

基于二次误差度量的变分三维重建

摘要

本文是对 Variational Shape Reconstruction via Quadric Error Metrics 工作 [28] 的复现，该工作受最初为网格抽取设计的二次误差度量优势的启发，提出了一种简洁的三维点云网格重建方法。该方法通过聚类富含二次误差度量的输入点来进行，其中每个聚类的生成器是其二次误差度量总和的最佳 3D 点。这种方法倾向于将生成器放置在尖锐的特征上，并倾向于在集群之间平均分配误差。从簇之间的邻接关系和带约束二元优化求解中重构输出曲面网格。该工作将提出的聚类过程与由误差驱动的自适应细化相结合。与现有技术相比，该方法避免了在简化之前的密集重建，并立即产生优化的网格。

关键词： 三维点云网格重建；二次误差度量；变分重建

1 引言



图 1. 变分形状重建。随机初始化点的聚类，然后交替分区和更新生成器。一些生成器在一次迭代后重新定位到尖锐的特征。然后添加新的生成器。聚类在五次迭代后收敛。从聚类之间的邻接性中导出一组候选边，并生成候选切面 (红色)。输出网格通过一个选择红色面子集的约束二进制求解器重建。[28]

网格重建由寻找一个网格表示，分段逼近一个三维表面的采样点构成。除了重建问题固有的不稳定性之外，几个困境见证了这个问题的困难，例如插值与近似，或者贪婪与变分方法。该工作专注于从非结构化且没有定向的每样本法向量的 3D 点云中进行简化的网格重建。此外，该工作的目标是通过低内存占用过程生成简洁的表面三角形网格，参见1。一种可能的解决方案是进行密集的网络重建，然后进行网络抽取，但瞬态内存消耗很大。如果要寻找诸如噪声恢复能力或孔洞填充等附加特征，则可以采用隐式重建，然后进行等面处理和网格抽取。然而，这个序列增加了另一个不一致，因为隐式重构引起的偏差是抽取步骤未知的，导致次优的复杂性-扭曲权衡。从粗到精的过程通常具有较低的内存占用，但是贪心 Delaunay 简化等方法会导致次优近似值。这需要一种从粗到精的变分方法。

另一个挑战来自于尖锐的特征。在物理世界中，没有什么东西是真正锋利的，当我们观

察精细的尺度时。然而，物理圆角（圆形边缘）在缩小到粗尺度时变得尖锐。在表面三角形网格中，任何不平坦的边缘或顶点都是尖锐特征，但边缘和顶点也用于近似光滑部分。换句话说，特征的清晰度取决于所选择的尺度或近似公差误差。由于该工作希望进行从粗到精的处理，这就排除了基于早期尖锐特征检测的方法。相反，该工作倾向于变分方法，其中从优化过程中产生尖锐特征。

选择复现该文章一方面是希望学习了解基于变分方法的网格重建流程，另一方面是认为该方法低内存占用的优点可能在机器人这种硬件条件有限制的应用领域发挥作用，同时该方法跳过了网格简化这一流程，可能在重建速度方面存在优势，但后续实验证明重建速度这一点并不出色。

2 相关工作

我们首先回顾网格重建问题，重点关注生成简化网格作为输出的方法。之后，我们将回顾二次误差度量及其变体的开创性工作，以及一些变分重建方法。

2.1 网格重建

Hoppe 等人开创了一种分段平滑重建方法 [12]，该方法输入密集的重建网格，并交叉抽取和优化以拟合细分表面。Digne 等人将形状重建表述为离散度量（视为狄拉克质量的点）和作为分段常数度量的支持的密集简单复体之间的最优传输问题，然后对其进行抽取 [8]。除了计算密集之外，这些从细到粗的方法与该工作希望以低内存成本进行从粗到细的过程的想法相矛盾。关于基于粗到细网格的方法的文献较少。Sahillioğlu 等 [19] 从物体的可见网格外壳出发，进行平滑和重构操作。Delaunay 细化方法是另一个从粗到精的范例 [5]，但对于上述两种方法，网格过于各向同性，无法提供所追求的简洁程度。

有大量文献提出了试图检测尖锐特征的方法，本文复现的工作寻求一种通过优化顶点位置来恢复尖锐特征的方法，以便在提供最佳近似的地方形成尖锐特征。已经提出了几种非线性回归方法来找到这样的最佳位置：例如，鲁棒隐式移动最小二乘曲面 (MLS) [18]，或鲁棒 MLS [9]。另一种方法是在重建前巩固点云，通过去除异常值、降低噪声和将一些点重新定位到尖锐特征上。Avron 等 [2] 首先解决一个全局稀疏最小化问题来巩固法线方向，然后在运行球旋转之前巩固点位置 [4]。Xu 等人 [25] 开创了一种多阶段方法，该方法可以去除噪声，通过离散的最佳传输识别特征线，并对合并的点云进行插值。重建后巩固网格也是一种选择。Attene 等 [1] 提出了一种被称为锐边器的方法。Wang 等 [24] 先去除离群点和噪声，再将合并后的点云输入泊松面重建 [13]。然后通过对重建的表面网格进行双边滤波恢复尖锐特征。Yadav 等 [26] 提出了另一种两阶段网格去噪算法。这些方法都很强大，但都需要在密集的网格上运行。几种基于学习的方法 [15]。Matveev 等人 [16] 最近提出了从原始点云中提取尖锐特征图的方法。

2.2 二次误差度量

Garland 和 Heckbert [10] 开创了一种网格抽取方法，该方法应用了一系列由所谓的二次误差度量 (QEM) 排序的边缘坍塌算子。QEMs 捕获三角形面支持平面的加权平方误差和。这个强大的想法已经成为网格抽取最流行的方法之一。Hoppe [11] 将这种方法扩展到处理颜色

和纹理。Deng 等 [7] 利用二次误差度量来构建用于形状编辑的笼。Thiery 等人 [22] 在 4D 中定义了一个球面二次误差度量，用于极端形状逼近。Salinas 等人 [20] 贡献了一种结构感知的变体，该变体将从输入网格中检测到的一组平面二次曲线添加到二次曲线中。Legrand 等人 [14] 提出了一种通过滤波二次曲线的网格平滑和聚类方法：通过由空间核和基于 qemrange 核组成的双边滤波器扩散二次曲线，在输入网格上定义一个滤波二次曲线场。根据滤波后的二次场估计出的关联分数，将网格顶点连接成树形结构，并对分支进行剪枝生成最终的聚类。Trettner 和 Kobbelt [23] 通过定义封闭形式的概率二次曲线扩展了 QEM 方法，以处理输入网格中的不确定性，提高对噪声和网格质量的恢复能力。

2.3 变分重建方法

Cohen-Steiner 等人 [6] 引入了变分形状近似 (VSA) 方法，该方法将任务表述为具有平面代理的离散变分分区问题。VSA 通过最小化三角形与平面代理之间制定的片面误差度量 (L^2 或 $L(2,1)$) 来优化连接的网格三角形集群。集群的数量通过四个操作符 (合并、分裂、添加、传送) 进行调整。最后的输出是由聚类划分得到的各向异性多边形网格。Skrodzki 等 [21] 将 VSA 应用于 3D 点集，并增加了一个切换算子以保证收敛性。Yu 和 Lafarge [27] 设计了一种柔性方法将 3D 点云划分为平面部分。从初始划分开始，通过插入、排除、转移、合并、分割五种算子对多目标函数进行优化，在保真度、复杂度和覆盖范围之间取得平衡。然后将优化后的分区输入到分段平面重建方法中 [3]。以上的聚类方法很强大，但是划分只解决了一半的问题，因为它仍然需要对通常由多边形元素组成的优化分区进行网格划分。交叉平面是一种选择，但它在数值上是不稳定的，正如 Zimmer 等人 [29] 已经观察到的自由曲面的平面面板化。分区的凹元素也阻碍了网格划分。通过基于动力学的方法采用体积分区是一种可靠的替代方案，但需要大量计算 [3]。从平面单元划分出发，我们采用了“圆锥”单元划分的对偶方法，即顶点与其相邻的平面单元进行划分，其中顶点位置通过对簇上的二次积分计算。

3 本文方法

3.1 二次误差估计

最初为网格简化设计的 QEM 方法利用网格三角形初始化每个顶点的二次曲面，方法是将每个顶点的 1 环相邻面上的平面二次曲面相加。我们首先基于局部法线和面积估计估计每个输入点的平面二次曲面，然后计算每个点的扩散二次曲面以捕获其局部几何形状。

用 P 表示输入的三维点云。用 p_i 表示带有法向 $n_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 的 $P \in \mathbb{R}^3$ 中的一个点。我们假设法向要么是从输入数据中读取，要么使用局部正态估计方法进行估计。因此法向不是必需的。我们计算 p_i 的平面二次误差为：

$$Q_{p_i} = (n_i^x, n_i^y, n_i^z, -n_i \cdot p_i^T)^T \cdot (n_i^x, n_i^y, n_i^z, -n_i \cdot p_i^T) \quad (1)$$

为了计算扩散二次曲面，我们首先需要为每个点定义一个邻域和支持区域。我们在默认情况下为这两个计算选择 K 最邻近 (KNN) 图。对点 p_i 的支持区域 a_i 面积估计为：

$$a_{p_i} = \frac{1}{2k^2} \cdot \left(\sum_{p_j | (p_j, p_i) \in KNN(P)} \|p_i - p_j\| \right)^2 \quad (2)$$

然后计算点 p_i 的扩散二次误差为:

$$Q_{v_i} = \sum_{p_j | (p_j, p_i) \in KNN(P)} a_{p_j} \cdot Q_{p_j} \quad (3)$$

这样的二次误差反映了局部几何形状和点密度的近似。图2描述了以两个点云的每个顶点为中心的估计扩散二次曲面，使用 3D 椭球体。每个椭球代表一个二次误差等值面，即具有相等误差的点的轨迹。二次曲线的中心实现了误差最小。直观地说，我们可以将椭球体分为三种主要类型: 煎饼、雪茄和球，分别对应光滑区域、弯曲折痕和角落。

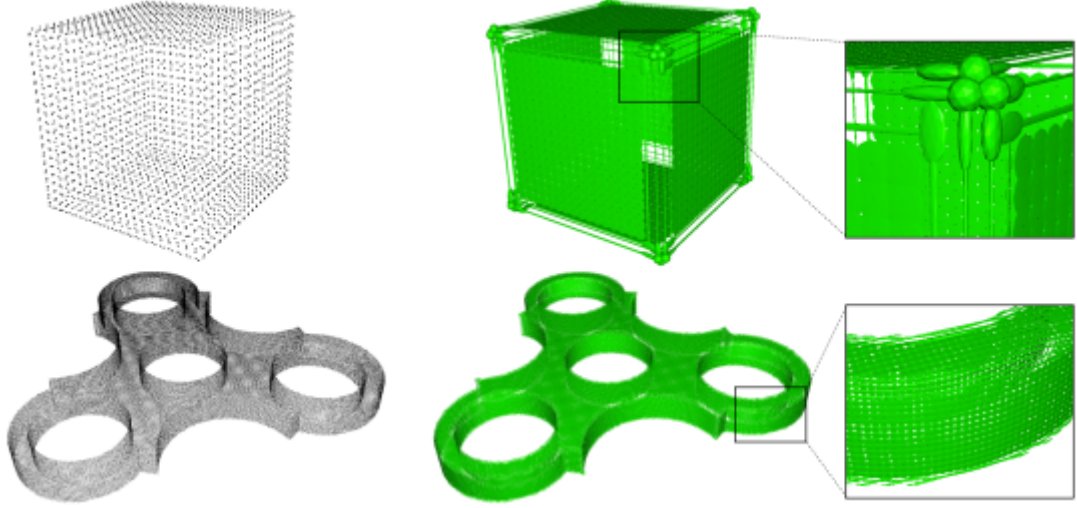


图 2. 两个输入点云上的二次误差椭球 [28]

上述估计假设在光滑表面上对点进行采样。初始化步骤是灵活的，还可以考虑作为输入的额外几何信息，例如通过多个局部平面二次曲线获得的尖锐特征信息。然而，我们的方法的优点是避免了不适定检测步骤，即使使用扩散二次曲面来缓和采样物理对象中存在的尖锐特征，也能恢复尖锐的折痕。

3.2 初始化

输入点的聚类是通过随机选择少量输入点 $\{c_i | 1 \leq i \leq m\}$ 作为初始聚类生成器来初始化的。初始化时，聚类中心与输入点重合，但之后不再是这种情况，因为它们将被更新为最优 QEM 的 3D 点。

3.3 聚类

聚类过程通过交替更新聚类分区和更新聚类中心来运行，直到集群稳定或达到最大迭代次数。

3.3.1 聚类分区

通过区域增长来实现的。更准确地说，在 KNN 图上，一个点一个点地贪婪地增长，优先级队列最小化成本结合 QEM 和欧几里得距离。向集群 l_i 中添加一个点 p_i 的开销为:

$$E(p_i, l_j) = [c_j, 1]^T \cdot Q_{v_i} \cdot [c_j, 1] + \lambda \cdot \|p_i - c_j\|^2 \quad (4)$$

式中 c_j 为聚类 l_j 的迭代中心, λ 为平面区域上生长的正则化区域的系数。默认设置为一个小值, 这样从粗到细的细化主要集中在最小化 QEM 误差上。使用这样的欧几里得距离项有三个原因:1) 通过竞争生长前沿来正则化平坦或直线区域的分区, 这样我们就可以获得类似 voronoi 的分区, 而不是嘈杂的邻接边界;2) 当这些区域被生成器密集分布时, 可以在平坦区域或沿着直线折线获得均匀分布的顶点;3) 为网格划分提供足够的候选边缘。为了使两个指标兼容, 我们设置为 k 乘以输入点云的平均间距的平方, 因为 Q_v 是由支持面积加权的平面二次平方之和计算的。

一旦一个点被加入到 l_j , 它在 KNN 图中所有未标记的邻居都被推到优先级队列中, 标签为 j 作为新的候选。这样的分区会一直进行, 直到队列为空为止。

注意, 在式4中, $Q_v \cdot [c_j, 1]$ 测量的误差是定向的, 即由聚类 l_j 的中心 c_j 对候选点的二次曲线进行生长实现的误差。考虑一个在完美立方体上采样的 3D 点集, 带有少量噪声。如果一个聚类在上述立方体的一个角上有一个生成点, 那么在邻近的三个面 (几乎是平坦的煎饼) 上采样的候选点的二次曲线, 以及在邻近的三个折痕 (如图3粉红色区域) 上采样的候选点的 (薄雪茄) 二次曲线的误差将非常小。当集群在立方体的一个折痕点上有一个生成器点, 但是有两个相邻的面和折痕时, 也会观察到类似的行为 (如图3绿色区域)。这种行为也类似于锥形的尖端, 因此我们在第3.1节中提到了锥形元素。

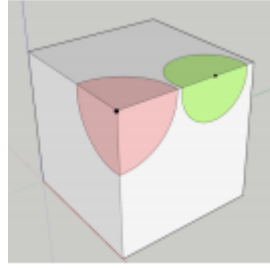


图 3. 区域生长导向示意

3.3.2 聚类中心更新

在这一步中, 每个聚类 l_j 的最优中心 c_j^* 被重新计算为:

$$c_j^* = \arg \min_{p \in \mathbb{R}^3} [p, 1]^T \cdot Q_{c_j} \cdot [p, 1] \quad (5)$$

更具体地说, c_j^* 是通过求解下面的线性系统得到的:

$$Ac^* = \begin{pmatrix} Q^{11} & Q^{12} & Q^{13} & Q^{14} \\ Q^{21} & Q^{22} & Q^{23} & Q^{24} \\ Q^{31} & Q^{32} & Q^{33} & Q^{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

当 A 不可逆时, c^* 通过 SVD 分解计算。

需要注意, 下一个聚类迭代时, 特别是它在 KNN 图上按区域增长进行划分的步骤, 要求每个更新的聚类中心 c_j^* 与 P 中的一个输入点相关联。因此, 每个聚类中心 c_j^* 与它在聚类 l_j 中最近的输入点相关联。只有最优中心 c_j^* 稍后用于构建输出表面三角形网格。当新旧生成器集之间没有变化时, 或者当达到用户选择的最大迭代次数时, 集群终止。

3.4 批分裂

一旦集群终止，将监视集群所有点的最大 QEM 误差。我们使用分裂算子，在集群中最大误差点插入一个新的聚类中心。更具体来说，对于每个聚类 l_j ，我们找到标记为 j 的点使 Q_{c_j} 最大化，即

$$p_{\max}(l_j) = \arg \max_{p_i \in l_j} [p_i, 1]^T \cdot Q_{c_j} \cdot [p_i, 1] \quad (7)$$

如果相应的 QEM 误差超过了用户定义的最大容忍度，则添加 $p_{\max}(l_j)$ 作为集群分裂的新候选。然后，我们贪婪地计算一组独立的要分割的集群，强制两个相邻的集群不能在同一个分割批中分割，以避免过度分裂。由于定义有意义的 QEM 误差并不直观，我们采用欧几里得距离误差参数，并根据这两个度量之间的关系将其转换为 QEM 尺度见 3.3 节。当所有簇都满足用户定义的误差容忍度或达到最大迭代次数时，分区和批分割之间的交替停止。

3.5 网格重建

集群的当前划分产生了一组在 QEM 意义上最优的顶点。剩下的就是通过寻找一组三角形切面来连接这些顶点。我们首先从聚类之间的邻接关系中导出边缘图，从中计算候选面片，然后求解约束二值规划 (constrained binary program, CBP) 以提取输出表面三角形网格。

边图：划分后，根据输入点的 KNN 图中聚类之间的邻接关系得到候选边图。

面片候选：给定上面的边图，我们通过选择所有由一条边相互连接的顶点的三联体来搜索图中的 3 个环。这产生了一组三角形面候选，可能在某些区域重叠。仍然需要选择这些方面的一个子集。

网格提取。从面片候选中，我们希望保留那些适合的，很好地覆盖输入 3D 点云的，并符合二维流形的网格。在 PolyFit 方法 [17] 的基础上，我们最小化一个目标函数，在二维流形约束下，奖励一个拟合项 F_f 和一个覆盖项 F_c 。更具体地说，我们为每个候选面片 f_i 分配一个二元标签 b_{f_i} ，为每个边 e_i ，分配一个二元标签 b_{e_i} 。标签为 1 表示为最终网格保留面或边，标签为 0 表示丢弃。然后最小化：

$$\max_{b_{f_1}, \dots, b_{f_n}} \sum_{i=1}^n b_{f_i} \cdot (F_f(f_i) + F_c(f_i)) \quad (8)$$

$$s.t. \quad 2b_{e_i} - \sum_{f_j \text{ around } e_i} b_{f_j} = 0 \quad (9)$$

拟合项：对于每个候选面，我们找到到三角形面的距离小于二次误差的所有输入点，并计算拟合项为：

$$F_f(f_i) = \sum_{p_j | d(p_j, f_j) < \epsilon} \left(1 - \frac{d(p_i, f_j)}{\epsilon}\right) \quad (10)$$

覆盖项：该项可以防止大三角形覆盖大面积空白区域。对于每个候选面片， ϵ 范围内的输入点被投影到其支持平面上。然后，我们构建一个 2D alpha 形状，alpha 设置为 s 乘以 P 的平均间距，并计算 alpha 形状三角形的总面积与面片面积之间的比率， s 默认值为 5。

$$F_c(f_i) = \min\left(1, \frac{\text{area}(\alpha(\{p_j | d(p_j, f_i) < \epsilon\}))}{\text{area}(f_i)}\right) \quad (11)$$

流形约束：为了输出网格满足二维流形，我们为每个边 e_i 添加了一个约束，如果求解器保留了这个边 ($b_{e_i} = 1$)，那么必须保留两个相邻的三角形，并且不保留任何其他使用改边的三角形（如式9）。

4 复现细节

4.1 与已有开源代码对比

原文作者没有在论文中公开代码，因此代码部分为我对于该工作的实现，由于没有原文实现进行对比，不确定我的实现是否达到最优效果，但从结果来看基本达到了原文的重建效果。

在实现第3.3.2节时，发现对于一些输入点云，其更新后的聚类中心不能保证依旧在点云表面附近，通过仔细分析该更新方法和实验，我认为该工作确实没有对更新后的点进行约束，导致该方法在通过估计得到法向的输入点云上，存在较大误差。这种现象在给定法向的点云上同样存在，但更新后离开平面的点更少。对于这个问题，我在更新分区时删除了没有任何实际点加入的聚类，这样做会导致聚类数量减少，但聚类数量会在之后的批分裂过程中得到补充，因此对于结果没有实际影响。这一点我猜测是原作者没有提及的 trick，另一方面也说明实际上该方法对于输入数据有较高的要求。

4.2 实验环境搭建

与原文所述相同，本实验使用了 CGAL 用于几何计算，Eigen 用于线性代数计算，SCIP 用于求解二值优化问题。原文运行于 2.9GHz 四核 Intel i7 CPU 和 16GB 内存的 MacBook Pro，我的实现运行于 2.4GHz Intel Xeon E5-2680 和 128G 内存的 Windows10 个人电脑上。使用 cmake 对项目进行配置，通过简单的 cmake 设置可以运行在大部分主流操作系统上。

5 实验结果分析

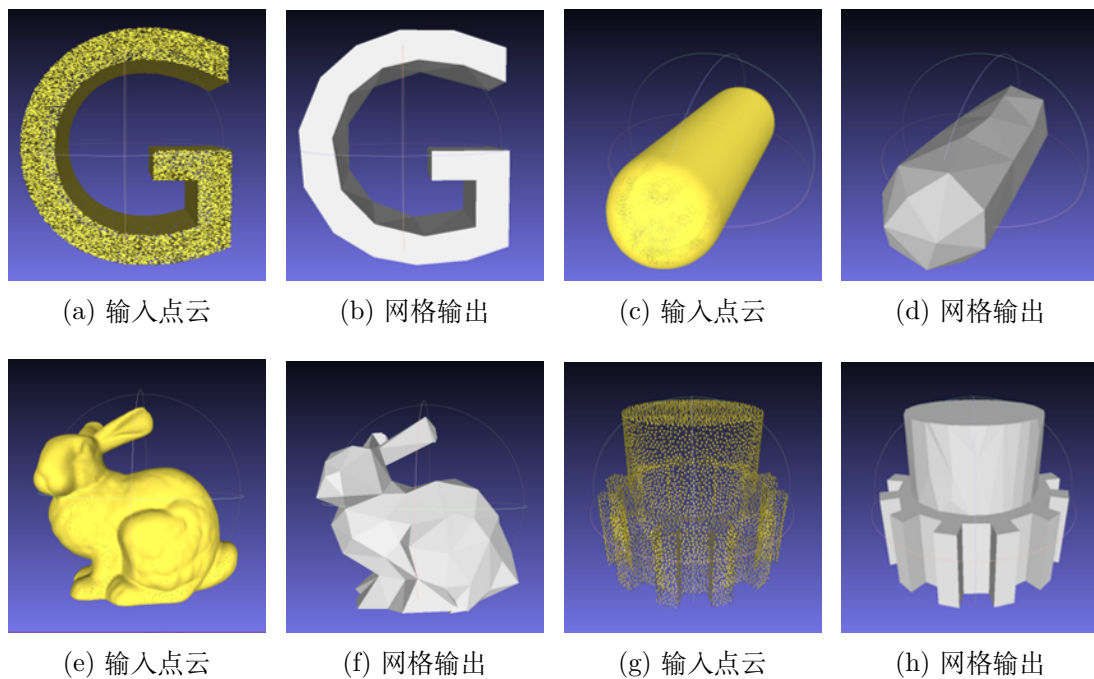


图 4. 复现该工作的结果, 一对结果中左边的为输入点云, 右边为输出的网格重建

如图4是我对于该工作复现的运行结果, 可以看出本方法在锐利特征的检测方面发挥较好, 其中齿轮零件这一案例重建的较好, 而对兔子的重建不够好, 不能重建一些光滑表面。这可能是该工作在 QEM 误差设计上就更加注重对锐利特征的区分, 没有过多考虑光滑平面, 而是使用多个锐利特征近似, 另一方面该工作的目的是输出简化后的网格, 对于较多特征的模型本来就应该使用更加复杂的网格模型进行表示。

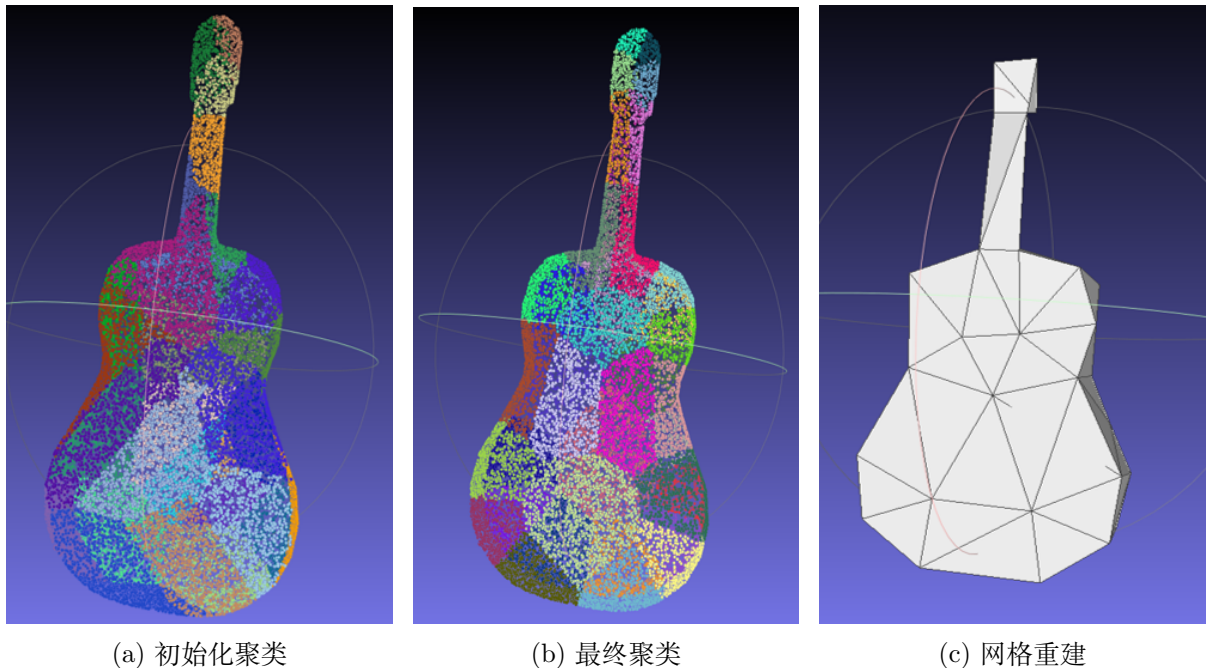


图 5. 吉他模型的重建过程

如图5是吉他模型的重建过程，从最终聚类效果可以看出，聚类能够按照 QEM 误差检测出大部分锐利特征，也在对称区域有对称的聚类，但是最终的重建结果中也能看出，由于聚类中心的微小误差，导致重建结果中琴体部分有面片重叠，为此我检查了原文工作，确实没有对面片重叠的约束。另外，琴头部分的重建效果也不够好，相比于琴体，琴头的特征更为密集，我认为这是由于两部分特征的尺度不同导致的，在相同的 QEM 误差容忍度下，该方法只能在相同尺度下检测特征，这导致细节部分的特征表示不足。

6 总结与展望

该工作提出了一种利用二次误差度量 (QEM) 和变分分区两个概念的优势的变分形状重建方法。该方法处理三维点云作为输入，并设计用于简化三角形网格的重建。大多数以前的变分方法在确定顶点之前优化平面元素，然后确定连接以形成三角形或多边形。由于优化误差通常涉及无限平面，单元可能是凹的，因此确定顶点和网格划分是困难的。该工作采用了一种双重方法，优化了簇的最优锥点的位置，然后将它们连接起来形成输出三角形网格。

在实验中发现该复现还有许多不足，未来需要进一步对于面片重叠的问题进行约束，以达到更好的重建效果。另一方面可能可以依据聚类中点的数量或其他指标，对重建的特征检测尺度进行调整，以适应不同细节粒度的模型。

参考文献

- [1] Marco Attene, Bianca Falcidieno, Jarek Rossignac, and Michela Spagnuolo. Edge-sharpener: recovering sharp features in triangulations of non-adaptively re-meshed surfaces. In *Symposium on Geometry Processing*, pages 62–69, 2003.

- [2] Haim Avron, Andrei Sharf, Chen Greif, and Daniel Cohen-Or. 1-sparse reconstruction of sharp point set surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 29(5):1–12, 2010.
- [3] Jean-Philippe Bauchet and Florent Lafarge. Kinetic shape reconstruction. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 39(5):1–14, 2020.
- [4] Fausto Bernardini, Joshua Mittleman, Holly Rushmeier, Cláudio Silva, and Gabriel Taubin. The ball-pivoting algorithm for surface reconstruction. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 5(4):349–359, 1999.
- [5] Ricard Campos, Rafael Garcia, Pierre Alliez, and Mariette Yvinec. Splat-based surface reconstruction from defect-laden point sets. *Graphical Models*, 75(6):346–361, 2013.
- [6] David Cohen-Steiner, Pierre Alliez, and Mathieu Desbrun. Variational shape approximation. In *ACM SIGGRAPH 2004 Papers*, pages 905–914. 2004.
- [7] Zheng-Jie Deng, Xiao-Nan Luo, and Xiao-Ping Miao. Automatic cage building with quadric error metrics. *Journal of Computer Science and Technology*, 26(3):538–547, 2011.
- [8] Julie Digne, David Cohen-Steiner, Pierre Alliez, Fernando De Goes, and Mathieu Desbrun. Feature-preserving surface reconstruction and simplification from defect-laden point sets. *Journal of mathematical imaging and vision*, 48:369–382, 2014.
- [9] Shachar Fleishman, Daniel Cohen-Or, and Cláudio T Silva. Robust moving least-squares fitting with sharp features. *ACM transactions on graphics (TOG)*, 24(3):544–552, 2005.
- [10] Michael Garland and Paul S Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. In *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 209–216, 1997.
- [11] Hugues Hoppe. New quadric metric for simplifying meshes with appearance attributes. In *Proceedings Visualization’99 (Cat. No. 99CB37067)*, pages 59–510. IEEE, 1999.
- [12] Hugues Hoppe, Tony DeRose, Tom Duchamp, Mark Halstead, Hubert Jin, John McDonald, Jean Schweitzer, and Werner Stuetzle. Piecewise smooth surface reconstruction. In *Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 295–302, 1994.
- [13] Michael Kazhdan, Matthew Bolitho, and Hugues Hoppe. Poisson surface reconstruction. In *Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing*, volume 7, page 0, 2006.
- [14] Hélène Legrand, Jean-Marc Thiery, and Tamy Boubekeur. Filtered quadrics for high-speed geometry smoothing and clustering. In *Computer Graphics Forum*, volume 38, pages 663–677. Wiley Online Library, 2019.

- [15] Yujia Liu, Stefano D’Aronco, Konrad Schindler, and Jan Dirk Wegner. Pc2wf: 3d wire-frame reconstruction from raw point clouds. *arXiv preprint arXiv:2103.02766*, 2021.
- [16] Albert Matveev, Ruslan Rakhimov, Alexey Artemov, Gleb Bobrovskikh, Vage Egiazarian, Emil Bogomolov, Daniele Panozzo, Denis Zorin, and Evgeny Burnaev. Def: Deep estimation of sharp geometric features in 3d shapes. *ACM Transactions on Graphics*, 41(4), 2022.
- [17] Liangliang Nan and Peter Wonka. Polyfit: Polygonal surface reconstruction from point clouds. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 2353–2361, 2017.
- [18] A Cengiz Öztireli, Gael Guennebaud, and Markus Gross. Feature preserving point set surfaces based on non-linear kernel regression. In *Computer graphics forum*, volume 28, pages 493–501. Wiley Online Library, 2009.
- [19] YUSUF Sahillioğlu and Yücel Yemez. Coarse-to-fine surface reconstruction from silhouettes and range data using mesh deformation. *Computer Vision and Image Understanding*, 114(3):334–348, 2010.
- [20] David Salinas, Florent Lafarge, and Pierre Alliez. Structure-aware mesh decimation. In *Computer Graphics Forum*, volume 34, pages 211–227. Wiley Online Library, 2015.
- [21] Martin Skrodzki, Eric Zimmermann, and Konrad Polthier. Variational shape approximation of point set surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 80:101875, 2020.
- [22] Jean-Marc Thiery, Émilie Guy, and Tamy Boubekeur. Sphere-meshes: Shape approximation using spherical quadric error metrics. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32(6):1–12, 2013.
- [23] Philip Trettner and Leif Kobbelt. Fast and robust qef minimization using probabilistic quadrics. In *Computer Graphics Forum*, volume 39, pages 325–334. Wiley Online Library, 2020.
- [24] Jun Wang, Z Yu, W Zhu, and J Cao. Feature-preserving surface reconstruction from unoriented, noisy point data. In *Computer Graphics Forum*, volume 32, pages 164–176. Wiley Online Library, 2013.
- [25] Rui Xu, Zixiong Wang, Zhiyang Dou, Chen Zong, Shiqing Xin, Mingyan Jiang, Tao Ju, and Changhe Tu. Rfeps: Reconstructing feature-line equipped polygonal surface. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 41(6):1–15, 2022.
- [26] Sunil Kumar Yadav, Ulrich Reitebuch, and Konrad Polthier. Robust and high fidelity mesh denoising. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 25(6):2304–2310, 2018.

- [27] Mulin Yu and Florent Lafarge. Finding good configurations of planar primitives in unorganized point clouds. In *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 6367–6376, 2022.
- [28] Tong Zhao, Laurent Busé, David Cohen-Steiner, Tamy Boubekeur, Jean-Marc Thiery, and Pierre Alliez. Variational shape reconstruction via quadric error metrics. In *ACM SIGGRAPH 2023 Conference Proceedings*, pages 1–10, 2023.
- [29] Henrik Zimmer, Marcel Campen, Ralf Herkrath, and Leif Kobbelt. Variational tangent plane intersection for planar polygonal meshing. In *Advances in architectural geometry 2012*, pages 319–332. Springer, 2013.