1487-1499.
[35]Guo Z, Liu Q, Wang J. A one-layer recurrent neural network for pseudoconvex optimization subject to linear equality constraints[J]. IEEE. Trans.Neural Netw, 2011, 22(12): 1892-1900.
[36]Qin S, Bian W, Xue X. A new one layer recurrent neural network for nonsmooth pseudoconvex optimization[J]. Neurocomputing, 2013, 120: 655–662.
[37]Liu Q S, Guo Z, Wang J. A one-layer recurrent neural network for constrained pseudoconvex optimization and its application for dynamic portfolio optimization[J]. Neural Network, 2012, 26: 99-109.
[38]Li Q, Liu Y, Zhu L. Neural network for nonsmooth pseudoconvex optimization

with general constraints[J]. Neurocomputing, 2014, 131: 336–347.
[39]Qin S, Yang X, Xue X, et al. A one-layer recurrent neural network for pseudoconvex optimization problem with equality and inequality constraints[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017.47(10): 3063-3074.