

Reconstructing higher-order interactions in coupled dynamical systems 复现报告

摘要

文中提出一种基于优化的方法推断复杂系统的高阶相互作用，且适用于一般的连续状态动力学情况，即节点变量不限于二值和二阶单纯复形。本人在复现之余，研究不同方法对重建效果的影响以及随机噪声对模型稳定性的影响。

关键词：复杂网络；单纯复形；超图；参数识别

1 引言

高阶相互作用存在于生态系统中，其中两个物种的相互作用方式可能受到第三个物种的影响 [1]，在社会系统中，三个或更多个体的群体自然发生相互作用 [2]，在脑皮层 [3] 中，以及许多其他复杂系统 [4]。最近基于单纯复形 [5], [6] 和超图 [7] 等数学工具的研究已经证明，存在高阶交互的动力学可能与交互完全成对的系统动力学截然不同 [2], [8–11]。

2 相关工作

如何推断和建模高阶交互作用对于理解复杂系统的动力学和功能至关重要 [12, 13]。虽然在复杂网络中，有构造问题即从系统的动力学中确定网络，已经不同的处理技术 [14]，但是在存在高阶交互的情况下如何推断连接性的问题仍然悬而未决。

2.1 复杂网络中的重构方法

关于复杂网络中的重建，已经开发了两种不同类型的方法，分别针对系统的功能或结构连接性 [14]。功能连接性解释了由于动态交互而在网络单元之间形成的统计依赖关系。因此，它可能取决于系统的功能和状态，并且同一物理系统可能会根据其运行的动态状态显示不同的功能连接性。相反，结构连接表示系统的各个单元如何相互物理交互。功能网络通常是通过评估统计相似性测量 [15]、格兰杰因果关系 [16, 17] 或不同网络单元的信号之间的传递熵 [18, 19] 或使用贝叶斯推理方法 [20] 从网络时间演变中构建的。相反，当节点动力学的功能形式已知时，网络的底层结构连接可以从网络对外部扰动的响应 [21]、与包含自适应链接的副本同步 [22, 23] 或从基于节点时间序列测量的优化问题的解决方案中获得 [24–26]。

2.2 高阶相互作用的重构方法

在存在高阶交互作用的情况下，重建问题更加复杂。最近，已经指出了高阶机制（即在相互作用的微观结构中存在高阶项）与高阶行为（即在系统的动力学行为中出现高阶相关性）之间的根本区别 [27]。这两者之间的关系并非微不足道，因为高阶行为不一定依赖于高阶机制。例如，由于网络的特殊结构，而不是由于真正的三体交互的存在，三节点相关性甚至可以出现在仅具有成对交互的系统中。但是，为了识别高阶交互作用，需要超越成对统计的技术。

例如，基于超图 [28]、高阶可预测性度量（如格兰杰因果关系的推广和部分信息分解） [29] 或简单过滤程序 [30] 来研究多变量时间序列（节点活动）的信息论方法，以提取有关高阶行为的重要信息，否则这些信息将对标准（即基于网络的分析工具）不可见。

高阶行为可能是由于高阶机制的优先性，可以通过最近引入的技术来识别，以评估某些超链接的统计意义 [31,32]。解决该问题的其他统计方法基于贝叶斯方法，并已用于直接从成对测量（链接活动）构建超图，即使在没有明确编码高阶交互的情况下也是如此 [33,34]。统计推断和期望最大化也是最近开发的一种方法的基础，该方法用于重建单纯复形上的 SIS 传播和 Ising 中的高阶交互机制具有 2 和 3 自旋交互的哈密顿量 [35]。但是，此方法只能应用于离散双态动力学模型生成的二进制时间序列数据。

3 本文方法

3.1 本文方法概述

本文通过多次采样和向量化，将复杂网络高阶相互作用的重建问题转化为线性方程组的求解问题，极大降低问题的复杂性，可通过多种方法进行求解方程组以重建复杂网络。

3.2 公式推导

考虑高阶相互作用的 N 个节点动力系统的一般模型：

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{d=1}^D \sum_{j_1, \dots, j_d}^N a_{ij_1 \dots j_d}^{(d)} g^{(d)}(x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_d}) \quad (1)$$

其中， $x_i(t) \in R^n$ 是节点 i 的状态向量； $f_i : R^n \rightarrow R^n$ 是非线性局部动力学，是已知函数； $g^{(d)} : R^{n*(d+1)} \rightarrow R^n$ 是 $d+1$ 个节点的 d 阶非线性相互作用，是已知函数； $A^{(d)}$ 编码 $(d+1)$ 个节点相互作用的拓扑，是待求解的未知向量。

对节点进行 $M+1$ 次采样 $t_m = m\Delta t, m = 0, \dots, M$ 。目的是寻找 $A^{(d)}, d = 1, \dots, D$ 使得采样值与模型生成轨迹值之间差异最小。等式 (1) 在 t_m 时为：

$$z_i^m = f_i(x_i^m) + \sum_{d=1}^D \sum_{j_1, \dots, j_d=1}^N a_{ij_1 \dots j_d}^{(d)} g^{(d)}(x_i^m, x_{j_1}^m, \dots, x_{j_d}^m) \quad (2)$$

其中， $i = 1, \dots, N, m = m_{min}, \dots, m_{max}, x_i^m = x_i(t_m), m_{min} \geq 0, m_{max} \leq M$ 。 z_i^m 根据假设条件确定，如果是强假设（ \dot{x}_i 可测）时， $z_i^m = \dot{x}_i^m$ ；如果是弱假设（ \dot{x}_i 不可测）时， z_i^m 使用节点 i 的多次采样值进行有限差分近似代替。

令：

$$y_i^m := z_i^m - f_i(x_i^m)$$

$$Y_i = [y_i(m_{min})^T, \dots, y_i(m_{max})^T]^T$$

$$A_i \equiv [(A_i^{(1)})^T, (A_i^{(2)})^T, \dots, (A_i^{(D)})^T]^T = [a_{i1}^{(1)}, \dots, a_{iN}^{(1)}, a_{i12}^{(2)}, \dots, a_{i,N-1,N}^{(2)}, \dots, a_{i,1,\dots,D}^{(D)}, \dots, a_{i,N-D+1,\dots,N}^{(D)}]^T$$

则由上述等式可推导出：

$$Y_i = \Phi_i A_i \quad (3)$$

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} g_{i,1}^{(1)}(m_{min}) & \dots & g_{i,i-1}^{(1)}(m_{min}) & g_{i,i+1}^{(1)}(m_{min}) & \dots & g_{i,N}^{(1)}(m_{min}) & g_{i,1,2}^{(2)}(m_{min}) & \dots & g_{i,N-D+1,\dots,N}^{(D)}(m_{min}) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ g_{i,1}^{(1)}(m_{max}) & \dots & g_{i,i-1}^{(1)}(m_{max}) & g_{i,i+1}^{(1)}(m_{max}) & \dots & g_{i,N}^{(1)}(m_{max}) & g_{i,1,2}^{(2)}(m_{max}) & \dots & g_{i,N-D+1,\dots,N}^{(D)}(m_{max}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中， $g_{i,j_1,\dots,j_d}^{(d)}(m) = g^{(d)}(x_i^m, x_{j_1}^m, \dots, x_{j_d}^m)$ 。

对于每一节点 i ，要识别 $H = N - 1 + (N - 1)(N - 2) + \dots + (N - 1) \dots (N - D)$ 项，对应 A_i 中的每个元素。令 $M = m_{max} - m_{min} + 1$ ，代表耦合函数的非零分量的数量。则有 $\Phi_i \in R^{M \times H}$ 。当 $M < H$ ，等式 (3) 欠定的，可能有多个解；当 $M \geq H$ 并且 ϕ_i 是满秩，即它们是列线性无关的，则等式 (3) 不是欠定的，可以用最小二乘求解。此时向量 A_i 是唯一确定的。

因此通过等式 (3) 求解 A_i 即可重构节点 i 的所有相互作用，所以重复计算所有节点就可以重构整个复杂网络的。等式 (3) 将高阶相互作用的重构问题转换为求解未知变量的代数方程组问题。

4 复现细节

4.1 与已有开源代码对比

本论文提供了项目代码：<https://github.com/LValentinaGambuzza/Code-for-Reconstructing-higher-order-interactions-in-coupled-dynamical-systems>。项目提供的代码包括以下几项：LVapproximations.m, LVEqComplete.m, LVexact.m, LVmodel.m, RosslerApprox.m, RosslerExact.m, ZackaryNet.mat, roessler_hoi.m, signal_lasso.m。signal_lasso.m 中提供的信号套索方法存在一定问题，无法达到原文的效果，我根据文章引用的参考文献重新写了该方法，在 signal_lasso_2.m 中。

除此之外，还研究不同求解方法对重构误差的影响，以及随机噪声对误差的影响，会在 5. 实验结果分析中进行详细说明。4.3 使用说明会注明不同代码的功能、来源。

4.2 实验环境搭建

复现工作在软件 MatLAB R2023a 上进行并完成。

4.3 创新点

其一，研究不同的方法对重构误差的影响；其二，受文章的 discussion 部分启发，研究随机噪声对重构误差的影响。两部分均在 5. 实验结果分析中进行详细说明。

4.4 使用说明

代码文件	功能说明
lasso.m (提供)	套索 Lasso 方法的坐标下降法实现
LVeqComplete.m (提供)	Lotka-Volterra 模型方程的代码实现
LVmodel.m (提供)	绘制 Fig.1b, 7 个体群的丰度随时间的演化过程
LVexact.m (提供)	绘制 Fig.1-c, 在导数已知时 OLS 的重构误差随采样次数增加的变化
LVapproximations.m (提供)	绘制 Fig.1-d, 在导数未知时使用不同阶有限差分近似对 OLS 重构误差的影响
ZhackerNet.mat (提供)	数值模拟 2 使用的数据, 包括邻接矩阵、一阶单纯形和二阶单纯形
Rosler_hom.m (提供)	Rosler 模型方程的代码实现, 包括一阶单纯形和二阶单纯形的作用
signal_lasso.m (提供)	signal lasso 方法的代码实现, 采用坐标下降法
RoslerExact.m (提供)	绘制 Fig.2-b, 在导数已知时不同方法随采样次数增加对重构误差的影响
RoslerApprox.m (提供)	绘制 Fig.2-c, 在导数未知、采用有限差分近似时不同方法随采样次数增加对重构误差的影响
signal_lasso_2.m (添加)	使用 CVX 包实现 signal lasso 方法
RoslerExact_noise.m (添加)	在 Rosler 模型中添加均匀分布的随机量, 研究不同强度的噪声对重构误差的影响
RoslerExact_noise_2.m (添加)	在 Rosler 模型中添加均匀分布的随机量, 研究在统一强度的噪声下重构误差随采样次数的变化
NNLS_cvx.m (添加)	使用 CVX 包实现 NNLS 方法
lasso_2.m (添加)	使用 CVX 包实现 Lasso 方法

表 1. 代码文件及其功能说明

5 实验结果分析

5.1 Lotka-Volterra 动力学应用于有向加权超图

Lotka-Volterra 捕食者-猎物模型构造如下:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy$$

其中, x -猎物种群密度; y -某种捕食者种群密度; α -猎物增长率; β -捕食者对猎物死亡率影响; γ -捕食者死亡率; δ -猎物对捕食者增长率影响。

考虑 N 个微生物种群的复杂系统, 包括成对相互作用和三体相互作用:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} x_i x_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N a_{ijk}^{(2)} x_i x_j x_k, \quad (5)$$

其中, $f_i(x_i) = r_i x_i (1 - \frac{1}{k_i} x_i)$, r_i -种群 i 的增长率, k_i -环境对种群 i 的承载能力。

设置 7 个种群, 每个种群的参数和初始大小设置如下:

Node	1	2	3	4	5	6	7
R_i	0.6099	0.6177	0.8594	0.8055	0.5767	0.1829	0.2399
K_i	88.7647	3.8387	49.5002	17.6248	97.8894	71.5568	50.5467
$x_i(0)$	30	45	32	50	55	30	40

表 2. 生成微生物种群的参数和初始大小

使用本文方法进行网络的参数识别, 结果如下:

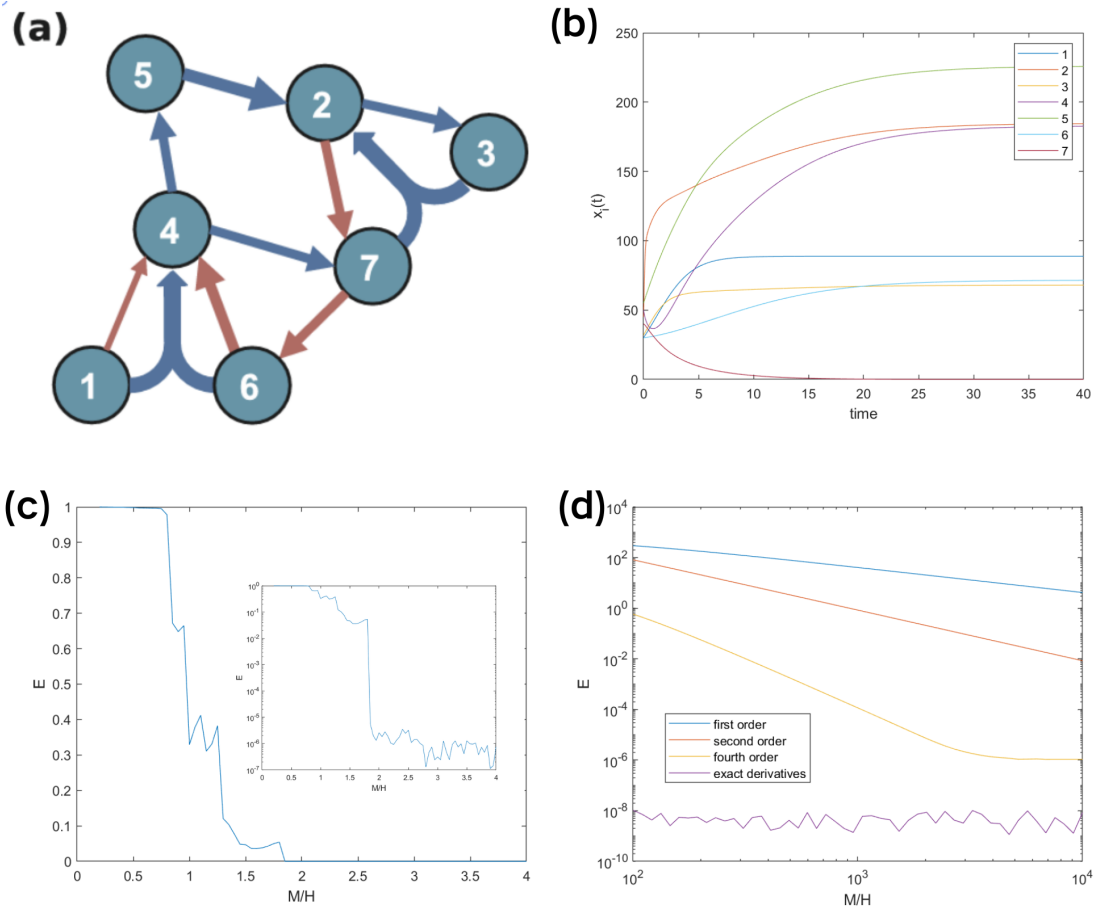


图 1. 重建微生物种群中的高阶相互作用

图 1.a 显示 7 个种群的相互影响，包括成对相互作用和三体相互作用。图 1.b 显示在上述条件设置下种群密度的变化，使用代码 `LVeComplete.m` 和 `LVmodel.m`。

进行采样，设置时间窗口 $[0, t_{max}]$, $t_{max} = 20$ 。使用采样数据通过等式 (4) 计算 Y_i 和 Φ_i 。使用基于完全正交分解的 OLS 方法求解，可使采样值 Y_i 与模型生成轨迹值 $\Phi_i A_i$ 之间差异 E 最小：

$$E = \sum_{i=1}^N E_i, \text{ with } E_i \equiv \|Y_i - \Phi_i A_i\|_2^2 \quad (6)$$

使用 ε^2 量化模型预测值与真实值之间的差距：

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \|A_i - \hat{A}_i\|_2^2}{\sum_{i=1}^N \|A_i\|_2^2} \quad (7)$$

如图 1.c 所示，在强假设 (x_i 可测) 下，调节采样次数 M 可得在不同 M/H 下模型的重建误差。当 $M/H \approx 1.8$ 时，模型的预测精度就非常高。使用代码 `LVexact.m`。

在弱假设 (x_i 不可测) 时，只能通过对采样值进行有限差分近似。一阶、二阶和四阶差分格式分别如下：

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^m &= \frac{x^m - x^{m-1}}{\Delta t} + O(\Delta t), m = 0, \dots, M-1 \\ \dot{z}_i^m &= \frac{x^{m+1} - x^{m-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2), m = 1, \dots, M-1 \\ \dot{z}_i^m &= \frac{-x^{m+2} + 8x^{m+1} - 8x^{m-1} + x^{m-2}}{12\Delta t} + O(\Delta t^4), m = 2, \dots, M-2 \end{aligned}$$

如图 1.d 所示，一次差分 and 二次差分的效果并不好。四次差分在 $M/H \geq 10^3$ 后有比较好的效果。使用代码 LVapproximations.m。

5.2 无向单纯复形耦合 Rossler 振子

一般 Rossler 模型如下：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega y - z \\ \frac{dy}{dt} = \omega x + \alpha y \\ \frac{dz}{dt} = \beta + z(x - \gamma) \end{cases}$$

文中给出 N 个 Rossler 振子耦合成对相互作用和三体相互作用的模型：

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -y_i - z_i + \sigma_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} g^{(1)}(x_i, x_j) + \sigma_2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N a_{ijk}^{(2)} g^{(2)}(x_i, x_j, x_k), \\ \dot{y}_i &= x_i + a y_i, \\ \dot{z}_i &= b + z_i(x_i - c) \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $g^{(1)}(x_i, x_j) = x_j - x_i$, $g^{(2)} = x_j^2 x_k + x_j x_k^2 - 2x_i^3$, $\sigma_1 = 10^{-4}$, $\sigma_2 = 10^{-5}$, $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 9$

使用 Zachary karate club 的数据作为原始网络，同时将 $\delta\%$ 的三角形（三个节点间的两两成对相互作用）转变为二阶单纯形，以构造高阶相互作用的复杂网络。项目提供的代码里并没有关于三角形转换二阶单纯形的内容，只是将三阶作用、二阶作用和网络数据保存 ZacharyNet.mat 文件中。

使用本文方法测试上述网络：

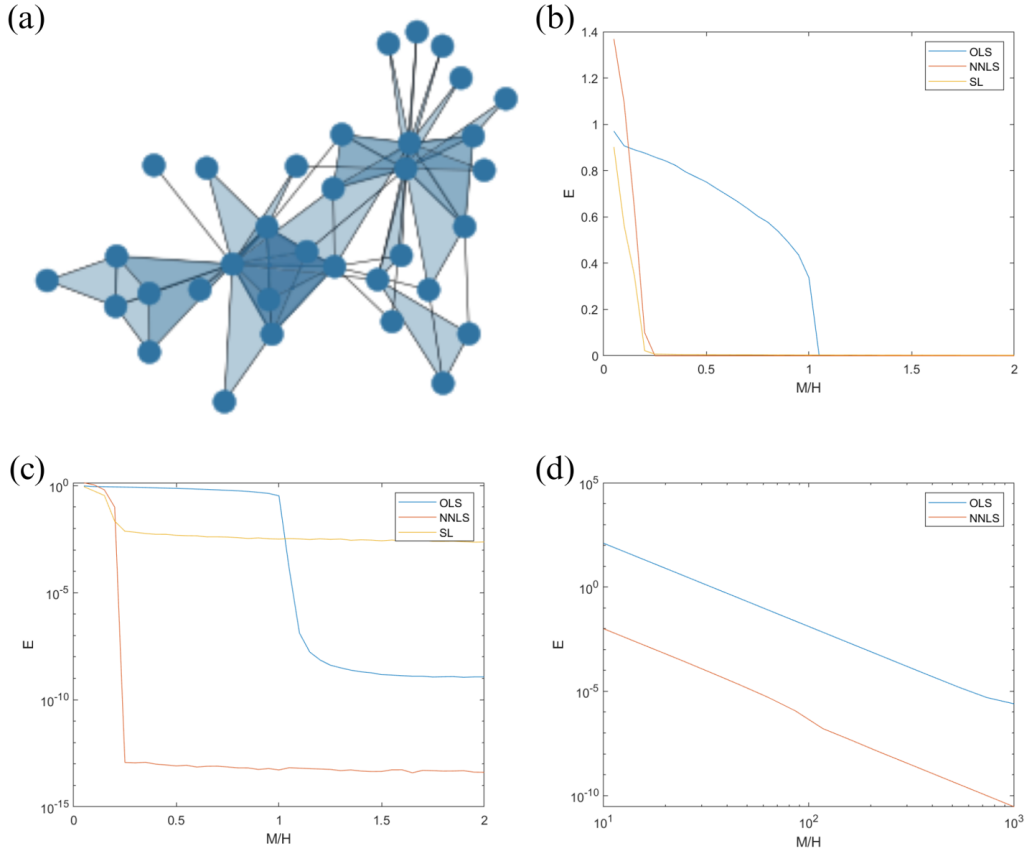


图 2. 在耦合 rossler 振子的 34 个节点的网络上测试重建方法

图 2.a 给出了俱乐部网络示意图，包括成对相互作用和转换的二阶单纯形 ($\delta = 100\%$)。

图 2.b 和 c 是在强假设下，三种不同的方法求解等式 (8) 的情况，其中： $OLS : \min_{A_i} \|Y_i - \Phi_i A_i\|_2^2$, $NNLS : \min_{A_i} \|Y_i - \Phi_i A_i\|_2^2 \text{ with the constraints } A_i \geq 0$, $SL : \min_{A_i} (\|Y_i - \Phi_i A_i\|_2^2 + \lambda_1 \|A_i\|_1 + \lambda_2 \|A_i - 1_H\|_1)$ 。分析发现，三种方法都能有效识别网络的高阶相互作用，其中 NNLS 和 SL 只需要少量采样值即可，但是从重建误差来看 $NNLS > OLS > SL$ 。使用代码 RosslerExact.m。和 signal_lasso_2.m

图中使用的 SL 方法是我根据文献改进的，项目提供的 SL 方法效果不好，如下图所示：

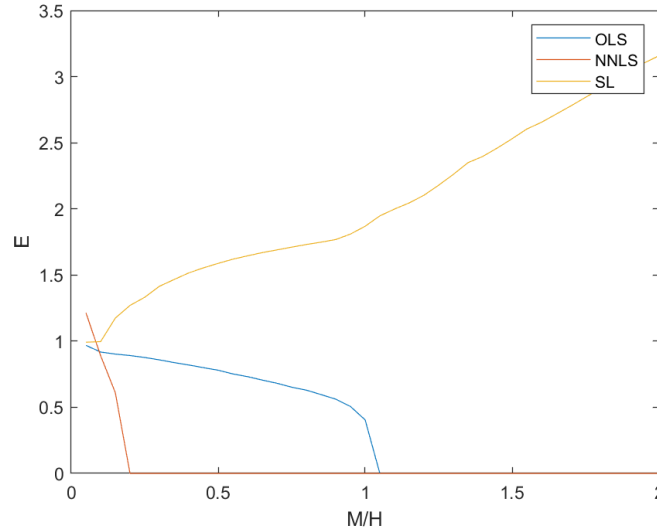


图 3. 项目提供代码的 SL 效果

图 2.d 显示在弱假设 (x_i 不可测) 时，重建需要更多的采样次数。相比于 OLS，NNLS 的重建效果更好。使用代码 RosslerApprox.m。

添加代码 NNLS_cvx.m，使用 CVX 包实现 NNLS 方法，研究不同方法的重建效果。结果如图：

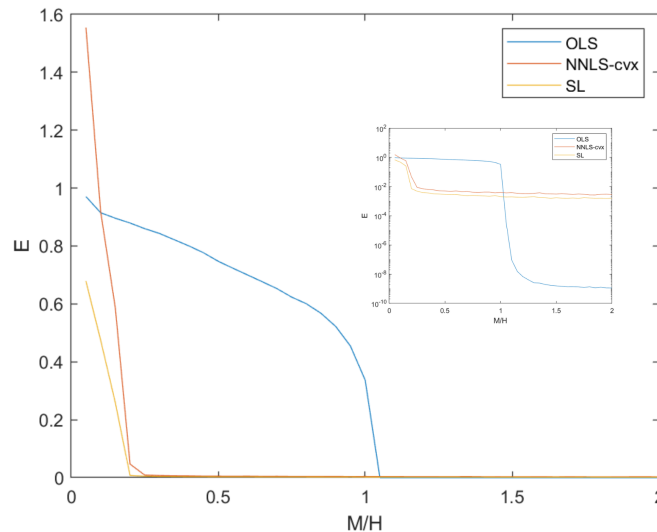


图 4. cvx 实现 NNLS 方法效果

发现使用 `cvx` 包实现 NNLS 方法效果不如 MATLAB 自带函数 `lsqnonneg()`, 不论是所需采样次数还是重建误差。

最后, 研究噪声对网络重建高阶交互作用的影响。向模型中添加随机噪声:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -y_i - z_i + \sigma_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} g^{(1)}(x_i, x_j) + \sigma_2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N a_{ijk}^{(2)} g^{(2)}(x_i, x_j, x_k) + \sigma_3 \eta_i, \\ \dot{y}_i &= x_i + a y_i, \\ \dot{z}_i &= b + z_i(x_i - c) \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\eta_i \sim U(-1, 1)$, σ_3 用于调节噪声强度。

在采样次数 $M = H$ 时, 三种不同的方法在不同噪声强度下的重建误差如下:

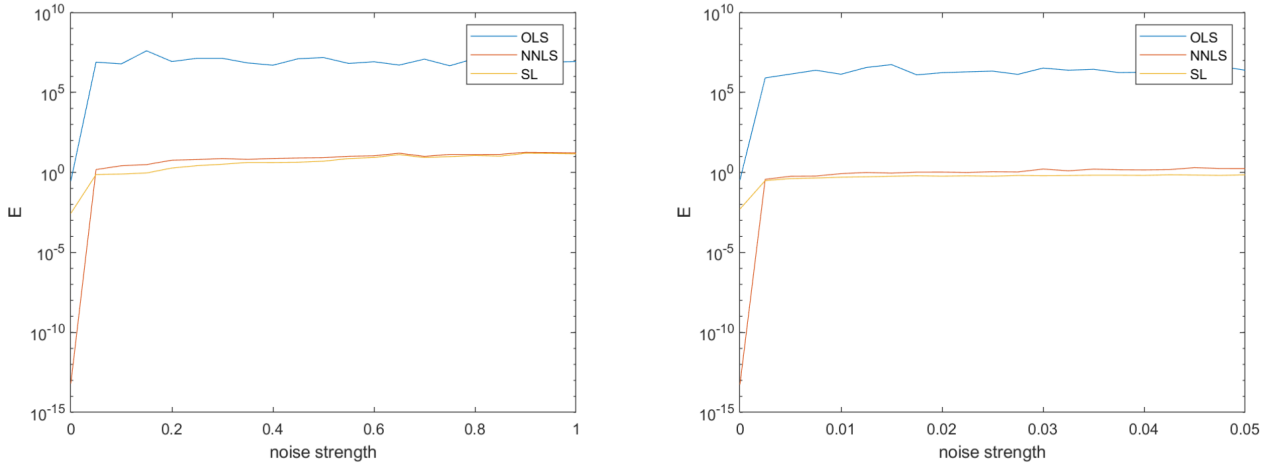


图 5. `cvx` 实现 NNLS 方法效果

如图所示, 只要添加噪声扰动就不能够重建成功, 模型的稳定性非常差。

6 总结与展望

文中方法需要提前获取各个节点的动力学和不同阶的耦合函数, 即模型信息 $f(), g^{(d)}$ 。提出方法适用于有向、无向、加权和无权等网络模型。差异 E 并未针对无向图优化, 当采样次数 M 足够大和没有噪声影响下, 可当作有向图完成重建并满足对称性。文中只在两个小型网络进行模拟, 没有对其结构的先验知识。对于大型网络, 考虑所有可能的相互作用是不可能的。后面的研究发现随机噪声对网络重建的影响很大, 极弱的扰动也会导致重建失败。

参考文献

- [1] Jacopo Grilli, Gyorgy Barabas, Matthew J. Michalska-Smith, and Stefano Allesina. Higher-order interactions stabilize dynamics in competitive network models. *NATURE*, 548(7666):210+, AUG 10 2017.
- [2] Iacopo Iacopini, Giovanni Petri, Alain Barrat, and Vito Latora. Simplicial models of social contagion. *Nature communications*, 10(1):2485, 2019.

- [3] Shan Yu, Hongdian Yang, Hiroyuki Nakahara, Gustavo S. Santos, Danko Nikolic, and Dietmar Plenz. Higher-order interactions characterized in cortical activity. *JOURNAL OF NEUROSCIENCE*, 31(48):17514–17526, NOV 30 2011.
- [4] Federico Battiston, Giulia Cencetti, Iacopo Iacopini, Vito Latora, Maxime Lucas, Alice Patania, Jean-Gabriel Young, and Giovanni Petri. Networks beyond pairwise interactions: Structure and dynamics. *PHYSICS REPORTS-REVIEW SECTION OF PHYSICS LETTERS*, 874:1–92, AUG 25 2020.
- [5] Ginestra Bianconi. *Higher-Order Networks*. Elements in the Structure and Dynamics of Complex Networks. Cambridge University Press, 2021.
- [6] Sam Spiro. Algebraic topology (hatcher). 2017.
- [7] Piergiulio Corsini and Violeta Leoreanu. *Graphs and Hypergraphs*, pages 55–94. Springer US, Boston, MA, 2003.
- [8] Unai Alvarez-Rodriguez, Federico Battiston, Guilherme Ferraz de Arruda, Yamir Moreno, Matjaz Perc, and Vito Latora. Evolutionary dynamics of higher-order interactions in social networks. *NATURE HUMAN BEHAVIOUR*, 5(5):586–595, MAY 2021.
- [9] L. V. Gambuzza, F. Di Patti, L. Gallo, S. Lepri, M. Romance, R. Criado, M. Frasca, V. Latora, and S. Boccaletti. Stability of synchronization in simplicial complexes. *NATURE COMMUNICATIONS*, 12(1), FEB 23 2021.
- [10] Luca Gallo, Riccardo Muolo, Lucia Valentina Gambuzza, Vito Latora, Mattia Frasca, and Timoteo Carletti. Synchronization induced by directed higher-order interactions. *COMMUNICATIONS PHYSICS*, 5(1), OCT 28 2022.
- [11] Riccardo Muolo, Luca Gallo, Vito Latora, Mattia Frasca, and Timoteo Carletti. Turing patterns in systems with high-order interactions. *CHAOS SOLITONS & FRACTALS*, 166, JAN 2023.
- [12] Federico Battiston, Enrico Amico, Alain Barrat, Ginestra Bianconi, Guilherme Ferraz de Arruda, Benedetta Franceschiello, Iacopo Iacopini, Sonia Kefi, Vito Latora, Yamir Moreno, Micah M. Murray, Tiago P. Peixoto, Francesco Vaccarino, and Giovanni Petri. The physics of higher-order interactions in complex systems. *NATURE PHYSICS*, 17(10):1093–1098, OCT 2021.
- [13] Giovanni Petri Federico Battiston. Higher-order systems. Understanding Complex Systems. Springer Cham, 2022.
- [14] Marc Timme and Jose Casadiego. Revealing networks from dynamics: an introduction. *JOURNAL OF PHYSICS A-MATHEMATICAL AND THEORETICAL*, 47(34), AUG 29 2014.

- [15] Giulio Tirabassi, Ricardo Sevilla-Escoboza, Javier M. Buldu, and Cristina Masoller. Inferring the connectivity of coupled oscillators from time-series statistical similarity analysis. *SCIENTIFIC REPORTS*, 5, JUN 4 2015.
- [16] Christophe Ladroue, Shuixia Guo, Keith Kendrick, and Jianfeng Feng. Beyond element-wise interactions: Identifying complex interactions in biological processes. *PLOS ONE*, 4(9), SEP 23 2009.
- [17] Xiaoqun Wu, Changsong Zhou, Guanrong Chen, and Jun-an Lu. Detecting the topologies of complex networks with stochastic perturbations. *CHAOS*, 21(4), DEC 2011.
- [18] T Schreiber. Measuring information transfer. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 85(2):461–464, JUL 10 2000.
- [19] Raul Vicente, Michael Wibral, Michael Lindner, and Gordon Pipa. Transfer entropy-a model-free measure of effective connectivity for the neurosciences. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL NEUROSCIENCE*, 30(1, SI):45–67, FEB 2011.
- [20] R Jansen, HY Yu, D Greenbaum, Y Kluger, NJ Krogan, SB Chung, A Emili, M Snyder, JF Greenblatt, and M Gerstein. A bayesian networks approach for predicting protein-protein interactions from genomic data. *SCIENCE*, 302(5644):449–453, OCT 17 2003.
- [21] Marc Timme. Revealing network connectivity from response dynamics. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 98(22), JUN 1 2007.
- [22] Dongchuan Yu, Marco Righero, and Ljupco Kocarev. Estimating topology of networks. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 97(18), NOV 3 2006.
- [23] Xiaoqun Wu, Xueyi Zhao, Jinhua Lu, Longkun Tang, and Jun-an Lu. Identifying topologies of complex dynamical networks with stochastic perturbations. *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL OF NETWORK SYSTEMS*, 3(4):379–389, DEC 2016.
- [24] Srinivas Gorur Shandilya and Marc Timme. Inferring network topology from complex dynamics. *NEW JOURNAL OF PHYSICS*, 13, JAN 2011.
- [25] Xiao Han, Zhesi Shen, Wen-Xu Wang, and Zengru Di. Robust reconstruction of complex networks from sparse data. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 114(2), JAN 14 2015.
- [26] Lei Shi, Chen Shen, Libin Jin, Qi Shi, Zhen Wang, and Stefano Boccaletti. Inferring network structures via signal lasso. *PHYSICAL REVIEW RESEARCH*, 3(4), DEC 22 2021.
- [27] Fernando E. Rosas, Pedro A. M. Mediano, Andrea I. Luppi, Thomas F. Varley, Joseph T. Lizier, Sebastiano Stramaglia, Henrik J. Jensen, and Daniele Marinazzo. Disentangling high-order mechanisms and high-order behaviours in complex systems. *NATURE PHYSICS*, 18(5):476–477, MAY 2022.

- [28] Daniele Marinazzo, Jan Van Roozendaal, Fernando E. Rosas, Massimo Stella, Renzo Comolatti, Nigel Colenbier, Sebastiano Stramaglia, and Yves Rosseel. An information-theoretic approach to hypergraph psychometrics. *Arxiv*, 2022.
- [29] Riccardo Pernice, Luca Faes, Martha Feucht, Franz Benninger, Stefano Mangione, and Karin Schiecke. Pairwise and higher-order measures of brain-heart interactions in children with temporal lobe epilepsy. *JOURNAL OF NEURAL ENGINEERING*, 19(4), AUG 1 2022.
- [30] Andrea Santoro, Federico Battiston, Giovanni Petri, and Enrico Amico. Higher-order organization of multivariate time series. *NATURE PHYSICS*, 19(2):221+, FEB 2023.
- [31] Federico Musciotto, Federico Battiston, and Rosario N. Mantegna. Detecting informative higher-order interactions in statistically validated hypergraphs. *COMMUNICATIONS PHYSICS*, 4(1), SEP 24 2021.
- [32] Federico Musciotto, Federico Battiston, and Rosario N. Mantegna. Identifying maximal sets of significantly interacting nodes in higher-order networks. *Arxiv*, 2022.
- [33] Jean-Gabriel Young, Giovanni Petri, and Tiago P. Peixoto. Hypergraph reconstruction from network data. *COMMUNICATIONS PHYSICS*, 4(1), JUN 15 2021.
- [34] Simon Lizotte, Jean-Gabriel Young, and Antoine Allard. Hypergraph reconstruction from uncertain pairwise observations. *SCIENTIFIC REPORTS*, 13(1), DEC 4 2023.
- [35] Huan Wang, Chuang Ma, Hanshuang Chen, Ying-Cheng Lai, and Hai-Feng Zhang. Full reconstruction of simplicial complexes from binary contagion and ising data. *Nature Communications*, 13:3043, 06 2022.