

自动投资组合优化的重加权相对价格跟踪系统

宋建增

摘要

本文提出了一种新的用于自动投资组合优化 (APO) 的重新加权价格相对跟踪 (RPRT) 系统。在价格预测阶段, 它根据每种资产的表现自动为相对价格的预测分配单独的权重, 这些权重也会自动更新。在投资组合优化阶段, 提出了一种具有广义增长因子的跟踪系统, 最大化下一时期的未来财富。此外, 本文设计了一种求解投资组合优化目标的高效算法, 该算法适用于大规模和有时间限制的情况。本文在不同资产、不同时间跨度的 6 个真实金融市场基准数据集上进行了广泛的实验。RPRT 在累积财富、平均超额回报、年度百分比收益和一些典型的风险指标方面优于其他最先进的系统。此外, 它可以承受相当大的交易成本, 并且运行速度快。这表明 RPRT 是一种有效的 APO 系统。

关键词: 自动投资组合优化 (APO)、广义增长因子、重新加权价格相对 (RPR)、跟踪系统

1 引言

自动投资组合优化 (APO) 旨在建立一个机器学习系统, 在多期投资期间自动优化来自真实金融市场的一组资产的投资组合。Kelly 投资 [1] 是一个被广泛关注的 APO 理论, 其原理是最大化投资组合的期望对数回报。随着机器学习技术的发展, 由于计算机可以坚持投资策略并处理大量信息, 人们开始建立自动投资组合管理系统, 以缓解非理性的人工投资行为。它对自动控制 [2]–[4]、机器学习 [5]–[7] 和人工智能 [8]–[11] 社区的一些最新进展具有启发性。建立决策系统是为了优化对有限资源的分配 [12]–[15]。APO 的过程可以看作是一个决策任务。APO 的主要思想是将投资和交易策略传递给控制系统, 实现对投资组合的自动管理。它根据一定的投资

原则选择投资组合，然后采取行动并观察结果，然后更新投资组合以保持最新的市场环境。APO 主要有三种方法：1) 模式匹配[16]，[17]；2) 趋势跟踪[18]– [20]；3) 趋势逆转[8]、[9]、[21]。

OLMAR 和 RMR 都利用均值回归原理，实现了最先进的投资表现。但可以进一步提高价格预测的自动化和自适应能力，进一步加强投资组合的优化。具体来说，OLMAR 对多变的金融环境适应性不足，其价格预测权重对不同资产是统一的，不能充分反映不同资产的具体情况。受此问题的启发，本文尝试寻找一种更具适应性的 APO 价格预测方法 RPRT，经过实验结果表明，RPRT 在 APO 中取得了比其他先进系统更好的性能。

我们的主要贡献可以概括如下。

- 1) 提出一种新的价格预测原理：重加权相对价格 (reweighted price relative, RPR)。
- 2) 提出了一种具有广义增长因子的跟踪系统来优化投资组合。
- 3) 开发 RPRT 目标的快速求解器，使其适用于大规模和有时间限制的情况。

2 相关工作

2.1 问题设置

假设金融市场上有 d 种资产。它们在第 t 个投资期结束时的收盘价被收集为价格向量 $\mathbf{p}_t \in \mathbf{R}_+^d$, $t = 0, 1, 2, \dots$, \mathbf{R}_+^d 表示 d 维非负数 simplex 空间。除了资产价格之外，另一个称为相对价格的概念为[18]：

$$\mathbf{x}_t = \frac{\mathbf{p}_t}{\mathbf{p}_{t-1}}, \mathbf{x}_t \in \mathbf{R}_+^d, t = 1, 2, 3 \dots$$

对于相同的资产索引，我们可以在 d 维 simplex 空间上定义一个投资组合向量：

$$\mathbf{b}_t \in \Delta_d: \{\mathbf{b} \in \mathbf{R}_+^d: \sum_{i=1}^d \mathbf{b}^{(i)} = 1\}$$

它表示在第 t 期开始时，总财富中投资于不同资产的比例。在本文中，我们假设不存在卖空行为，不存在借款行为，前期积累的财富全部用于这一时期的投资，这就产生了非负约束和等式约束。

在 t 时期结束时的累积财富 CW 我们用 S_t 来表示, 假设整个投资持续 n 期, 初始财富 $S_0 = 1$, 且不丧失一般性, 则 S_n 的演化为:

$$S_n = \prod_{t=1}^n (\mathbf{b}_t^T \mathbf{x}_t)$$

AP0 的目标是选择一个投资组合向量序列 $\{\mathbf{b}_t\}_{t=1}^n$, 能使 S_n 最大化:

$$\hat{S}_n = \max_{\{\mathbf{b}_t\}_{t=1}^n} \prod_{t=1}^n (\mathbf{b}_t^T \mathbf{x}_t)$$

2.2 相关 AP0 策略

1、Buy-and-Hold (BAH) 策略:

这是一种简单的长期投资策略, 投资者购买资产并持有它们, 无论市场如何波动, 通常是基于长期预期。BAH 策略侧重于长期投资, 投资者相信市场在长期内将呈现上涨趋势, 因此选择持有资产以从这一趋势中受益。该策略简单直接, 但并非适用于所有市场状况。在极端市场波动或下跌趋势中, 这种策略可能导致投资组合价值的较大下降。

2、Beststock (BS) 策略:

这种策略基于预测每个时期哪只股票的收益最高, 然后将投资组合调整为持有这只股票。在每个时期选择最佳股票, 有望实现最大化收益。侧重于挑选表现良好的资产。对股票表现的预测准确性有很高要求, 可能面临市场波动的风险。

3、Online Moving Average Reversion (OLMA) 策略:

该策略是一种基于移动平均回归的投资策略, 旨在利用资产价格与其移动平均值之间的关系来做出交易决策。这种策略通常是针对短期市场波动的, 试图从价格的短期偏离中获利。然而需要注意的是, 移动平均回归策略在趋势性市场中可能表现不佳, 因为它更适用于在价格围绕均值上下波动的情况。同时, 过度依赖历史表现可能导致未来表现的不确定性。

4、Robust Median Reversion (RMR) 策略:

一种基于中位数回归的投资策略。这种策略旨在利用资产价格相对于其历史中位数的偏离来做出交易决策。与均值回归策略不同, 中位数回归对异常值更具鲁棒性, 因为中位数不受极端值的影响。这种策略的优势在于其对异常值的鲁棒性, 相对于均值回归策略, 更能够在面对极端值或异常情况时保持稳健性。然而, 也需要注意在趋势性市场中可能表现不佳,

因为中位数回归更适用于价格在一定范围内波动的情况。

3 本文方法

均值回归是现实金融市场中常见且可预测的行为。它的基本思想是，未来资产价格倾向于逆转到某种历史平均水平。近年来，人们提出了 OLMAR 和 RMR 等最先进的 APO 方法，利用均值回归原理在许多情况下取得了良好的性能。然而，他们不能有效地适应变化的市场，这导致在某些情况下表现不佳。例如，EMA 使用统一的权重来处理不同资产的价格预测，这可能不适应真实的金融市场。为了进一步利用均值回归原理的自适应能力，我们提出了 RPRT 系统更灵活和自适应地预测价格相对，并通过一个具有广义增长因子的跟踪系统来优化投资组合。

3.1 重加权相对价格

RPR 方法在价格相对预测中为不同的资产分配单独的权值：

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} = \boldsymbol{\gamma}_{t+1} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\gamma}_{t+1}) \otimes \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}_t}{\mathbf{x}_t}, t > 1, \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 = \mathbf{x}_1$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1}$ 为新的价格相对预测值， \mathbf{x}_t 为当前投资期末的实际价格相对值。 $\boldsymbol{\gamma}_{t+1}$ 是权重向量，它也会随着时间的推移而更新[见图 1]。由于不同的资产具有不同的表现，并且表现会随着市场环境的变化而变化，因此 RPR 对相对价格的预测更加灵活和自适应。因此，RPR 可以看作是一种进一步利用均值回归原理的自适应 MA 方法。

Asset 1	1	$\times \gamma_{t+1}^{(1)}$	+	$\hat{\varphi}_t^{(1)} / x_t^{(1)}$	$\times (1 - \gamma_{t+1}^{(1)})$	=	$\hat{\varphi}_{t+1}^{(1)}$
Asset 2	1	$\times \gamma_{t+1}^{(2)}$		$\hat{\varphi}_t^{(2)} / x_t^{(2)}$	$\times (1 - \gamma_{t+1}^{(2)})$		$\hat{\varphi}_{t+1}^{(2)}$
Asset 3	1	$\times \gamma_{t+1}^{(3)}$		$\hat{\varphi}_t^{(3)} / x_t^{(3)}$	$\times (1 - \gamma_{t+1}^{(3)})$		$\hat{\varphi}_{t+1}^{(3)}$
Asset 4	1	$\times \gamma_{t+1}^{(4)}$		$\hat{\varphi}_t^{(4)} / x_t^{(4)}$	$\times (1 - \gamma_{t+1}^{(4)})$		$\hat{\varphi}_{t+1}^{(4)}$
Asset 5	1	$\times \gamma_{t+1}^{(5)}$		$\hat{\varphi}_t^{(5)} / x_t^{(5)}$	$\times (1 - \gamma_{t+1}^{(5)})$		$\hat{\varphi}_{t+1}^{(5)}$
Asset 6	1	$\times \gamma_{t+1}^{(6)}$		$\hat{\varphi}_t^{(6)} / x_t^{(6)}$	$\times (1 - \gamma_{t+1}^{(6)})$		$\hat{\varphi}_{t+1}^{(6)}$

图 1

关于 $\boldsymbol{\gamma}_{t+1}$ 的设定，我们希望充分利用历史信息和当前的市场环境，将其设置为：

$$y_{t+1}^{(i)} = \frac{\vartheta x_t^{(i)}}{\vartheta x_t^{(i)} + \hat{\varphi}_t^{(i)}}$$

其中， $\vartheta > 0$ 为混合参数，且 $0 < y_{t+1}^{(i)} < 1$ 。当 ϑ 较大时，实际价格相对增益对价格预测的影响更大，反之亦然。

在此方案中，如果资产实际上表现更好(具有较大的 $x_t^{(i)}$)，则 $y_{t+1}^{(i)}$ 变得更大，并且预测 $\hat{\varphi}_{t+1}^{(i)}$ 更接近于1。否则， $\hat{\varphi}_{t+1}^{(i)}$ 更接近 $\frac{\hat{\varphi}_t^{(i)}}{x_t^{(i)}}$ 。这表明 RPR 在实际业绩好坏时限制了过度乐观或过度悲观的预测，这与均值回归原理是一致的。它可以自动稳定价格预测过程。

3.2 重新加权相对价格跟踪系统

在对未来价格进行预测后，根据一个标准对投资组合进行优化。本文提出的准则是一个跟踪系统，它重置与潜在资产价格结果成正比的优化方向。它把更多的财富投资于可能表现良好的资产，而把较少的财富投资于可能表现不佳的资产。一个简单的跟踪系统的例子是：

$$\hat{\mathbf{b}}_{t+1} = \hat{\mathbf{b}}_t + \Delta \mathbf{b}_{t+1}, \Delta \mathbf{b}_{t+1} = \frac{\hat{\varphi}_{t+1}}{\|\hat{\varphi}_{t+1}\|}$$

实际上，很容易看出， $\hat{\mathbf{b}}_{t+1}$ 是以下有约束的优化问题：

$$\hat{\mathbf{b}}_{t+1} = \underset{\mathbf{b}}{\operatorname{argmax}} \mathbf{b}^T \hat{\varphi}_{t+1} \quad \text{s.t.} \|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}_t\|^2 \leq 1$$

代替单纯的增加因子 $\mathbf{b}^T \hat{\varphi}_{t+1}$ ，我们提出一个广义的增加因子如下：

$$(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}_t)^T \mathbf{D}_{t+1} (\hat{\varphi}_{t+1} - \bar{\varphi}_{t+1} \mathbf{1}), \quad \bar{\varphi}_{t+1} = \hat{\varphi}_{t+1}^T \mathbf{1} / d$$

其中 \mathbf{D}_{t+1} 是一个正定对称矩阵，可以提高广义增长因子的自适应性，而 $\bar{\varphi}_{t+1}$ 是所有资产的平均价格相对预测。

$(\hat{\varphi}_{t+1} - \bar{\varphi}_{t+1} \mathbf{1})$ 可以看作是标准化的价格相对预测。这样， $(\hat{\varphi}_{t+1} - \bar{\varphi}_{t+1} \mathbf{1})$ 的某些元素是正的(或负的)，这表明相应的资产具有良好(或不良)的增长能力。同样，以当前

投资组合为中心， $(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}_t)$ 可以看作是一个归一化的投资组合预测。因此，广义的增加因子(16)可以看作是一个内积。 \mathbf{D}_{t+1} 的作用是调整不同资产的相对影响。由于广义的增加因子不能任意大，因此将约束推广到优化中，从而得到整个 RPRT 投资组合的优化：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_{t+1} = \underset{\mathbf{b} \in \Delta_d}{\operatorname{argmax}} \quad & \left(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}_t \right)^T \mathbf{D}_{t+1} (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} - \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} \mathbf{1}) \\ \text{s.t.} \quad & (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}_t)^T (\mathbf{D}_{t+1}^{-1})^2 (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}_t) \leq \frac{[(\epsilon - \hat{\mathbf{b}}_t^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1})^+]^2}{\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} - \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} \mathbf{1}\|} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{D}_{t+1} = \operatorname{diag}(\hat{x}_{SMA,t+1})$ 。

4 复现细节

4.1 与发布的源代码进行比较

目前并无相关的源代码可供参考。我的工作主要包括以下几个方面：

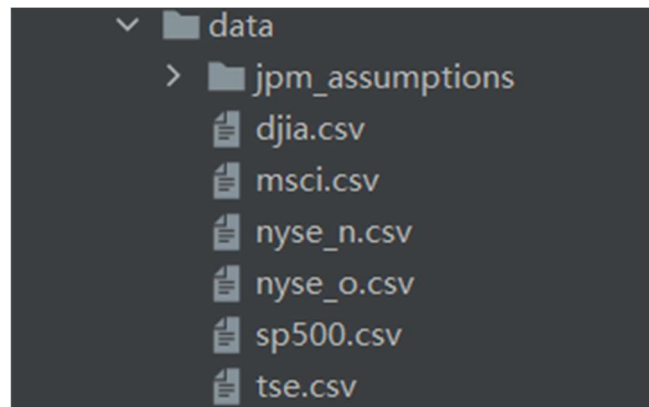
- (1) 根据论文提供的公式对公式进行复现，设计 RPRT 算法。
- (2) 收集论文进行实验的六个数据集，进行数据清理。
- (3) 在六个公开数据集上进行了广泛的实验，展示了 RPRT 策略相对于其他四种策略（原文进行对比的算法中代码实现开源的算法）的优势，包括最先进的策略。

4.2 实验环境搭建

编译器：PyCharm 2021.1.3 x64

版本：Python3.9

数据集：



SUMMARY OF SIX BENCHMARK DATASETS

Dataset	Type	Region	Time	Days	Assets
NYSE(O)	Stock	US	3/7/1962 ~ 31/12/1984	5651	36
NYSE(N)	Stock	US	1/1/1985 ~ 30/6/2010	6431	23
DJIA	Stock	US	14/1/2001 ~ 14/1/2003	507	30
MSCI	Index	Global	1/4/2006 ~ 31/3/2010	1043	24
SP500	Stock	US	2/1/1998 ~ 31/1/2003	1276	25
TSE	Stock	CA	4/1/1994 ~ 31/12/1998	1259	88

4.3 主要代码设计

$$\hat{\varphi}_{t+1} = \gamma_{t+1} + (1 - \gamma_{t+1}) \otimes \frac{\hat{\varphi}_t}{\mathbf{x}_t}, \quad t \geq 1. \quad \hat{\varphi}_1 = \mathbf{x}_1.$$

```
phi_pred = gamma_pred + np.multiply(
    1 - gamma_pred, np.divide(last_phi, last_price_relative)
)
```

$$\gamma_{t+1}^{(i)} = \frac{\vartheta \mathbf{x}_t^{(i)}}{\vartheta \mathbf{x}_t^{(i)} + \hat{\varphi}_t^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

```
gamma_pred = (
    self.theta
    * last_price_relative
    / (self.theta * last_price_relative + last_phi)
)
```

$$\mathbf{b}_{t+1} = \hat{\mathbf{b}}_t + \hat{\lambda}_{t+1} \mathbf{D}_{t+1} (\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} - \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} \mathbf{1}).$$

```
b_ = b + lam * np.dot(D_pred, (phi_pred - phi_pred_mean))
```

$$\hat{\lambda}_{t+1} = \frac{(\epsilon - \hat{\mathbf{b}}_t^\top \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1})^+}{\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} - \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} \mathbf{1}\|^2}. \quad \text{If } \|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} - \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{t+1} \mathbf{1}\|^2 = 0, \hat{\lambda}_{t+1} = 0.$$

```
if np.linalg.norm(phi_pred - phi_pred_mean) ** 2 == 0:
    lam = 0
else:
    lam = max(
        0.0,
        (self.eps - np.dot(b, phi_pred))
        / np.linalg.norm(phi_pred - phi_pred_mean) ** 2,
    )
```

更新投资组合 \mathbf{b}_{t+1} :

```
def update(self, b, phi_pred, D_pred):
    # Calculate variables
    phi_pred_mean = np.mean(phi_pred)

    if np.linalg.norm(phi_pred - phi_pred_mean) ** 2 == 0:
        lam = 0
    else:
        lam = max(
            0.0,
            (self.eps - np.dot(b, phi_pred))
            / np.linalg.norm(phi_pred - phi_pred_mean) ** 2,
        )

    # update portfolio
    if lam != 0: # avoid numerical problem (0 * inf)
        b_ = b + lam * np.dot(D_pred, (phi_pred - phi_pred_mean))
    else:
        b_ = b

    b_ = np.clip(b_, -1e10, 1e10) # 对数组进行数值修建

    # project it onto simplex
    return tools.simplex_proj(y=b_)
```


5 实验结果分析

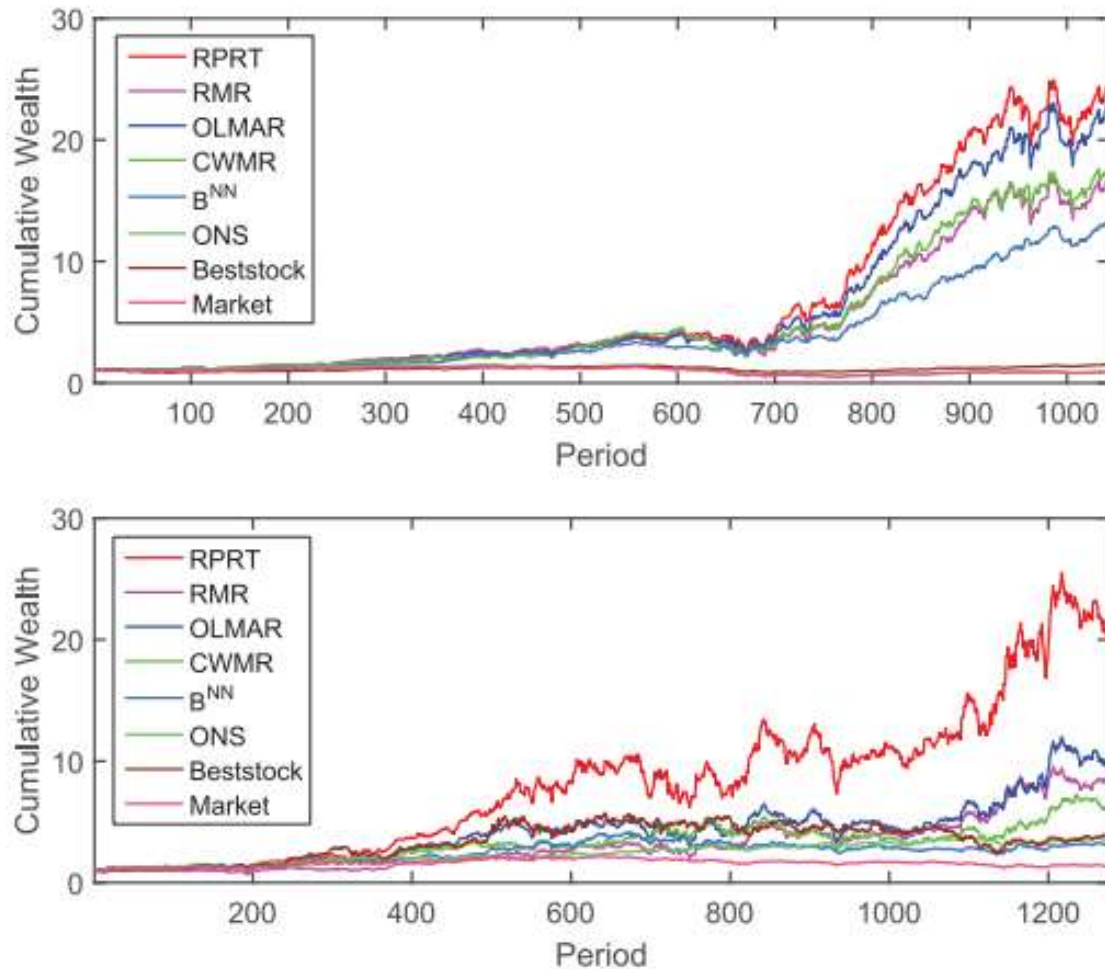
原文使用了七个不同的策略与之进行对比实验，各个策略的运行时间如表 1:

TABLE I
COMPUTATIONAL COMPLEXITY ANALYSIS OF DIFFERENT SYSTEMS

System	Computational Complexity
Market	$O(d + n)$
Beststock	$O(dn)$
ONS[20]	$O(d^3n)$
B^{NN} [17]	$O(dn^2)$
CWMR[21]	$O(dn)$
OLMAR	$O(dn)$
RMR	$O((M + 1)dn)$
RPRT	$O(d^2n)$

由于未找到其他算法的开源代码，在复现中只对 RMR、OLMR、BNN 和 CWMR 算法进行比较。

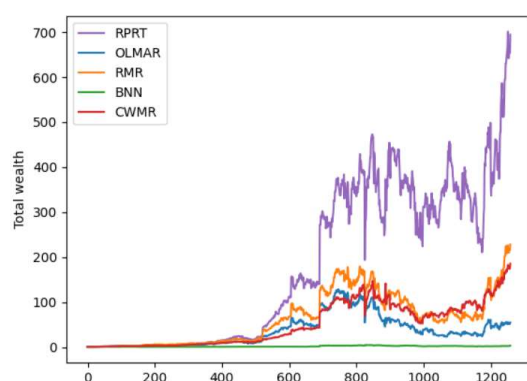
原文实验结果:



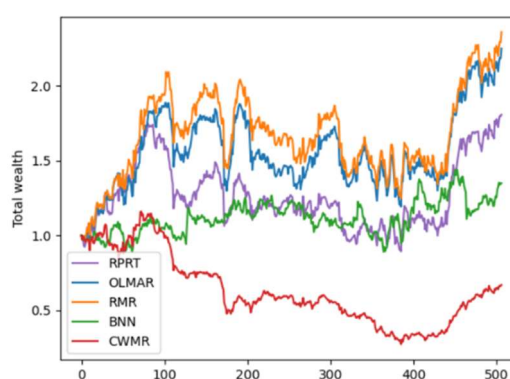
FINAL CWS OF DIFFERENT SYSTEMS ON SIX BENCHMARK DATASETS

System	NYSE(O)	NYSE(N)	DJIA	MSCI	SP500	TSE
Market	14.4973	18.0565	0.7644	0.9064	1.3416	1.6129
Beststock	54.1404	83.5067	1.1884	1.5040	3.7792	6.2792
ONS	109.1892	21.5860	1.5330	0.8560	3.3417	1.6155
B^{NN}	$3.2253E+11$	$6.7756E+04$	0.8862	13.4585	3.0686	2.2398
CWMR	$6.4857E+15$	$1.4113E+06$	0.6871	17.2813	5.9533	332.6200
OLMAR	$1.0220E+18$	$4.6881E+08$	1.1611	22.5138	9.5945	732.4399
RMR	$1.6394E+17$	$3.2477E+08$	2.6682	16.7608	8.2800	181.3437
RPRT	1.2754E+18	6.2527E+08	1.8788	24.0802	20.4835	783.9310

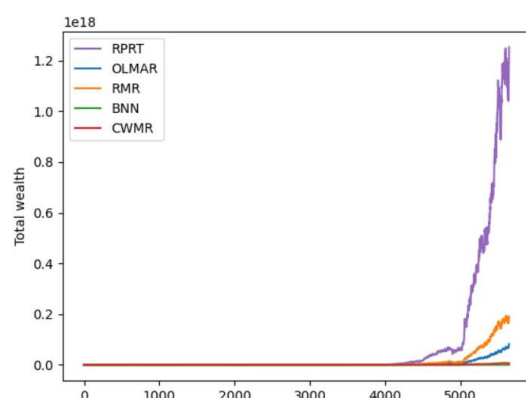
复现结果:



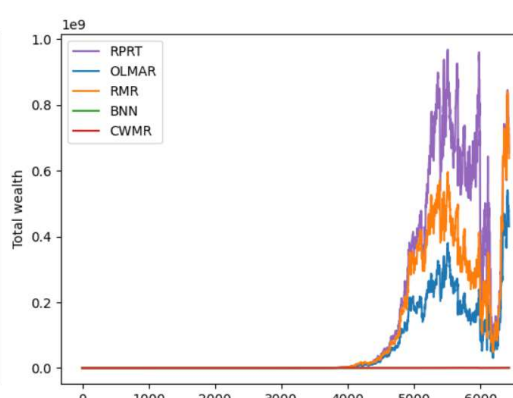
TSE



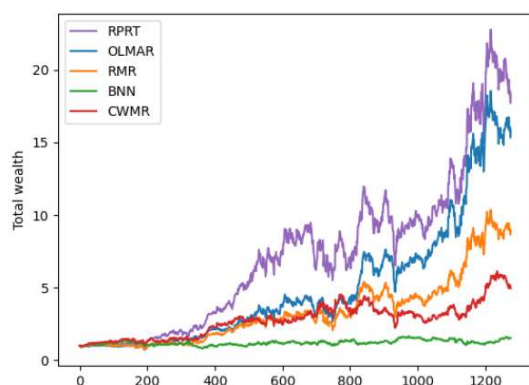
DJIA



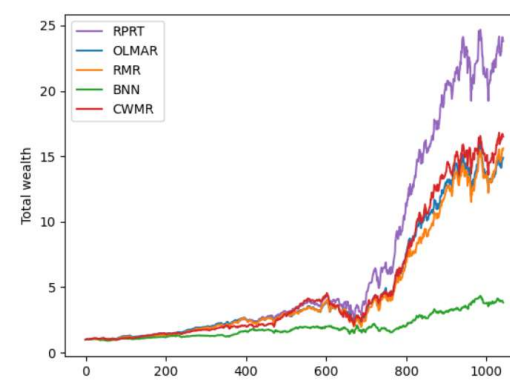
NYSE_O



NYSE_N



SP500



MSCI

System	NYSE(O)	NYSE(N)	DJIA	MSCI	SP500	TSE
BNN	1087.2664	424.2904	1.3491	3.8248	1.5276	3.3118
CWMR	5.1735e+15	1.0973e+06	0.6737	14.8901	4.9558	186.8060
OLMAR	8.2168e+16	4.3028e+08	2.2502	14.8971	15.8293	54.9387
RMR	1.9042e+17	6.3788e+08	2.3602	15.6090	8.9262	228.2893
RPRT	1.2530e+18	6.5463e+08	1.8074	23.8096	18.2836	694.5788

最终累积财富收益

由图表可以清晰得看到，按照原文复现的 RPRT 虽然与原文的 RPRT 算法所测得的各项数据有一定的偏差，但复现的结果同样可以得出，除了在 DJIA 数据集上的表现不是第一外，在其他五个数据集上的累积财富都是最大的，证明 RPRT 是优于其他算法的。

6 总结与展望

本文提出了一种新的 APO --RPRT 系统。以往的投资组合优化研究将投资和交易策略引入到控制系统中，以自动管理现实金融市场中的投资组合。然而，为了提高投资绩效，系统的自动化、适应性和投资组合优化还可以进一步提高。RPRT 分两个阶段解决这些问题。在价格预测阶段，以往的 APO 系统对不同的资产赋予统一的权重，由于不同的资产具有不同的投资绩效，适应性较差。与此策略不同的是，RPRT 根据每个资产的表现自动为价格相关性分配单独的权重。权重也会随着投资过程自动更新。在投资组合优化阶段，RPRT 通过最大化一个广义增长因子来跟踪潜在的价格结果。通过这种方式，更多的财富被投资于表现更好的资产。

参考文献

- [1] J. L. Kelly, "A new interpretation of information rate," Bell Syst. Tech. J., vol. 35, no. 4, pp. 917–926, Jul. 1956.
- [2] G. Pola and G. Pola, "A stochastic reachability approach to portfolio construction in finance industry," IEEE Trans. Control Syst. Technol., vol. 20, no. 1, pp. 189–195, Jan. 2012.
- [3] J. He, Q.-G. Wang, P. Cheng, J. Chen, and Y. Sun, "Multi-period meanvariance portfolio optimization with high-order coupled asset dynamics," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 60,

no. 5, pp. 1320–1335, May 2015.

- [4] X. Cui, X. Li, and D. Li, “Unified framework of mean-field formulations for optimal multi-period mean-variance portfolio selection,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 59, no. 7, pp. 1833–1844, Jul. 2014.
- [5] S. Raudys, “Portfolio of automated trading systems: Complexity and learning set size issues,” *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, vol. 24, no. 3, pp. 448–459, Mar. 2013.
- [6] L. Yang, R. Couillet, and M. R. McKay, “A robust statistics approach to minimum variance portfolio optimization,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 63, no. 24, pp. 6684–6697, Dec. 2015.
- [7] Q. Liu, C. Dang, and T. Huang, “A one-layer recurrent neural network for real-time portfolio optimization with probability criterion,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 43, no. 1, pp. 14–23, Feb. 2013.
- [8] B. Li, S. C. H. Hoi, D. Sahoo, and Z.-Y. Liu, “Moving average reversion strategy for on-line portfolio selection,” *Artif. Intell.*, vol. 222, pp. 104–123, May 2015.
- [9] D. Huang, J. Zhou, B. Li, S. C. H. Hoi, and S. Zhou, “Robust median reversion strategy for online portfolio selection,” *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, vol. 28, no. 9, pp. 2480–2493, Sep. 2016.
- [10] E. Vercher and J. D. Bermúdez, “A possibilistic mean-downside riskskewness model for efficient portfolio selection,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 21, no. 3, pp. 585–595, Jun. 2013.
- [11] T. T. Nguyen, G. B. Lee, A. Khosravi, D. Creighton, and S. Nahavandi, “Fuzzy portfolio allocation models through a new risk measure and fuzzy Sharpe ratio,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 23, no. 3, pp. 656–676, Jun. 2015.
- [12] R. Carli, M. Dotoli, R. Pellegrino, and L. Ranieri, “A decision making technique to optimize a buildings’ stock energy efficiency,” *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Syst.*, vol. 47, no. 5, pp. 794–807, May 2017.
- [13] B. Ge, K. W. Hipel, L. Fang, K. Yang, and Y. Chen, “An interactive portfolio decision analysis approach for system-of-systems architecting using the graph model for conflict resolution,” *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Syst.*, vol. 44, no. 10, pp. 1328–1346, Oct. 2014.
- [14] J. Li, G. Liu, C. Yan, and C. Jiang, “Robust learning to rank based on portfolio theory and

Amosa algorithm,” *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Syst.*, vol. 47, no. 6, pp. 1007–1018, Jun. 2017.

- [15] M. Clemente, M. P. Fanti, G. Iacobellis, M. Nolic, and W. Ukovich, “A decision support system for user-based vehicle relocation in car sharing systems,” *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Syst.*, to be published.
- [16] L. Györfi, G. Lugosi, and F. Udina, “Nonparametric kernel-based sequential investment strategies,” *Math. Finance*, vol. 16, no. 2, pp. 337–357, Apr. 2006.
- [17] L. Györfi, F. Udina, and H. Walk, “Nonparametric nearest neighbor based empirical portfolio selection strategies,” *Stat. Decis.*, vol. 26, no. 2, pp. 145–157, 2008.
- [18] T. M. Cover, “Universal portfolios,” *Math. Finance*, vol. 1, no. 1, pp. 1–29, Jan. 1991.
- [19] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*. New York, NY, USA: Wiley, 1991.
- [20] A. Agarwal, E. Hazan, S. Kale, and R. E. Schapire, “Algorithms for portfolio management based on the Newton method,” in *Proc. 23rd Int. Conf. Mach. Learn.*, 2006, pp. 9–16.
- [21] B. Li, S. C. H. Hoi, P. Zhao, and V. Gopalkrishnan, “Confidence weighted mean reversion strategy for online portfolio selection,” *ACM Trans. Knowl. Disc. From Data*, vol. 7, no. 1, p. 4, Mar. 2013.