

基于三维紧框架的并行磁共振成像重建算法研究

陈宏佳

摘要

并行磁共振成像 (pMRI) 是一项无创的医学成像技术, 广泛应用于获取高质量的病理图像。pMRI 的重建过程涉及一个病态的逆问题, 需要通过正则化技术对解进行约束。原论文在迭代自一致并行成像正则化 (SPIRiT) 方法的基础上, 通过三维紧框架系统提取图像的方向特征, 采用基于紧框架特征的正则化模型, 约束 k-空间数据一致性重建问题, 并使用交叉乘子法 (ADMM) 求解该模型。本文除复现原论文方法之外, 还引用了 PD3O 算法优化该模型的时间性能。仿真实验表明, 本文的复现效果良好, 且改进的算法较原文算法在时间性能上提升了约 25%。

关键词: pMRI; SPIRiT; 紧框架; ADMM; PD3O

1 引言

磁共振成像 (Magnetic Resonance Imaging, MRI) 是一种利用原子核在强磁场和射频场的作用下发生共振现象的原理来获取高分辨率的内部结构图像的无创的医学成像技术, 该技术不需要使用电离辐射, 因此被扫描的诊断者不会受到辐射的侵害, 并且可以得到分辨率和质量较高的病理图像 [1]。MRI 技术在临床上得到广泛的应用, 能让体内一些器官结构、血管分布和其他生理特征得到较好的可视化。并行磁共振成像 (parallel Magnetic Resonance Imaging, pMRI) 技术采用多线圈并行采集技术来提高 MRI 效率, 通过获取具有不同空间灵敏度的部分 k-空间数据以减少成像时间 [2]。磁共振成像技术主要分为两个步骤, 分别是数据信号采集和图像重建。线圈采集的数据为 k-空间数据, 其包含目标切片的空间频率信息。对 k-空间数据进行逆傅里叶变换, 再使用平方和 (Sum-of-Square, SoS) 公式进行计算, 即可得到图像域的数据。pMRI 技术使用多个线圈来采集数据, 使得该技术的数据信号采集环节只需采集部分 k-空间数据, 减少了成像时间, 能够降低病人运动、血液流动等因素导致的图像伪影; 相应地, pMRI 技术的图像重建过程则是对欠采样的数据进行重建, 使用适当的算法估计缺失数据, 进而获得完整的 k-空间数据。

pMRI 的研究在应用与理论层面都具有深远的意义。在应用层面, pMRI 技术广泛应用于医学领域。其中, 高效的算法能够在更短的扫描时间内获得准确的 MRI 图像, 更短的扫描时间可减少就诊者情绪上的不安与恐慌, 准确的 MRI 图像可辅助医生做出准确的诊断。而在理论层面, pMRI 提供了对底层图像性质的一种理解角度, 其中的思想可以应用于提高其他图像处理算法的效率。同时, 受限于 MRI 设备和采样定理的缘故, 如何在高效率重建图像的同时尽可能减少图像噪声和混叠伪影, 仍是需要研究的问题。

2 相关工作

常见的 pMRI 重建算法根据目标解的数据类型可分为基于图像域的重建算法、基于 k-空间的重建算法和基于深度学习的重建算法。

2.1 基于图像域的重建算法

pMRI 使用多个接收线圈来采集数据，每个线圈对越接近线圈的组织采集的信号越强。该特性使得每个线圈采集的数据能够携带不同的空间信息。每个接收线圈对于不同空间位置的敏感性称为灵敏度。基于图像域的重建算法主要应用线圈之间的灵敏度信息，消除欠采样带来的混叠伪影，得到高质量的重建图像。灵敏度编码 (SENSE) [3] 是著名的基于图像域的重建算法。SENSE 方法通过估计各个线圈的灵敏度信息，将目标切片信号和噪声信号分离开来，然后将分离后的物体信号根据线圈的灵敏度信息进行加权组合。SENSE 方法的挑战在于，重建算法需要准确估计各个线圈的灵敏度，但由于线圈的物理结构比较复杂，其灵敏度通常难以确定。因此，基于 SENSE 的 pMRI 重建模型经常受到混叠伪影的影响。为了消除混叠伪影，文献 [4] 提出了一种基于子空间的技术来估计线圈灵敏度，该技术不依赖引起灵敏度估计误差的 SoS 假设，因此能够得到更好的灵敏度估计。

2.2 基于 k-空间的重建方法

基于 k-空间的重建方法有广义自动校准部分并行采集 (Generalized Autocalibrating Partially Parallel Acquisitions, GRAPPA) 技术 [5]。与 SENSE 方法不同，GRAPPA 不需要显式计算线圈灵敏度，其在重建过程中依赖少量在 k-空间中心附近进行全采样的数据，这种额外的 k-空间数据行被称为自动校准信号 (Auto-Calibration Signal, ACS) 数据。通过增加使用的 ACS 数据量，可以提高重建后得到的完整 k-空间数据的准确性，但代价是增加了扫描时间。另外，GRAPPA 对于不同位置的缺失值的估计需要使用不同形式的校正核，需要估计的校正核数量较多。针对 GRAPPA 方法的缺点，迭代自一致并行成像正则化 [6] (Iterative Self-Consistent Parallel Imaging Reconstruction, SPIRiT) 技术对 GRAPPA 方法进行改进，对所有位置的缺失值的估计都使用统一形式的校正核，显著减少了待估计的校正核的数量，在确保重建图像准确性的同时也能够减少扫描时间。

pMRI 重建模型通常是一个病态 (ill-posed) 逆问题，其解的唯一性、存在性和稳定性无法同时满足。为消除由问题的病态性带来的不良影响，可以使用正则化方法结合先验信息假设约束目标解的性质，如稀疏性。文献 [7] 在 SENSE 的基础上，使用基于复小波域的正则化方法约束解的稀疏性。而文献 [8] 则是基于 SPIRiT 方法，除了对采样数据进行一致性约束外，还使用正则化方法在小波域增强线圈图像的联合稀疏性。

2.3 基于深度学习的重建算法

近年来，深度学习作为一种强大的数据建模和特征学习工具，已经在医学影像领域展现出卓越的潜力，越来越多的研究者使用神经网络求解 pMRI 重建问题。如文献 [9] 通过学习结合变差模型和深度学习的变差网络，能够快速且高质量地重建 MRI 图像。文献 [10] 将 MRI 图像重建问题建模为数据驱动的监督学习任务，使用深度神经网络实现图像重建。

3 本文方法

3.1 本文方法概述

本文涉及的 pMRI 重建过程的示意图如图 1所示。pMRI 系统利用多线圈并行采集技术, 获取与目标切片图像相关的部分 k-空间数据。经过 pMRI 重建算法处理, 这些部分 k-空间数据得以重构为完整的 k-空间数据。完整的 k-空间数据再依次经过逆傅里叶变换和平方和公式的作用, 进而获得目标切片图像。为方便后文的叙述, 记 pMRI 的线圈个数为 p , 且对于分辨率为 $n = n_1 \times n_2$ 的图像而言, 其对应的 k-空间数据 u 通过列堆叠的方式表示为向量形式, 即 $u \in \mathbb{C}^n$ 。

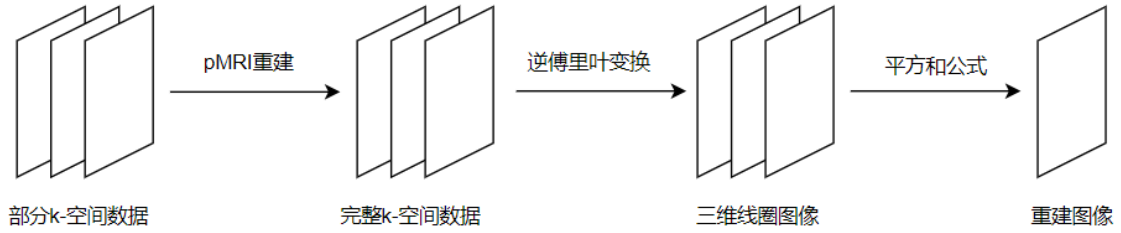


图 1. pMRI 重建过程示意图

SPIRiT 是基于 k-空间的 pMRI 重建方法, 该方法不需要显式计算各个线圈的灵敏度, 而是通过在 k-空间中心附近进行全采样, 获取用于计算校正核的 ACS 数据, 并使用校正核约束 k-空间数据的一致性。该方法所对应的重建模型的示意图如图 2所示。其中, 黑色点表示已采样数据, 白色点表示未采样数据, 灰色点则为待重建目标数据, 图 2选择的邻域大小为 3×3 。由图 2可以看到, SPIRiT 方法使用本线圈图像目标点邻域中已采样点和未采样点的数据以及其他线圈图像对应邻域内所有数据的线性组合对目标点的数据进行估计。

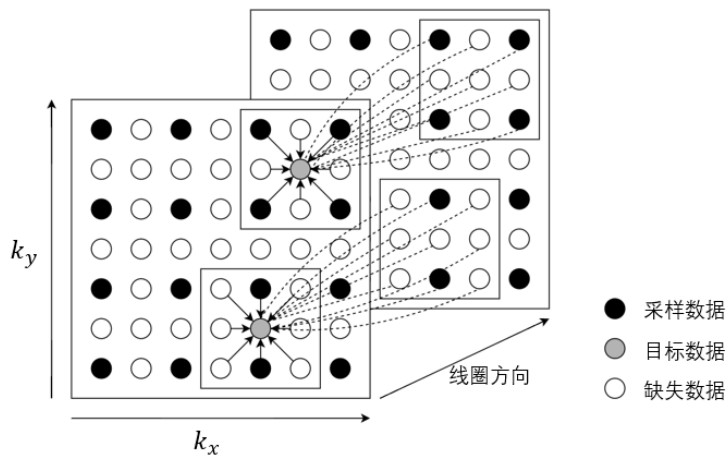


图 2. pMRI 重建过程示意图

k-空间数据的这种线性关系可以使用插值核来表示。SPIRiT 方法使用的插值核只有一种采样模板, 因此对不同的采样模式, 该方法所需的校正核个数均为 p 个, 与线圈的个数保持一致。记邻域大小为 $\eta_1 \times \eta_2$, 则对第 ι 个线圈而言, 其校正核可以表示为向量 $k_\iota \in \mathbb{C}^{(\eta_1 \eta_2 p - 1) \times 1}$,

其中, $\iota = 1, \dots, p$ 。在 SPIRiT 方法中, 假设插值核 k_ι 具有平移不变性, 因此可通过在 k -空间中心位置进行全采样的 ACS 数据计算出不同采样模板下的插值核, 并将其应用于约束 k -空间数据的一致性。对第 ι 个线圈而言, 其校正核 k_ι 可以用以下模型进行估计:

$$k_\iota = \min_x \|D_\iota x - d_\iota\|_2^2, \quad \iota = 1, \dots, p, \quad (1)$$

其中, 矩阵 D_ι 表示 ACS 数据中每个目标点对应的邻域数据, 向量 d_ι 表示的则是相应目标点的数据。将 p 个校正核以列堆叠的方式表示为向量 k , 将每个校正核对应的 ACS 数据以行堆叠的方式表示为矩阵 D , 同时, 将目标数据表示为向量 d , 则模型 (1) 等价于如公式 (2) 所示的模型。

$$\min_k \|Dk - d\|_2^2. \quad (2)$$

模型 (2) 可使用优化方法进行求解。记 ACS 数据矩阵 $D \in \mathbb{C}^{s \times t}$, 校正核向量 $k \in \mathbb{C}^t$, 目标数据向量 $d \in \mathbb{C}^s$ 。注意到, 模型 (2) 对应的优化问题的解通常不唯一, 其解构成一个解空间。为确保计算得到的校正核具有较好的性质, 本文对校正核做出合理的假设, 约定 $k \in \mathbb{R}^t$, 即校正核的每个元素均为实数。由于校正核是实数向量, 模型 (2) 可通过分别考虑 D 和 d 的实部和虚部将模型等价于实数域上的优化问题。

记 $M = \begin{bmatrix} \text{Re}(D) \\ \text{Im}(D) \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} \text{Re}(d) \\ \text{Im}(d) \end{bmatrix}$, 由复向量 ℓ_2 -范数的性质可知, $\|Dk - d\|_2^2 = \|Mk - z\|_2^2$ 。

需要注意的是, 等式左边是由复内积诱导的范数, 而等式右边是由实内积诱导的范数。因此, 计算约束 k -空间数据一致性的校正核的模型如公式 (3) 所示。

$$\min_{k \in \mathbb{R}^t} \frac{1}{2} \|Mk - z\|_2^2, \quad (3)$$

其中, 模型 (3) 的目标函数为 $f(k) = \frac{1}{2} \|Mk - z\|_2^2$ 。由文献 [11] 可知, 对目标函数形如 $f + g$ 的优化模型而言, 当 f 连续可微且其梯度函数满足利普西茨连续性条件时, 可以使用 FISTA 算法对该模型进行求解, FISTA 算法每一轮迭代的步骤如公式 (4) 所示。

$$\begin{cases} x^k = \text{prox}_{\frac{1}{L}g} \left(y^k - \frac{1}{L} \nabla f(y^k) \right), \\ t^{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(t^k)^2}}{2}, \\ y^{k+1} = x^k + \left(\frac{t^k - 1}{t^{k+1}} \right) (x^k - x^{k-1}). \end{cases} \quad (4)$$

对模型 (3) 而言, $f(k) = \frac{1}{2} \|Mk - z\|_2^2$, 则 $\nabla f(k) = M^T (Mk - z)$ 。同时, 由于 $g(k) = 0$, 因此 $\text{prox}_{\frac{1}{L}g}(y) = y$ 。综上, 计算校正核的算法步骤如算法 1 所示, 算法的收敛性证明参见文献 [11] 中的定理 2.1。

由算法 1 的计算结果可得到校正核 k , 接下来使用校正核约束 pMRI 重建模型的 k -空间数据一致性。对 pMRI 重建模型, 记线圈个数为 p , 每张线圈图像的分辨率为 $n = n_1 \times n_2$, 每个线圈采集到的完整 k -空间数据表示为 $g_\iota \in \mathbb{C}^n$, $\iota = 1, \dots, p$ 。记 $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为采样矩阵, 并且 \mathcal{P} 为对角阵, 其元素的取值只有 0 和 1, 1 表示在相应位置进行采样, 而 0 表示在相应位置不进行采样。因此, pMRI 过程采集的部分 k -空间数据表示为 $g = (\mathcal{P}g_\iota)_{\iota=1}^p$, 待重建的完整

算法 1: 计算校正核的 FISTA 算法

输入: 利普西茨常数 L

输出: 估计所得的校正核 x

```
1 初始化:  $y^1 = x^0 = 0, t^1 = 1$ 
2 for  $k = 1, 2, \dots$  do
3   计算  $x^k = y^k - \frac{1}{L} (M^T (My^k - z))$ 
4   计算  $t^{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(t^k)^2}}{2}$ 
5   计算  $y^{k+1} = x^k + \left(\frac{t^k - 1}{t^{k+1}}\right) (x^k - x^{k-1})$ 
6   当满足停止条件时, 退出循环, 返回  $x^k$ 
7 end
```

k-空间数据则表示为 $u = (u_1, \dots, u_p)$ 。记每个线圈所对应校正核的矩阵表示为 C_l , 则 pMRI 重建模型如公式 (5) 所示。

$$\min_u \frac{1}{2} \|(C - I)(Qu + g)\|_2^2, \quad (5)$$

其中, $Q = I_p \otimes (I - \mathcal{P})$, I_p 表示大小为 $p \times p$ 的单位矩阵, \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积, 而 $C = (C_l)_{l=1}^p$ 。公式 (5) 中, Qu 表示重建所得的未采样数据, $Qu + g$ 表示重建所得的完整 k-空间数据, 此处约束 k-空间的采样一致性。而 k-空间数据的校正一致性意味着, 将校正核作用于重建所得的完整 k-空间数据, 其结果与完整的 k-空间数据的误差比较小。因此, 模型 (5) 通过求该误差的最小值以约束 k-空间数据的采样一致性和校正一致性。

由于模型 (5) 是一个病态逆问题, 其解不一定具有良好的性质, 因此需要使用正则化方法对解的性质进行约束。本文使用三维紧框架正则化技术约束问题的解在紧框架域上的稀疏性, 其重建模型如公式 (6) 所示。

$$\min_u \frac{1}{2} \|(C - I)(Qu + g)\|_2^2 + \|\Gamma W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}(Qu + g)\|_1, \quad (6)$$

其中, $\|\Gamma W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}(Qu + g)\|_1$ 为优化模型的正则项, Γ 是正则化参数对应的对角矩阵, 且对角线元素非负。 $\mathcal{F}_p = I_p \otimes \mathcal{F}$, I_p 表示大小为 $p \times p$ 的单位矩阵, \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积, 其余符号与模型 (5) 保持一致。

3.2 紧框架理论介绍

本节主要介绍紧框架理论的相关概念。记 $l(\mathbb{Z}^d)$ 为定义在集合 \mathbb{Z}^d 上的所有数列的集合, $l_0(\mathbb{Z}^d)$ 表示 \mathbb{Z}^d 上所有有限支撑数列的集合。对数列 $h = \{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, 若 h 只有有限多个元素不为零, 则称该数列为有限支撑数列。习惯上, 将 $l_0(\mathbb{Z}^d)$ 的元素称为滤波器 (Filter)。对 $h \in l_0(\mathbb{Z}^d)$, 定义 h 的傅里叶变换为 $\hat{h}(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h(k) e^{-ik\xi}$, 其中 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 。

对滤波器 $a, b_1, \dots, b_s \in l_0(\mathbb{Z}^d)$, 如果它们满足

$$\hat{a}(\xi) \overline{\hat{a}(\xi + \pi\omega)} + \sum_{\ell=1}^s \hat{b}_\ell(\xi) \overline{\hat{b}_\ell(\xi + \pi\omega)} = \delta(\omega), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \omega \in \{0, 1\}^d, \quad (7)$$

则称滤波器组 $\{a; b_1, \dots, b_s\}$ 为紧框架滤波器组 (Tight framelet filter bank), 其中, \bar{x} 表示 x 的共轭, 而对 $\delta(\omega)$, 当 $\omega = 0$ 时, $\delta(\omega) = 1$, 当 $\omega \in \mathbb{Z}^d$ 且 $\omega \neq 0$ 时, $\delta(\omega) = 0$ 。记 $\delta_\gamma = \delta(\cdot - \gamma)$, 则当 $\omega = \gamma$ 时, $\delta_\gamma(\omega) = 1$, 当 $\omega \in \mathbb{Z}^d$ 且 $\omega \neq \gamma$ 时, $\delta_\gamma(\omega) = 0$ 。通常将 a 称为低通滤波器, 将 b_1, \dots, b_s 称为高通滤波器。

由文献 [12] 可知, 离散数据 v 可由紧框架滤波器组对应的离散框架变换表示。对数据 $v \in l(\mathbb{Z}^d)$ 和滤波器 $h \in l_0(\mathbb{Z}^d)$, 定义细分 (Subdivision) 算子 $\mathcal{S}_h : l(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l(\mathbb{Z}^d)$ 与过渡 (Transition) 算子 $\mathcal{T}_h : l(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l(\mathbb{Z}^d)$, 其表达式如公式 (8) 与 (9) 所示。

$$[\mathcal{S}_h v](\gamma) := 2^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} v(k) h(\gamma - 2k) = 2^d [h * (v \uparrow 2)](\gamma), \quad \gamma \in \mathbb{Z}^d, \quad (8)$$

$$[\mathcal{T}_h v](\gamma) := 2^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} v(k) \overline{h(k - 2\gamma)} = 2^d [(h^* * v) \downarrow 2](\gamma), \quad \gamma \in \mathbb{Z}^d, \quad (9)$$

其中, h^* 是一个滤波器, 满足 $h^*(k) = \overline{h(-k)}$ 。* 表示卷积操作, 对 $h \in l_0(\mathbb{Z}^d)$, $v \in l(\mathbb{Z}^d)$, $\gamma \in \mathbb{Z}^d$, 定义 $[h * v](\gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} h(\gamma - k) v(k)$ 。 $\uparrow m$, $m \in \mathbb{N}$ 则是上采样算子, 对 $v \in l(\mathbb{Z}^d)$, $\gamma \in \mathbb{Z}^d$, 当 $m^{-1}\gamma \in \mathbb{Z}^d$ 时, $[v \uparrow m](\gamma) = v(m^{-1}\gamma)$; 当 $m^{-1}\gamma \notin \mathbb{Z}^d$ 时, $[v \uparrow m](\gamma) = 0$ 。 $\downarrow m$, $m \in \mathbb{N}$ 是下采样算子, 对 $v \in l(\mathbb{Z}^d)$, $\gamma \in \mathbb{Z}^d$, 满足 $[v \downarrow m](\gamma) = v(m\gamma)$ 。

由文献 [12] 可知, 离散数据 v 在紧框架滤波器组 $\{a; b_1, \dots, b_s\}$ 对应的紧框架系统下可分解为紧框架系数 $\{v_0; w_1, \dots, w_s\}$, 其中,

$$v_0 := 2^{-d/2} \mathcal{T}_a v; \quad w_\ell := 2^{-d/2} \mathcal{T}_{b_\ell} v, \quad \ell = 1, \dots, s.$$

同时, 紧框架系数 $\{v_0; w_1, \dots, w_s\}$ 可通过离散框架变换重建得目标数据 \tilde{v} , 其中,

$$\tilde{v} := 2^{-d/2} \left(\mathcal{S}_a v_0 + \sum_{\ell=1}^s \mathcal{S}_{b_\ell} w_\ell \right).$$

由于紧框架滤波器组 $\{a; b_1, \dots, b_s\}$ 满足公式 (7), 由文献 [12] 可知, 公式 (7) 等价于完美重建性质 (The perfect reconstruction property), 紧框架重建结果等于原始数据, 即 $\tilde{v} = v$ 。

前文的离散框架变换只考虑数据在单个尺度的特征, 而要提取数据的多尺度信息, 可以使用文献 [12] 中的多层紧框架系统 (Multi-level tight framelets)。多层紧框架系统的每一层对应一个滤波器组, 不同层之间可以使用不同的滤波器组以提取图像的不同特征, 本文考虑的情况是每一层紧框架系统都具有相同的滤波器组。记滤波器组为 $\eta = \{a; b_1, \dots, b_s\}$, 其中 $j = 1, \dots, J$, $J \geq 1$, 并且 $j = J$ 对应尺度最细的系统, 而 $j = 1$ 对应尺度最粗的系统。同时, η 满足公式 (7), 即每一层紧框架系统都具有完美重建性质。类比离散框架变换, 定义多层离散紧框架变换如下:

$$v_{j-1} = v_j * (a^* \uparrow 2^{J-j}), \quad w_{j-1;\ell} = v_j * (b_\ell^* \uparrow 2^{J-j}), \quad \ell = 1, \dots, s, \quad j = J, \dots, 1, \quad (10)$$

$$v_j = v_{j-1} * (a \uparrow 2^{J-j}) + \sum_{\ell=1}^s w_{j-1;\ell} * (b_\ell \uparrow 2^{J-j}), \quad j = 1, \dots, J, \quad (11)$$

其中, 公式 (10) 表示紧框架的分解, 而公式 (11) 表示紧框架的重建。

紧框架分解与重建可以用相应滤波器与目标数据的卷积进行计算，因此，紧框架系统可通过适当的滤波器组进行构造。有向 Haar 紧框架能够有效地提取线圈图像的方向特征，如二维有限 Haar 紧框架能够提取图像水平、垂直和对角方向的特征 [13]。然而，在 pMRI 重建问题中，由于每个线圈采集的数据表示的是同一个目标的空间频率信息，因此各个线圈图像具有一定的相关性，仅仅使用二维紧框架难以提取图像在线圈方向的信息。

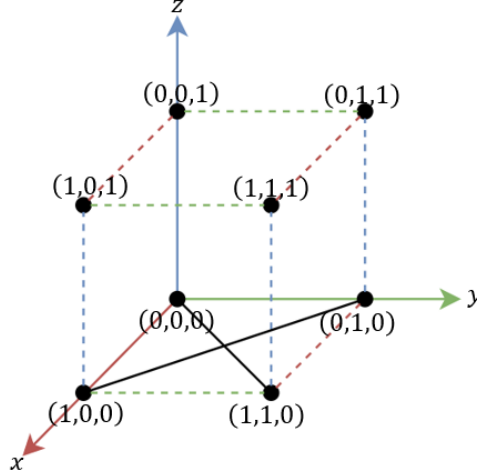


图 3. 3DHSTF 坐标相对位置示意图

本文使用文献 [13] 的 3DHSTF 提取三维线圈图像的方向信息，相应的滤波器组为

$$3DHSTF := \{a^H; b_x, b_y, b_{xy}, b_{x,y}, b_{aux}\}.$$

图 3 展示了 3DHSTF 对应的坐标系，从组合数学的角度，在图 3 立方体的 8 个顶点中任选两个，一共有 $C_8^2 = 28$ 种可能，对应三维有向 Haar 紧框架系统的 28 个方向。而将这 28 个方向中平行的部分进行合并，结果有 13 个不同的方向，对应到三维紧框架系统，则该系统具有 13 个高通滤波器。其中仅与 xOy 平面相关的方向只有 4 个，分别是 $b_x, b_y, b_{xy}, b_{x,y}$ ，如图 3 的 xOy 平面所示，剩下 9 个高通滤波器均与 z 轴的方向有关，其信息由辅助滤波器 b_{aux} 刻画。3DHSTF 中， a^H 是低通滤波器，其表达式如下式所示。

$$a^H = \frac{1}{8}(\delta_{(0,0,0)} + \delta_{(0,0,1)} + \delta_{(0,1,0)} + \delta_{(0,1,1)} + \delta_{(1,0,0)} + \delta_{(1,0,1)} + \delta_{(1,1,0)} + \delta_{(1,1,1)}).$$

而 $b_x, b_y, b_{xy}, b_{x,y}, b_{aux}$ 是高通滤波器，其中 $b_x, b_y, b_{xy}, b_{x,y}$ 依次提取图像在水平、垂直和对角方向上的信息，其定义式表示如下。

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{1}{4}(\delta_{(1,0,0)} - \delta_{(0,0,0)}), & b_{xy} &= \frac{\sqrt{2}}{8}(\delta_{(1,1,0)} - \delta_{(0,0,0)}), \\ b_y &= \frac{1}{4}(\delta_{(0,1,0)} - \delta_{(0,0,0)}), & b_{x,y} &= \frac{\sqrt{2}}{8}(\delta_{(1,0,0)} - \delta_{(0,1,0)}). \end{aligned}$$

其中， δ_γ 之间的相对位置如图 3 所示。需要注意的是，尽管三维紧框架能够提供图像在不同线圈之间的相关信息，但是图像在线圈对应的 z 轴方向上并没有稀疏性质。因此 3DHSTF 仅选择能够提取图像 x 轴和 y 轴信息的 4 个高通滤波器，同时为了减少计算量，将包含 z 轴方向的滤波器合并为辅助滤波器 b_{aux} ， b_{aux} 的选择需要保证 3DHSTF 的滤波器组满足公式 (7)，

即需要满足以下的等式。

$$|\widehat{b_{aux}}|^2 = 1 - \left(|\widehat{a^H}|^2 + |\widehat{b_x}|^2 + |\widehat{b_y}|^2 + |\widehat{b_{xy}}|^2 + |\widehat{b_{x,y}}|^2 \right).$$

为更直观地阐述 3DHSTF 各个滤波器的作用, 本文选取 Phantom 数据的全采样 k-空间数据, 对该数据使用逆傅里叶变换获得三维线圈图像, 依次使用 3DHSTF 的 $a^H, b_x, b_y, b_{xy}, b_{x,y}$ 提取三维图像的方向特征, 将紧框架系数经平方和公式的作用得到目标切片图像的方向特征, 如图 4 所示。由图 4 可以看到, 低通滤波器 a^H 蕴含线圈之间的相关信息, 而高通滤波器 $b_x, b_y, b_{xy}, b_{x,y}$ 依次提取三维图像在 xOy 平面上水平、垂直和主、副对角线方向的特征, 并且三维图像在 xOy 平面上的高频特征具有良好的稀疏性。

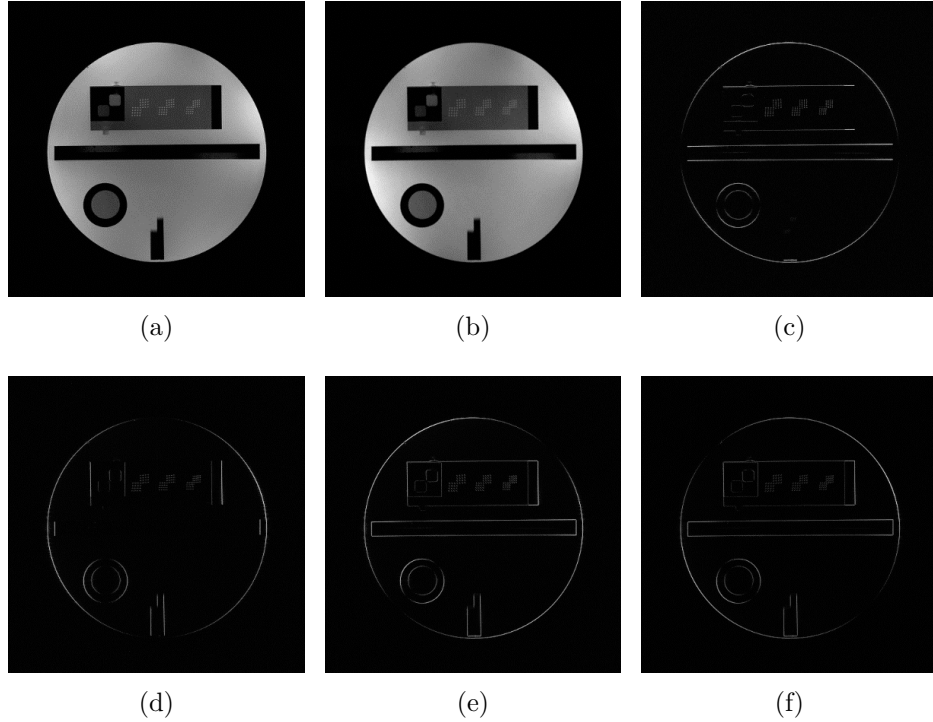


图 4. 参考图像与该图像在 3DHSTF 上的紧框架系数 (a) 参考图像, (b) a^H , (c) b_x , (d) b_y , (e) b_{xy} , (f) $b_{x,y}$

3.3 优化模型介绍

对公式 (6) 对应的 pMRI 重建模型, 本文使用 ADMM 算法 [14] 进行求解, 模型 (6) 等价于求解公式 (12) 所示的模型。

$$\min_u \frac{1}{2} \|(C - I)(Qu + g)\|_2^2 + \|\Gamma v\|_1 \quad \text{subject to} \quad v = W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}(Qu + g). \quad (12)$$

ADMM 算法的基本思想是将目标模型分解为多个子问题, 子问题可由模型 (12) 的增广拉格朗日函数定义, 该函数的表达式如下式所示。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho(u, v, \alpha) := & \frac{1}{2} \|(C - I)(Qu + g)\|_2^2 + \|\Gamma v\|_1 + \\ & \text{Re}(\alpha^\top (v - W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}(Qu + g))) + \frac{\rho}{2} \|v - W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}(Qu + g)\|_2^2, \end{aligned}$$

其中, Re 表示复数的实部, α 是拉格朗日参数, 而 ρ 是惩罚参数且 $\rho > 0$ 。因此, ADMM 算法每一轮迭代的步骤如公式 (13) 所示。

$$\begin{cases} u^{k+1} = \arg \min_u \mathcal{L}_\rho(u, v^k, \alpha^k), \\ v^{k+1} = \arg \min_v \mathcal{L}_\rho(u^{k+1}, v, \alpha^k), \\ \alpha^{k+1} = \alpha^k + \rho (v^{k+1} - W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}(Qu^{k+1} + g)). \end{cases} \quad (13)$$

至此, 模型 (12) 等价于 u -子问题和 v -子问题的求解, 其中 u -子问题的表达式如下式所示。

$$u^{k+1} = \arg \min_u \frac{1}{2} \|(C - I)(Qu + g)\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|v^k - W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}(Qu + g) + \frac{1}{\rho} \alpha^k\|_2^2 \quad (14)$$

注意到, u -子问题的目标函数是可微凸函数, 因此可通过求其梯度函数的零点得到该子问题的最优解, 等价于求解以下线性方程的解。

$$(Q(C - I)^\top(C - I) + \rho I)Qu = (W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}Q)^\top(\rho v^k + \alpha^k) - Q(C - I)^\top(C - I)g - \rho Qg, \quad (15)$$

其中, \top 表示共轭转置运算。公式 (15) 的线性方程可使用共轭梯度法进行求解, 为便于后文分析, 将上述线性方程表示为 $Au = b$, 其中, A 和 b 具体的表达式如公式 (16)(17) 所示。

$$A = (Q(C - I)^\top(C - I) + \rho I)Q, \quad (16)$$

$$b = (W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}Q)^\top(\rho v^k + \alpha^k) - Q(C - I)^\top(C - I)g - \rho Qg, \quad (17)$$

由文献 [15] 可知, 求解 u -子问题的算法步骤如算法 2 所示, 算法 2 的收敛性证明参见文献 [15] 的定理 2.16。

算法 2: 求解 u -子问题的 CG 算法

输入: 参数 ρ, v^k, α^k

输出: 算法计算结果 u

- 1 初始化: $u^1 = g$, 根据公式 (16) 计算 A , 根据公式 (17) 计算 b , $d^1 = r^1 = b - Au^1$
 - 2 **for** $k = 1, 2, \dots$ **do**
 - 3 计算 $t^k = \frac{(r^k)^\top r^k}{(d^k)^\top A d^k}$
 - 4 计算 $u^{k+1} = u^k + t^k d^k$
 - 5 计算 $r^{k+1} = r^k - t^k A d^k$
 - 6 计算 $\beta^k = \frac{(r^{k+1})^\top r^{k+1}}{(r^k)^\top r^k}$
 - 7 计算 $d^{k+1} = r^{k+1} + \beta^k d^k$
 - 8 当满足停止条件或 $r^k = 0$ 时, 退出循环, 返回 u^k
 - 9 **end**
-

对 v -子问题, 其表达式如下式所示。

$$v^{k+1} = \arg \min_v \frac{1}{\rho} \|\Gamma v\|_1 + \frac{1}{2} \|v^k - W_{3D} \mathcal{F}_p^{-1}(Qu + g) + \frac{1}{\rho} \alpha^k\|_2^2. \quad (18)$$

由文献 [16] 可知, 公式 (18) 可表示为邻近算子的形式, 如公式 (19) 所示。

$$v^{k+1} = \text{prox}_{\frac{1}{\rho}H} \left(W_{3D}\mathcal{F}_{p^{-1}}(Qu + g) - \frac{1}{\rho}\alpha^k \right), \quad (19)$$

其中, $H(v) = \|\Gamma v\|_1$, Γ 是优化模型的正则化参数矩阵。对离散数据 v , 给定滤波器组 3DHSTF, 则第 ι 张线圈图像在第 j 层的紧框架系数表示为 $w_{j,h}^\iota$, 其中, $j = 1, \dots, J$, $\iota = 1, \dots, p$, $h \in 3DHSTF$ 。记每张线圈的分辨率为 $n = n_1 \times n_2$, 使用二维向量 $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ 表示图像对应位置的数据值。参考文献 [13], 给每一层紧框架系数的每一个位置均分配一个参数, 其表达式如公式 (20) 所示。

$$\gamma_{j,h}^\iota(\tau) = \begin{cases} 0, & h \in \{a^H, b_{aux}\}, \\ \frac{\lambda \times 8^{J-j}}{\sigma_{j,h}^\iota(\tau)}, & h \in \{b_x, b_y, b_{xy}, b_{x,y}\}, \end{cases} \quad (20)$$

其中, $\sigma_{j,h}^\iota(\tau)$ 为系数 $w_{j,h}^\iota$ 在位置 τ 及其邻域绝对值的平均值, 且邻域大小为 3×3 , λ 需要手动设置。类似地, 对 v^{k+1} , 记 $y_{j,h}^\iota(\tau)$ 为 $W_{3D}\mathcal{F}_p^{-1}(Qu^{k+1} + g) - \frac{1}{\rho}\alpha^k$ 在紧框架系数 $w_{j,h}^\iota$ 位置 τ 处的取值, 由文献 [16] 可知, $\frac{1}{\rho}H$ 的邻近算子可由 ℓ_1 -范数的邻近算子推知, 其表达式如公式 (21) 所示。

$$v_{j,h}^\iota(\tau) = \frac{y_{j,h}^\iota(\tau)}{|y_{j,h}^\iota(\tau)|} \max \left\{ |y_{j,h}^\iota(\tau)| - \frac{\gamma_{j,h}^\iota(\tau)}{\rho}, 0 \right\}. \quad (21)$$

其中, $v_{j,h}^\iota(\tau)$ 表示 v^{k+1} 在紧框架系数 $w_{j,h}^\iota$ 位置 τ 处的取值。

3.4 重建算法介绍

结合上文对 u -子问题和 v -子问题的求解, 求解 pMRI 重建模型的 ADMM 算法的步骤如算法 3 所示。

算法 3: 基于 ℓ_1 -3DHSTF 与 ADMM 的 pMRI 重建算法

输入: 参数 ρ, λ

输出: pMRI 重建图像 \tilde{u}_{SoS}

1 初始化: $u^1 = g, v^1 = W_{3D}\mathcal{F}_p^{-1}(Qu^1 + g), \alpha^1 = 0$

2 **for** $k = 1, 2, \dots$ **do**

3 求解 u -子问题: 根据算法 2 计算 u^{k+1}

4 求解 v -子问题: 当 $k = 1, 3, 5, 7, 9$ 时, 根据公式 (20) 计算参数矩阵 Γ ; 根据公式 (21) 计算 v^{k+1}

5 计算 $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \rho(v^{k+1} - W_{3D}\mathcal{F}_p^{-1}(Qu^{k+1} + g))$

6 当满足停止条件时, 退出循环, $u = u^k$

7 **end**

8 计算三维线圈图像: $\tilde{u} = \mathcal{F}_p^{-1}(Qu + g)$

9 由公式 (22) 计算重建图像 \tilde{u}_{SoS}

对于三维线圈图像 $\tilde{u} = \{\tilde{u}_\ell \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2} : \ell = 1, \dots, p\}$, 由平方和 (SoS) 公式可得重建图像 \tilde{u}_{SoS} , 其表达式如公式 (22) 所示。

$$\tilde{u}_{SoS}(\tau) = \left(\sum_{\ell=1}^p |\tilde{u}_\ell(\tau)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

其中, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, 且 $\tau_1 = 1, \dots, n_1$, $\tau_2 = 1, \dots, n_2$ 。同时, 由文献 [14] 可知, 当参数 $\rho > 0$ 时, 算法 3 收敛。

4 复现细节

4.1 与已有开源代码对比

本文的代码引用了五个原作者编写的函数, 分别是对图像进行紧框架分解和重建的函数, 估计校正核和利普西茨常数的函数, 三维傅里叶变换的函数, 更新正则化参数矩阵 Γ 的函数和计算邻近算子的函数, 其余代码为独自编写。本文在复现论文作者实验的基础上, 引用文献 [17] 所提出的利用线性算子最小化三个函数的和的原始-对偶算法 (简称 PD3O 算法) 替换论文的 ADMM 算法, 以缩短重建算法的执行时间。

4.2 实验环境搭建

本实验在 Matlab 2020a 上进行代码编写和实验仿真, 只需下载 Matlab 提供的 Image Process ToolBox 和 Wavelet ToolBox, 无需额外的环境搭建。

4.3 界面分析与使用说明

本实验只需要在 Matlab 环境中展示执行算法所得的重建图像, 无可可视化界面操作。

4.4 创新点

文献 [17] 在实数域中证明了 PD3O 算法的收敛性, 由于本文所研究的是复数域上的模型, 需要将复数域模型等价转换为实数域模型。类比前文估计校正核的等价转换思路, 将 n 维复数向量的实部和虚部分离, 堆叠为 $2n$ 维实数向量。记 $x = \begin{bmatrix} \text{Re}(u) \\ \text{Im}(u) \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} \text{Re}(g) \\ \text{Im}(g) \end{bmatrix}$, 则与模型 (6) 等价的实数域模型如公式 (23) 所示。

$$\min_x \frac{1}{2} \|\mathcal{C}(\mathcal{Q}x + y)\|_2^2 + \Phi_\Gamma(WA(\mathcal{Q}x + y)), \quad (23)$$

其中,

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C - I & 0 \\ 0 & C - I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_{3D} & 0 \\ 0 & W_{3D} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathcal{F}_p^{-1}) & -\text{Im}(\mathcal{F}_p^{-1}) \\ \text{Im}(\mathcal{F}_p^{-1}) & \text{Re}(\mathcal{F}_p^{-1}) \end{bmatrix}.$$

对 $z \in \mathbb{R}^{2n}$, 函数 $\Phi_\Gamma : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ 的定义如下式所示。

$$\Phi_\Gamma(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sqrt{z_i^2 + z_{i+n}^2}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Φ_Γ 可以视作对应位置下 n 个二维向量 ℓ_2 -范数的和。

为方便后续公式推导, 记 $B = WAQ$, $c = WAy$, $f(x) = \frac{1}{2}\|\mathcal{C}(Qx+y)\|_2^2$, $p(x) = \Phi_\Gamma(x+c)$, 则模型 (23) 可化简为公式 (24) 所示的形式。

$$\min_x f(x) + p(Bx). \quad (24)$$

文献 [17] 所提出的 PD3O 算法可用于解决目标函数形为 $f(x) + g(x) + p(Ax)$ 的优化问题, 其中, f 和 g 为适定的下半连续凸函数, A 为有界的线性算子, 同时, f 还需要满足利普西茨连续梯度可微的条件。对于模型 (24), $g(x) = 0$, f 和线性算子 B 满足应用 PD3O 算法的基本条件, 因此可以使用 PD3O 算法求解上述模型。由文献 [17] 可知, 使用 PD3O 算法求解模型 (24) 的迭代步骤如公式 (25) 所示。

$$\begin{cases} t^k = (I - \gamma\delta BB^\top)s^k + \delta B(x^k - \gamma\nabla f(x^k)), \\ s^{k+1} = t^k - \delta\text{prox}_{\delta^{-1}p}(\delta^{-1}t^k), \\ x^{k+1} = x^k - \gamma\nabla f(x^k) - \gamma B^\top s^{k+1}. \end{cases} \quad (25)$$

使用与 ADMM 算法类似的记号, 对离散数据 u , 给定滤波器组 3DHSTF, 则第 ι 张线圈图像在第 j 层的紧框架系数表示为 $w_{j,h}^\iota \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$, 该紧框架系数对应的实数域表示为 $r_{j,h}^\iota = \begin{bmatrix} \text{Re}(w_{j,h}^\iota)^\top & \text{Im}(w_{j,h}^\iota)^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{n_1 \times 2n_2}$, 其中, $j = 1, \dots, J$, $\iota = 1, \dots, p$, $h \in 3\text{DHSTF}$ 。记每张线圈的分辨率为 $n = n_1 \times n_2$, 使用二维向量 $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ 表示图像对应位置的数据值, 并记 $\tau' = (\tau_1, \tau_2 + n_2)$ 。由公式 (20), $w_{j,h}^\iota$ 中第 τ 个位置的正则化参数为 $\gamma_{j,h}^\iota(\tau)$ 。由上述记号, 模型的正则项的表达式如公式 (26) 所示。

$$\begin{aligned} \Phi_\Gamma(r_{j,h}^\iota) &= \sum_{j,\iota,\tau} \gamma_{j,h}^\iota(\tau) \sqrt{\text{Re}(w_{j,h}^\iota(\tau))^2 + \text{Im}(w_{j,h}^\iota(\tau))^2} \\ &= \sum_{j,\iota,\tau} \gamma_{j,h}^\iota(\tau) \sqrt{(r_{j,h}^\iota(\tau))^2 + (r_{j,h}^\iota(\tau'))^2} \\ &= \sum_{j,\iota,\tau} \varphi_{\lambda_{j,\iota,\tau}}(r_{j,h}^\iota(\tau), r_{j,h}^\iota(\tau')), \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $\varphi_\lambda(a, b) = \lambda\sqrt{a^2 + b^2}$ 。

由公式 (26) 可知, 模型的正则项本质上是多个二维向量的 ℓ_2 -范数的和, 由于每个 ℓ_2 -范数之间的变量相互独立, 因此, Φ_Γ 的邻近算子是可分的, 即通过对每个 ℓ_2 -范数的邻近算子做笛卡尔积得到 Φ_Γ 的邻近算子, 如公式 (27) 所示。

$$\text{prox}_p = \prod_{j,\iota,\tau,h} \text{prox}_{\varphi_{\lambda_{j,\iota,\tau,h}}(\cdot+c')}, \quad (27)$$

其中, 符号 \prod 表示笛卡尔积, $c' = \begin{bmatrix} \text{Re}(c_\tau) \\ \text{Im}(c_\tau) \end{bmatrix}$ 。由上述分析, 只需在二维空间求解函数 p 的邻近算子, 再使用笛卡尔积即可得到对应函数的邻近算子。为了方便后续计算, 对以下公式进行化简。

$$s = t - \delta\text{prox}_{\delta^{-1}\varphi_\lambda(\cdot+z)}(\delta^{-1}t), \quad (28)$$

其中, 为叙述方便, 约定 s, t, v, z 为二维向量。根据邻近算子的性质, 有

$$\begin{aligned}\text{prox}_{\delta^{-1}\varphi_\lambda(\cdot+z)}(v) &= \arg \min_{w+z} (\delta^{-1}\lambda\|w+z\|_2 + \frac{1}{2}\|w+z-(v+z)\|_2^2) - z \\ &= \text{prox}_{\delta^{-1}\varphi_\lambda}(v+z) - z,\end{aligned}$$

公式 (28) 化为 $s = (t + \delta z) - \delta \text{prox}_{\delta^{-1}\varphi_\lambda}(\delta^{-1}(t + \delta z))$ 。另外, 由 $\varphi_\lambda(v) = \delta \varphi_\lambda(\delta^{-1}v)$, 可得 $\text{prox}_{\varphi_\lambda}(v) = \delta \text{prox}_{\delta^{-1}\varphi_\lambda}(\delta^{-1}v)$, 代入公式 (28), 整理得

$$s = (t + \delta z) - \text{prox}_{\varphi_\lambda}(t + \delta z)$$

综上, 经过化简, PD3O 的迭代步骤如公式 (29)

$$\begin{cases} t^k = (I - \gamma \delta B B^\top) s^k + \delta B(x^k - \gamma \nabla f(x^k)), \\ s^{k+1} = (t^k + \delta c) - \text{prox}_{\Phi_\Gamma}(t^k + \delta c), \\ x^{k+1} = x^k - \gamma \nabla f(x^k) - \gamma B^\top s^{k+1}. \end{cases} \quad (29)$$

记 $t^k + \delta c$ 的紧框架系数为 $w_{j,h}^\ell \in \mathbb{R}^{n_1 \times 2n_2}$, $\text{prox}_{\Phi_\Gamma}(t^k + \delta c)$ 对应的系数为 $z_{j,h}^\ell \in \mathbb{R}^{n_1 \times 2n_2}$, 由 ℓ_2 -范数邻近算子的计算公式可得,

$$\begin{bmatrix} z_{j,h}(\tau) \\ z_{j,h}(\tau') \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma_{j,h}^\ell(\tau)}{\max\{\left\| \begin{bmatrix} w_{j,h}(\tau) & w_{j,h}(\tau') \end{bmatrix}^\top \right\|_2, \gamma_{j,h}^\ell(\tau)\}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w_{j,h}(\tau) \\ w_{j,h}(\tau') \end{bmatrix} \quad (30)$$

根据文献 [17] 的定理 1, PD3O 算法的收敛条件为 $\gamma < \frac{2}{L}$, 并且矩阵 $M = I - \gamma \delta B B^\top$ 为正定矩阵。其中, L 为利普西茨常数。由前文可知, $B = W A Q$ 。由紧框架变换的完美重建性质可知, $W^\top W = I$ 。由傅里叶变换可逆的性质可知, $A^\top A = I$ 。因此, 有

$$B^\top B = Q^\top A^\top W^\top W A Q = Q.$$

由于 Q 是对角线元素为 0 和 1 的对角矩阵, 因此,

$$\|B B^\top\|_2 = \|B^\top B\|_2 = \|Q\|_2 = 1.$$

要使 $M = I - \gamma \delta B B^\top$ 为正定矩阵, 只需保证 $\gamma \delta < 1$ 。综上, PD3O 算法的收敛条件为 $\gamma < \frac{2}{L}$ 和 $\gamma \delta < 1$ 。由于 $\nabla f(x) = Q^\top C^\top C(Qx + y)$, 因此, 对于利普西茨常数, 其上界可由以下的公式进行估计。

$$\begin{aligned}L &= \|C Q\|_2^2 = \|Q^\top C^\top C Q\|_2 = \|Q^\top (C - I)^\top (C - I) Q\|_2 \\ &\leq \|Q^\top\|_2 \cdot \|(C - I)^\top (C - I)\|_2 \cdot \|Q\|_2 \\ &\leq (\|C\|_2 + 1)^2.\end{aligned}$$

综上所述, 使用 PD3O 求解模型 (23) 的算法步骤如算法 4 所示。其中, 对于 $q \in \mathbb{R}^{2n}$, q_{re} 表示 q 的前 n 个元素所组成的 n 维向量, q_{im} 表示 q 的后 n 个元素所组成的 n 维向量。也就是说, $q_{re}(i) = q(i)$, $q_{im}(i) = q(i + n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

算法 4: 基于 ℓ_1 -3DHSTF 与 PD3O 的 pMRI 重建算法

输入: 参数 $\lambda, L, \gamma, \delta$, 欠采样数据 g

输出: pMRI 重建图像 \tilde{u}_{SoS}

```
1 初始化:  $y^1 = z = \begin{bmatrix} \text{Re}(g)^\top & \text{Re}(g)^\top \end{bmatrix}^\top$ ,  $s^1 = By^1$ 
2 for  $k = 1, 2, \dots$  do
3   计算  $t^k = (I - \gamma\delta BB^\top)s^k + \delta B(x^k - \gamma\nabla f(x^k))$ 
4   根据公式 (27) 和 (30) 计算  $s^{k+1} = (t^k + \delta c) - \text{prox}_{\Phi_\Gamma}(t^k + \delta c)$ 
5   计算  $x^{k+1} = x^k - \gamma\nabla f(x^k) - \gamma B^\top s^{k+1}$ 
6   当  $k = 1, 3, 5, 7, 9$  时, 根据公式 (20) 计算参数矩阵  $\Gamma$ 
7   当满足停止条件时, 退出循环,  $u = (u^k)_{re} + i(u^k)_{im}$ 
8 end
9 计算三维线圈图像:  $\tilde{u} = \mathcal{F}_p^{-1}(Qu + g)$ 
10 由公式 (22) 计算重建图像  $\tilde{u}_{SoS}$ 
```

5 实验结果分析

本文采用仿真实验的方式检验所实现算法的效果, 基本原理如图 5 所示。图 5(a) 为采样矩阵, 每一行的数值全为 0 或全为 1。图 5(b) 为全采样 k-空间数据经过 SoS 公式计算所得的参考图像。将采样矩阵与全采样 k-空间数据进行逐点相乘, 得到欠采样的 k-空间数据, 再经过 SoS 公式将欠采样数据生成 SoS 图, 如图 5(c) 所示。图 5 的第一行为 Phantom 数据的采样矩阵和对应的参考图像, 第二行为 Vivo 数据的采样矩阵和对应的参考图像。在图 5(a) 的样例中, 采样率为 20%。本文从上述过程得到的欠采样 k-空间数据出发, 应用前文所述的 pMRI 重建算法, 得到满足 k-空间数据一致性和三维紧框架约束的重建图像。

由于本文实验使用的数据与所复现论文的数据存在差异, 并且原文圈画的局部区域较难准确确定, 再考虑到重建算法的一个目标是减少重建图像的伪影, 因此, 本文通过人眼比较重建图像与参考图像的视觉差异, 以此作为复现效果的评判标准。对于本文实现的两种算法, 手动设置初始正则化参数 $\lambda = 0.055$ 。对于 ADMM 算法, 设置参数 $\rho = 1$, 求解 u -子问题的最大迭代次数为 5, 整个算法的最大迭代次数为 50。对于 PD3O 算法, 设置 $\gamma = \frac{1.99}{L}$, $\delta = \frac{1}{\gamma}$, 整个算法的最大迭代次数为 50。在上述实验设置下, 本文对 Phantom 数据和 Vivo 数据进行重建, 比较实现的 ADMM 和 PD3O 算法之间的重建效果, 并统计算法运行时间, 进而比较两种算法的时间性能。

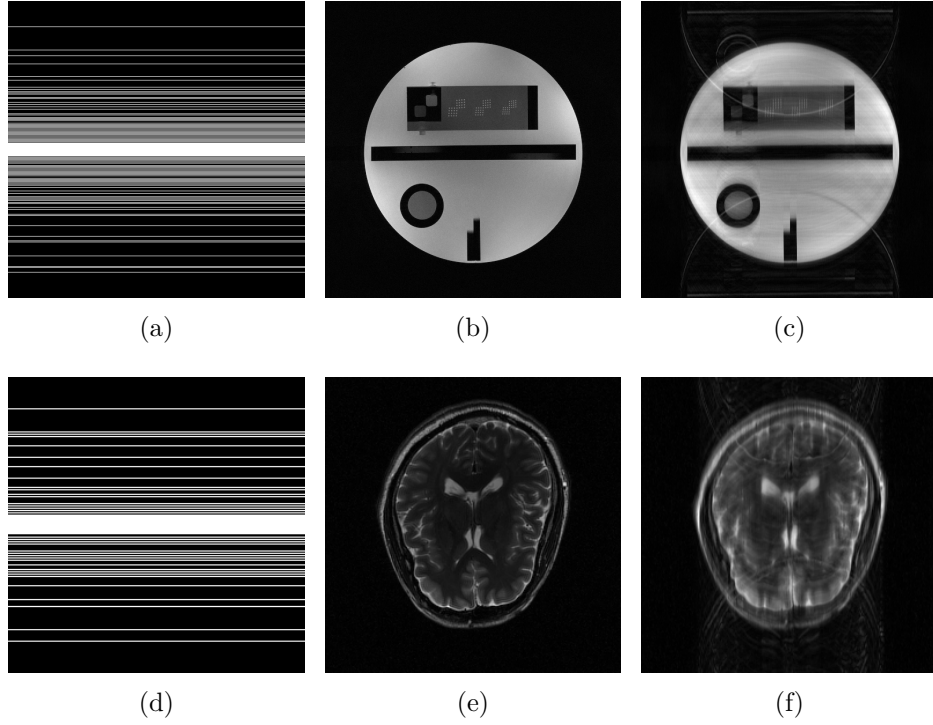


图 5. 仿真实验示意图 (a) 512×512 采样矩阵, (b)Phantom 数据参考图像, (c)Phantom 欠采样数据 SoS(20%), (d) 256×256 采样矩阵, (e)Vivo 数据参考图像, (f)Vivo 欠采样数据 SoS(20%)

Phantom 数据包含 4 个线圈的 k-空间数据, 每张线圈图像的分辨率为 512×512 , 其重建结果如图 6 所示, 其中, 图 6(a) 表示全采样数据经过 SoS 公式的计算所得参考图像, 图 6 每一列的第二行为图 6(a) 第一行白色方框划定区域的局部放大图。图 6(b)(c)(d) 分别表示欠采样 Phantom 数据所得 SoS 图、ADMM 算法重建图像和 PD3O 算法重建图像。将两种算法的重建结果与全采样参考图像进行对比, 可以发现, 图 6(c)(d) 与图 6(a) 在视觉上比较接近, 对比第二行的局部放大图像也可以看到, 算法重建结果和参考图像比较接近。另一方面, 将算法重建结果与 SoS 图进行对比, 图 6(b) 中存在的混叠伪影在图 6(c)(d) 中得到了很好的抑制, 因此, 对于 Phantom 数据, 本文所复现的 ADMM 算法和改进的 PD3O 算法在图像重建方面是有效的, 重建结果与参考图像在视觉上均比较接近, 并且能够抑制混叠伪影的产生。在算法运行时间方面, 本实验统计 ADMM 和 PD3O 算法重建 Phantom 数据的运行时间, 每种算法运行 10 次取平均值。其中, ADMM 算法所需运行时间为 169.85 秒, PD3O 算法所需运行时间为 129.18 秒, PD3O 算法所需运行时间比 ADMM 算法减少了 23.94%。可以看到, 本文对原论文的改进在时间性能的提升方面是有效的。

Vivo 数据包含 32 个线圈的 k-空间数据, 每张线圈图像的分辨率为 256×256 , 其重建结果如图 7 所示, 其中, 图 7(a) 表示全采样数据经过 SoS 公式的计算所得参考图像, 图 7 每一列的第二行为图 7(a) 第一行白色方框划定区域的局部放大图。图 7(b)(c)(d) 分别表示欠采样 Vivo 数据所得 SoS 图、ADMM 算法重建图像和 PD3O 算法重建图像。类似地, 将两种算法的重建结果与参考图像及相应的 SoS 图像进行比较, 可以发现, 图 7(c)(d) 与图 7(a) 在视觉上比较接近, 图 7(b) 中存在的混叠伪影在图 7(c)(d) 中得到了很好的抑制。因此, 对于 Vivo 数据, 本文所复现的 ADMM 算法和改进的 PD3O 算法在图像重建方面是有效的, 重建结果与参考图像在视觉上均比较接近, 并且能够抑制混叠伪影的产生。在算法运行时间方面, 使

用两种算法依次重建 Vivo 数据，ADMM 算法所需运行时间为 1330.68 秒，PD3O 算法所需运行时间为 414.88 秒。可以看到，当数据的维度较大时，PD3O 算法在时间性能上的提升更明显。

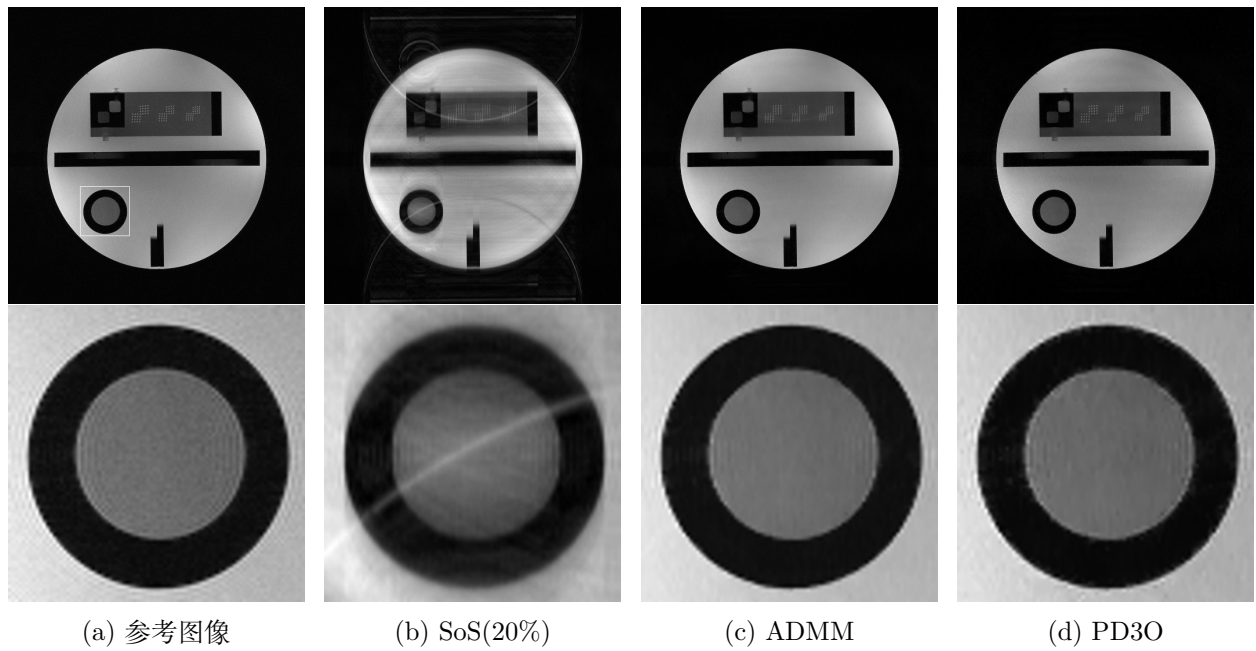


图 6. Phantom 数据重建结果对比图，第二行图像为第一行图像在特定区域的局部放大图

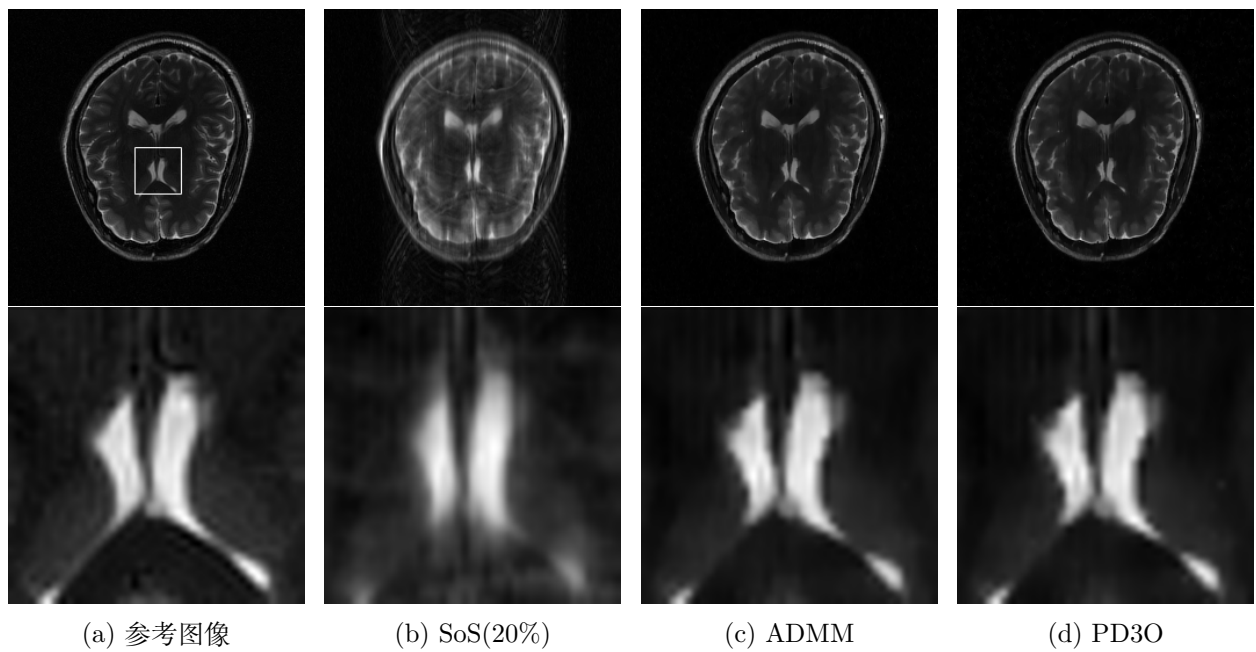


图 7. Vivo 数据重建结果对比图，第二行图像为第一行图像在特定区域的局部放大图

6 总结与展望

本文首先介绍了并行磁共振成像重建算法的研究背景和研究现状，结合基于 k -空间的 SPIRiT 模型和三维紧框架正则化技术，详细叙述了原作者提出的 pMRI 重建模型，并介绍了论文所使用的求解重建模型的 ADMM 迭代算法的算法步骤。之后引入 PD3O 算法改进原论文的重建算法。经过实验验证，本文复现的 ADMM 算法具有与原论文较为接近的重建效果，而改进的 PD3O 算法相较于原论文的算法，在时间性能上有一定程度的提升。

本文的不足在于实验不够充分，并且没有选择合适的指标在数值上度量重建效果。之后的研究将寻找合适的指标度量重建图像与参考图像的结构相似性，以更好地评判重建效果。另外，本文在算法求解上做了改进，还可以考虑在正则化参数方面进行改进，使得初始的正则化参数能够根据重建数据进行自适应调整。

参考文献

- [1] Mariya Doneva. Mathematical models for magnetic resonance imaging reconstruction: An overview of the approaches, problems, and future research areas. *IEEE Signal Processing Magazine*, 37(1):24–32, 2020.
- [2] Anagha Deshmane, Vikas Gulani, Mark A Griswold, and Nicole Seiberlich. Parallel mr imaging. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 36(1):55–72, 2012.
- [3] Klaas P Pruessmann, Markus Weiger, Markus B Scheidegger, and Peter Boesiger. Sense: sensitivity encoding for fast mri. *Magnetic Resonance in Medicine: An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine*, 42(5):952–962, 1999.
- [4] Robert L Morrison, Mathews Jacob, and Minh N Do. Multichannel estimation of coil sensitivities in parallel mri. In *2007 4th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*, pages 117–120. IEEE, 2007.
- [5] Mark A Griswold, Peter M Jakob, Robin M Heidemann, Mathias Nittka, Vladimir Jellus, Jianmin Wang, Berthold Kiefer, and Axel Haase. Generalized autocalibrating partially parallel acquisitions (grappa). *Magnetic Resonance in Medicine: An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine*, 47(6):1202–1210, 2002.
- [6] Michael Lustig and John M Pauly. Spirit: iterative self-consistent parallel imaging reconstruction from arbitrary k -space. *Magnetic resonance in medicine*, 64(2):457–471, 2010.
- [7] Lotfi Chaâri, Jean-Christophe Pesquet, Amel Benazza-Benyahia, and Philippe Ciuciu. A wavelet-based regularized reconstruction algorithm for sense parallel mri with applications to neuroimaging. *Medical image analysis*, 15(2):185–201, 2011.
- [8] Mark Murphy, Marcus Alley, James Demmel, Kurt Keutzer, Shreyas Vasanawala, and Michael Lustig. Fast ℓ_1 -spirit compressed sensing parallel imaging mri: scalable parallel

- implementation and clinically feasible runtime. *IEEE transactions on medical imaging*, 31(6):1250–1262, 2012.
- [9] Kerstin Hammernik, Teresa Klatzer, Erich Kobler, Michael P Recht, Daniel K Sodickson, Thomas Pock, and Florian Knoll. Learning a variational network for reconstruction of accelerated mri data. *Magnetic resonance in medicine*, 79(6):3055–3071, 2018.
 - [10] Bo Zhu, Jeremiah Z Liu, Stephen F Cauley, Bruce R Rosen, and Matthew S Rosen. Image reconstruction by domain-transform manifold learning. *Nature*, 555(7697):487–492, 2018.
 - [11] Amir Beck and Marc Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm with application to wavelet-based image deblurring. In *2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 693–696. IEEE, 2009.
 - [12] Bin Han. Framelets and wavelets. *Algorithms, Analysis, and Applications, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser xxxiii Cham*, 2017.
 - [13] Yan-Ran Li, Lixin Shen, and Xiaosheng Zhuang. A tailor-made 3-dimensional directional haar semi-tight framelet for pmri reconstruction. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 60:446–470, 2022.
 - [14] Daniel Gabay and Bertrand Mercier. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation. *Computers & mathematics with applications*, 2(1):17–40, 1976.
 - [15] Timothy Sauer. *Numerical analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, 2011.
 - [16] Neal Parikh, Stephen Boyd, et al. Proximal algorithms. *Foundations and trends® in Optimization*, 1(3):127–239, 2014.
 - [17] Ming Yan. A new primal–dual algorithm for minimizing the sum of three functions with a linear operator. *Journal of Scientific Computing*, 76:1698–1717, 2018.