

# Higher-order Granger reservoir computing: simultaneously achieving scalable complex $stR_u$ ctures inference and accurate dynamics prediction

## 摘要

最近，包括储备池计算 (RC) 在内的机器学习方法在预测许多领域的复杂动力学方面取得了巨大成功。然而，目前的挑战在于在保持模型的低复杂度的同时突破预测精度的极限。在这里，本文设计了一个数据驱动、无模型的框架，名为高阶格兰杰水库计算 (HoGRC)，它有两个主要任务：一是结合格兰杰因果关系的思想和 RC 来推断高阶结构，同时，第二个是将时间序列和推断的高阶信息输入 HoGRC 来实现多步预测。本文使用几个代表性系统（包括经典混沌系统、网络动力系统和英国电网系统）证明了 HoGRC 的有效性。在机器学习和复杂系统的时代中，预计 HoGRC 框架将在结构推理和动力学预测中得到广泛应用。

**关键词：**储备池计算；高阶结构；格兰杰因果检验

## 1 引言

现代复杂系统的动态建模与预测成为了学术研究和工业应用中的重要问题。特别是在社会网络、生物医学、气候变化等领域，系统的状态通常由多个相互关联的节点和复杂的因果关系网络所决定。如何准确地预测这些复杂系统的未来状态，已成为研究者和工程师面临的重大挑战。最近的机器学习 (ML) 方法可以仅使用观察到的数据生成模型，但其中许多算法往往需要大量数据，需要较长的观察时间和大量的计算资源 [1]。尽管取得了初步成功，这些方法在典型场景中仍然遇到困难。在典型场景中，所研究的复杂系统具有更高的维度，充满不同类型的交互，甚至表现出高度复杂的动态行为 [2]。由于这些网络需要大量更新参数，储层计算 (RC) 是一种轻量级 RNN，最近被提出用于预测混沌动力学的时空行为，并引起了人们的极大兴趣 [3]。实际上，在 RC 中，隐藏状态是高维的，只有输出层的权重需要训练。因此，储备池计算 [4] 是一种机器学习范例，特别适合学习动态系统，即使系统表现出混沌 [5] 或复杂的时空行为 [6]（被认为是 hardest-of-the-hard 问题）尽管 RC 框架的优势已在许多场景中得到验证，但它仍有改进的空间。例如，将 RC 扩展到更深层网络形式 [7]。将原始数据的一些非线性组合引入到输入层中以大大提高计算效率 [8]。在输出层分别添加隐藏状态和原始数据的非线性项，以增强 RC 的建模能力 [9]。还有的。虽然这些方法提高了 RC 的性能，

但当动态维度更高、非线性更强、结构更复杂时，这些方法都有其局限性。然而，它们无法直接揭示高阶结构，这是复杂动力系统中普遍存在的一种更复杂的相互作用。事实上，最近的研究表明，高阶结构对于复杂动力学的出现至关重要 [10]，即。扩散 [11]、同步 [12] 和进化过程 [13]。因此，我们认为，在 RC 中适当引入传统结构信息和高阶结构有利于实现更准确和长期的预测。

为了解决上述问题，本文提出了一种称为高阶 RC 的新型计算范式，旨在将结构信息，特别是高阶结构嵌入到储层中。然而，底层复杂动力系统的高阶结构通常是先验未知的。为此，我们将格兰杰因果关系 (GC) 的概念纳入高阶 RC，以迭代的方式识别系统潜在的高阶相互作用，从而通过推断的最优高阶结构实现更准确的动态预测。在此过程中，GC 推理和 RC 预测同时进行，互为补充，因此被称为 HoGRC 框架。该框架具有高度可扩展性，因为在节点级别，同时实现了复杂的结构推理和准确的动态预测。因此，这使得本文所开发的框架广泛适用于更高维度和更复杂的动力系统。

## 2 相关工作

在本节中，本文将简要回顾传统 RC 和并行 RC，并对格兰杰因果关系检验做简单的介绍。

### 2.1 传统储备池计算 (RC)

RC 由三个基本组件组成：一个输入层，一个大型的循环隐藏层（一般叫做 reservoir），以及一个输出层。输入层是随机的连接到这个大型的隐藏层的 (reservoir)。reservoir 层包含稀疏随机连接，这里只有一个可以适应的参数就是输出权重，这个输出权重通常是通过线性回归来更新调整的。

### 2.2 并行储备池计算 (RC)

并行 RC (PRC) 是一种使用系统局部结构的复杂动态网络的并行预测方法。PRC 方法 (Parallel Reservoir Computing, 并行储层计算) 旨在处理大规模网络的动态预测问题。该方法使用了一种并行架构，模拟了目标网络的拓扑结构。每个网络节点被分配到一个独立的储备池，储备池根据节点的输入（包括自身和邻近节点的信号）进行训练，并预测节点的未来状态。PRC 使用的这些成对结构可以通过传统的因果推理方法及其改进的变体获得 [14]。然而，它们无法直接揭示高阶结构，这是复杂动力系统中普遍存在的一种更复杂的相互作用。

### 2.3 格兰杰因果关系检验

格兰杰因果检验是一种用于判断时间序列数据中一个变量是否可以用来预测另一个变量未来变化的统计方法。其核心思想是，如果变量 A 的过去值能够显著提高对变量 B 未来值的预测精度，则可以认为 A “格兰杰引起” B。具体来说，格兰杰因果检验通过比较两个模型的预测效果来检验因果关系：一个模型是仅用变量 B 的过去值来预测其未来值，另一个模型则同时包含变量 A 和 B 的过去值。如果加入变量 A 的过去值后，预测准确性有显著提高，则认为变量 A 格兰杰引起变量 B。格兰杰因果检验假设自回归模型是基于时间序列的滞后期来

预测未来值的，因此通过构建自回归模型来分析不同时间序列间的因果关系。应用场景广泛，常用于经济学、金融学、神经科学等领域。例如，在金融市场中，可以用格兰杰因果检验分析不同市场或股票之间的因果关系，预测某一市场的变化是否会影响其他市场。

### 3 本文方法

本文创新性地提出了一种计算范式，命名为高阶 RC (HoGRC)，该模型的核心思想是将复杂的结构信息，特别是高阶结构，嵌入到储层计算框架中。传统的计算模型往往局限于低阶因果关系的推理和预测，而本模型则突破了这一限制，通过引入高阶因果推理方法来增强模型对系统内部更复杂关系的理解与建模。具体来说，HoGRC 框架融合了高阶 Granger 因果推理与递归计算 (Reservoir Computing, RC)，在推断系统内部更为复杂的高阶因果关系的同时，进行状态预测，从而提高了对动态系统的预测能力。

在高阶 RC 框架中，首先，通过因果推理，挖掘节点之间更深层次的交互关系，这些关系可能是传统成对网络方法无法捕捉到的。然后，HoGRC 利用这些推理结果驱动状态预测过程，通过储备池计算的方法，生成对系统未来状态的准确预测，从而为解决复杂系统中的预测问题提供了新的思路和方法。

#### 3.1 本文方法概述

为更好地提取高阶结构，本文引入了一个新的计算范式——高阶 RC，它通过将时间序列数据与高阶结构结合起来，以做出准确的节点动态预测。具体来说，如图 1 所示。

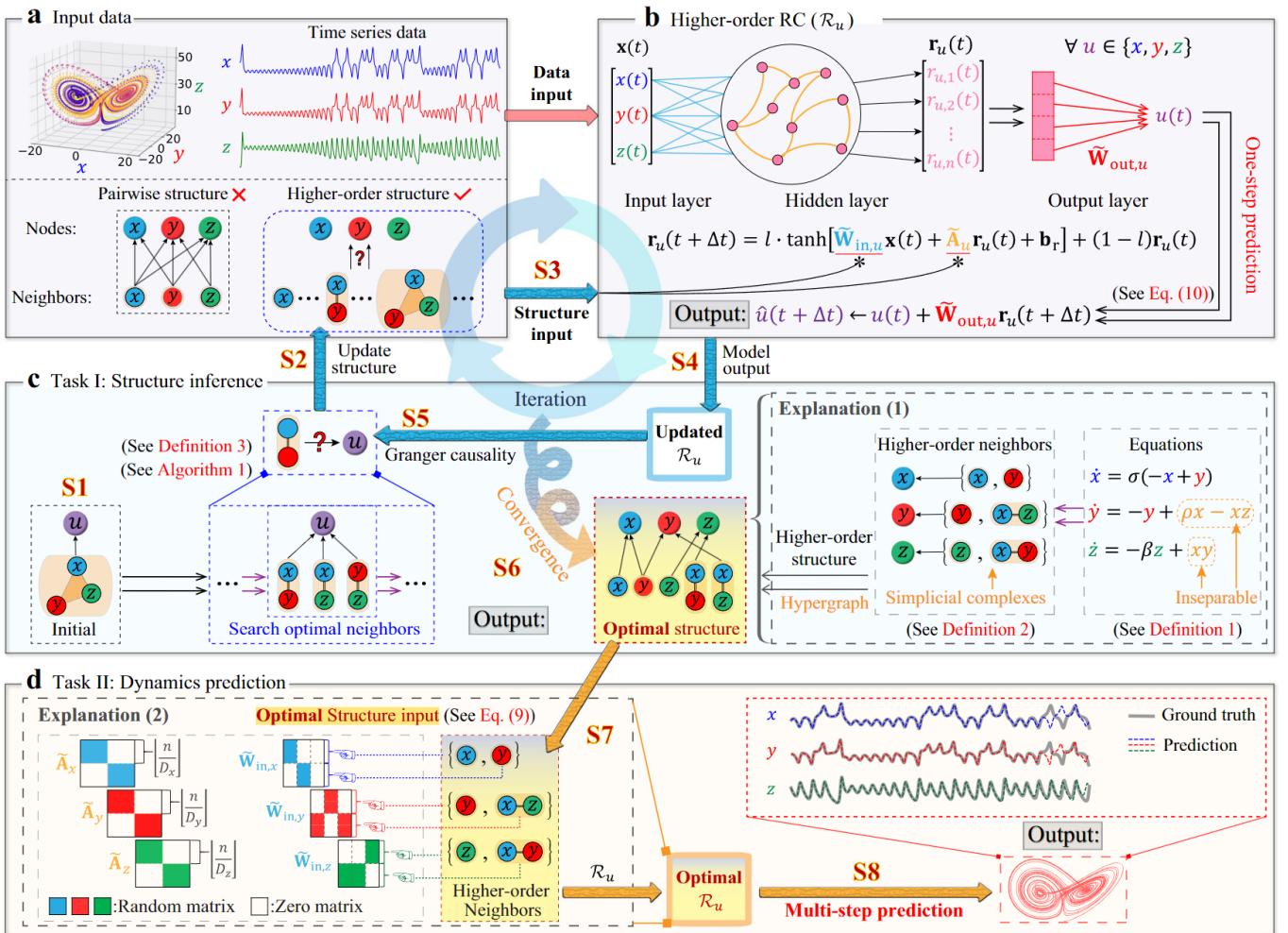


图 1. 方法示意图

为了实现对高阶结构的结构推断，本文创新地将格兰杰因果关系 (GC) 的概念融入到  $R_u$  中。随后，推断的结构被用来更新  $R_u$ ，从而进一步增强其预测性能。重复此迭代过程，直到模型达到最佳预测精度。因此，本文将这个集成模型称为 HoGRC 框架。HoGRC 与传统 RC 的对比如图 2 所示。

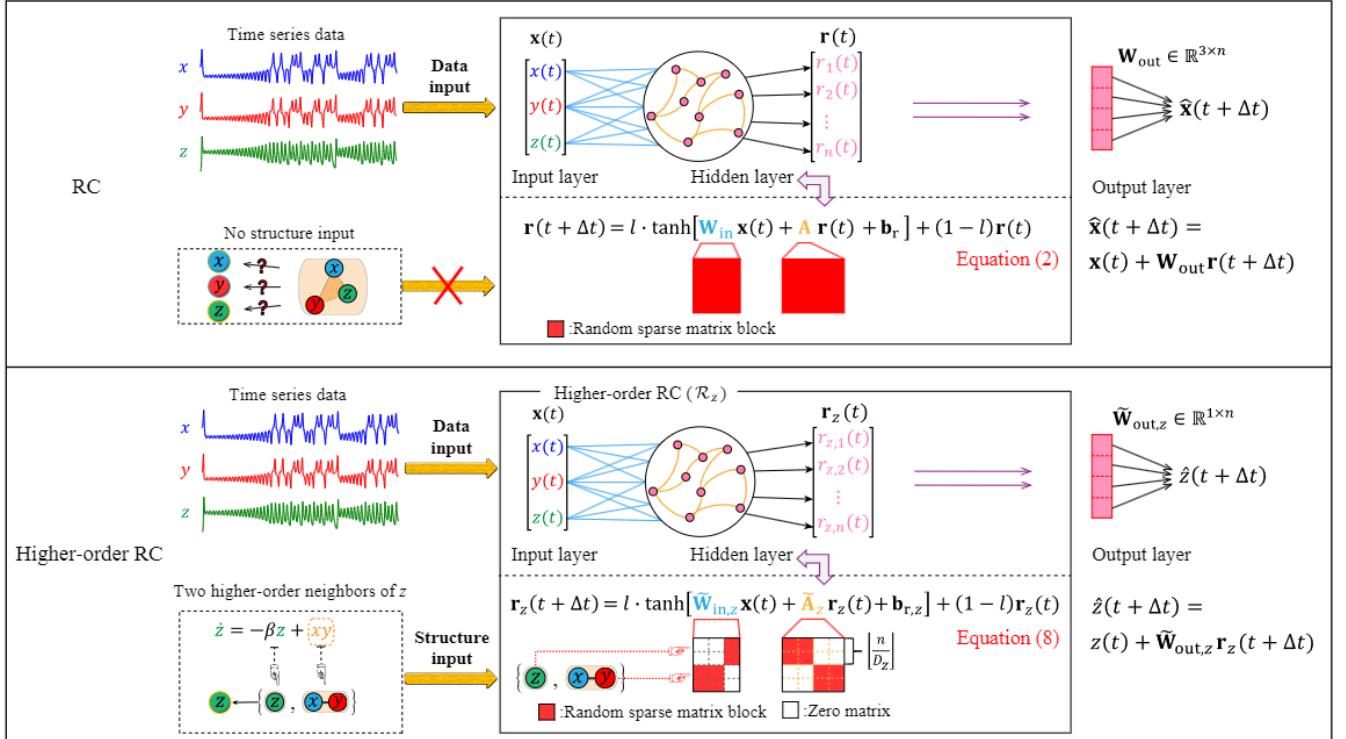


图 2. HoGRC vs 传统 RC

值得注意的是，本文框架完全继承了现有工作的并行优点。本文可以分为两个子任务：结构推断和状态预测。上述两个过程在节点级别上运行，仅关注每个节点，并且这样的过程可以应用于网络中的所有节点。与经典的 RC 不同，本文使用特定的高阶结构来对每个节点进行建模，只需要更少的储备池节点数量，构成一个轻量级模型。此外，由于所有轻量级储备池都是独立训练的，因此本文框架可以并行处理，框架可以扩展到更高维度的系统。

### 3.2 结构推断模块

本文的高阶  $R_u$  需要网络结构的精确信息。然而，在现实场景中，系统的具体形式以及高阶结构总是未知的。因此，本文设计了一种高效的贪心算法来搜索任何节点的高阶邻居。按照从高维到低维的顺序搜索真正的高阶邻居，并在此过程中确保候选邻居集中的复合体之间不存在包含关系。由于高阶相互作用本质上是复杂和非线性的，经典的格兰杰因果关系方法不能直接应用，但给本文带来了一些启发。假设节点  $u$  的所有高阶因果关系都包含在候选集  $\{c_1, \dots, c_K\}$  中。另外，假设  $c_K$  不是任何其他候选单纯复形的子复形，若满足不等式 1

$$e_{c_1, \dots, c_K}(u) + \epsilon_e \geq e_{c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_K}(u) \quad (1)$$

则单纯复形  $c_K$  就不是节点  $u$  的因果因素，也就是说，单纯复形  $c_K$  不是节点  $u$  的高阶邻居，其中  $\epsilon_e$  是一个正阈值，选择合适的阈值是准确推断系统高阶邻居的关键。在此定义的基础上，算法 1 展示了该搜索策略的伪代码，其中第 4 至 14 行表示去除无效复合体的过程，第 15 至 23 行表示复合体降维过程。

---

**Algorithm 1** Search algorithms for higher-order neighbors

---

```

1: Data: The candidate neighbor set of node  $u\mathcal{C}_0 = \{c_{1,0}, \dots, c_{K0,0}\}$ , time series data
    $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ .
2: Result: The higher-order neighbors of node  $u\mathcal{S}_u = \{s_{u,1}, \dots, s_{u,D_u}\}$ .
3:  $i \leftarrow 1, a \leftarrow 1$ 
4: Set a suitable threshold  $\epsilon_i$ 
5: while  $a > 0$  do
6:    $a \leftarrow 0$ 
7:   while  $a > 0$  do
8:     for  $j \leftarrow 0$  to  $K_i$  do
9:       if  $e_{c_{i,1}, \dots, c_{i,K_i}}(u) + \epsilon \geq e_{c_{i,1}, \dots, c_{i-1}, c_{j-1,i}, c_{j+1,i}, \dots, c_{K_i}}(u)$  then
10:         $\mathcal{C}_{i+1} = \{c_{i+1}, \dots, c_{K_{i+1}}\} \leftarrow \{c_{i,1}, \dots, c_{i,i+1}, c_{j-1,i}, \dots, c_{K_i}\}$ 
11:         $i \leftarrow i + 1$ 
12:         $a \leftarrow 1$ 
13:        break
14:      end if
15:    end for
16:  end while
17: end while
18: Rearrange the elements in  $\mathcal{C}_i$  from high order to low order;
19: for  $j \leftarrow 0$  to  $K_i$  do
20:   Reduce the dimensionality of the complex  $c_{j,i}$  to get the complex set  $\mathcal{C}_{j,i}$ ;
21:   if  $e_{c_{i,1}, \dots, c_{i,K_i}}(u) + \epsilon \geq e_{c_{j,i}} \cup \{c_{j-1,i}, c_{j+1,i}, \dots\}(u)$  then
22:      $\mathcal{C}_{i+1} = \{c_{i+1}, \dots, c_{K_{i+1}}\} \leftarrow \mathcal{C}_{j,i} \cup \{c_{i,i}, \dots, c_{i+1,i}\}$ 
23:      $i \leftarrow i + 1$ 
24:      $a \leftarrow 1$ 
25:     break
26:   end if
27: end for
28: Remove redundant complexes in  $\mathcal{C}_i$ 
29:  $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{C}_i$ 

```

---

### 3.3 状态预测模块

使用储层网络中的  $n$  个神经元块独立地对原始系统的每个状态变量（即节点  $u$ ）进行建模。然后将节点  $u$  的高阶邻居合并到相应的 RC 中，定义为  $R_u$ 。随后，不同于传统 RC 方法的，高阶  $R_u$  中的隐藏动力学由公式 2 给出。

$$\mathbf{r}_u(t + \Delta t) = (1 - l) \cdot \mathbf{r}_u(t) + l \cdot \tanh \left[ \widetilde{\mathbf{W}}_{in,u} \mathbf{x}(t) + \widetilde{\mathbf{A}}_u \mathbf{r}_u(t) + \mathbf{b}_r \right] \quad (2)$$

因此，建立了总共  $|V|$  个子 RC 网络，其中  $|V|$  表示集合  $V$  中元素的数量。与传统的 RC 方法不同，传统的 RC 方法仅依赖于单个随机矩阵  $\mathbf{W}_{in}$  和单个随机矩阵  $\mathbf{A}$  不包括任何高阶结

构信息，框架(1)在节点级别操作，特别是结合了相应的高阶结构信息。具体来说，对于每个节点，该框架将高阶结构信息直接嵌入到矩阵  $\widetilde{\mathbf{W}}_{in,u}$  和  $\tilde{\mathbf{A}}_u$  中，形式如公式3所示：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{W}}_{in,u} &= \left[ \psi^\top(\mathbf{s}_{u,1}), \psi^\top(\mathbf{s}_{u,2}), \dots, \psi^\top(\mathbf{s}_{u,D_u}) \right] \in \mathbb{R}^{n \times N}, \psi(\mathbf{s}_{u,i}) \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{D_u} \rfloor \times N} \\ \tilde{\mathbf{A}}_u &= \text{diag}\{\varphi(\mathbf{s}_{u,1}), \varphi(\mathbf{s}_{u,2}), \dots, \varphi(\mathbf{s}_{u,D_u})\} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \varphi(\mathbf{s}_{u,i}) \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{D_u} \rfloor \times \lfloor \frac{n}{D_u} \rfloor}\end{aligned}\quad (3)$$

其中  $\lfloor \cdot \rfloor$  为下取整函数，整数  $n$  选为  $D_u$  的倍数。与传统的 RC 框架中，完全随机初始化的矩阵  $\mathbf{W}_{in}$  不同，在  $\widetilde{\mathbf{W}}_{in,u}$  中的每个  $\psi(\mathbf{s}_{u,i})$  都是维度为  $\lfloor \frac{n}{D_u} \rfloor \times N$  的分块子矩阵使得，如果  $x_j \in (\text{resp.}, \notin) s_{u,i}$ ，则  $\Psi(s_{u,i})$  中第  $j$  列的所有元素被设置为随机值（或者零），并且  $\varphi(s_{u,i})$  是维度为  $\lfloor \frac{n}{D_u} \rfloor \times \lfloor \frac{n}{D_u} \rfloor$  的随机稀疏子矩阵。这也是这篇论文的主要创新点之一，储备池计算中的这些块配置有助于更精确地利用高阶构造信息。现在，通过以上述方式将高阶结构信息嵌入到储层动力学中，本文能够获得每个节点的  $n$  维隐藏状态（储备池节点状态向量），这能够预测系统在下一个时间步的状态，如公式4所示：

$$\hat{u}(t + \Delta t) = u(t) + \tilde{\mathbf{W}}_{out,u} \mathbf{r}_u(t + \Delta t) \quad (4)$$

使用 HoGRC 框架预测动态。使用推断的高阶交互，向 HoGRC 提供每个节点及其高阶邻居的数据，预测节点随时间变化的后续状态值，实现单步预测。通过不断地将最新的预测值添加到输入 HoGRC 中，可以进行多步预测。HoGRC 框架使用上述结构进行动态预测。具体来说，系统根据推断的高阶结构和历史观测数据，预测节点在未来的状态。此过程是迭代的，系统通过不断更新高阶结构信息，逐步提高预测的准确性。

### 3.4 损失函数定义

本文的框架主要是 RC 储备池计算，只涉及到单一输出层的训练，即只有  $\mathbf{W}_{out}$  需要训练，它可以通过带有损失函数的 Tikhonov 正则化回归 [15] 显式求解，因此损失函数如公式5所示。

$$\mathcal{L}_{\Delta t} = \sum_t \{ \mathbf{W}_{out} r(t + \Delta t) - [x(t + \Delta t) - x(t)] \}^2 + \lambda_W \|\mathbf{W}_{out}\| \quad (5)$$

其中  $\lambda_W$  是正则化系数。利用经过训练的 HoGRC，可以准确地实现动态预测。

## 4 复现细节

### 4.1 与已有开源代码对比

此部分为必填内容。如果没有参考任何相关源代码，请在此明确申明。如果复现过程中引用参考了任何其他人发布的代码，请列出所有引用代码并详细描述使用情况。同时应在此部分突出你自己的工作，包括创新增量、显著改进或者新功能等，应该有足够差异和优势来证明你的工作量与技术贡献。

作者提供了项目源代码，链接如下：<https://github.com/CsnowyLstar/HoGRC>

该代码提供了三个示例程序。

An\_Example\_for\_Task\_1.py 用于推断 Lorenz63 系统中节点 z 的高阶邻居。

`An_Example_for_Task_2.py` 则用于预测耦合的 FitzHugh-Nagumo 系统，展示了使用不同方法得到的预测结果。

`Automatic_Example_for_Task_1.py` 结合了本文中的算法 1，实现了自动化结构推断，自动化地推断 Lorenz63 系统中的高阶邻居关系，作为 `An_Example_for_Task_1.py` 任务的自动化版本。

代码主要包括以下几个部分：

超参数设置：所有相关的超参数都存储在变量 “`args`” 中，这是设置模型和实验的基础。

数据生成：通过调用文件 `dataset/Data\_CL.py` 生成 CL63 系统的实验数据，并将数据存储在 `dataset/data` 文件夹中。这个部分用于为后续的模型训练提供基础数据。

高阶结构配置：这一部分配置的是高阶结构，作为高阶 RC (HoGRC) 模型的附加输入。高阶结构通过对数据的进一步处理，为模型提供更丰富的信息。

模型训练：在这一部分，主要导入三种模型：RC (常规回归计算模型)、PRC (预测回归计算模型) 和 HoGRC (高阶 Granger 回归计算模型)。这些模型分别对应 `Model\_RC.py`、`Model\_PRC.py` 和 `Model\_HoGRC.py` 文档。在使用 HoGRC 模型时，结合高阶结构，并使用岭回归训练输出层参数 (`$W_{\text{out}}`) 和偏置项。

模型测试：在测试阶段，评估 HoGRC 模型的单步预测误差和多步预测误差。

通过以上五个步骤的协同工作，可以完成结构推断和动态预测任务，进一步提升模型的预测能力。更多关于 HoGRC 框架的细节可以参考相关论文。

在我的相关工作中，我对多个复杂系统进行了深入的实验和对比分析。首先，我使用了 HoGRC (Higher-order Granger Reservoir Computing) 模型在三个具有挑战性的动态系统上进行了多步状态预测：耦合 FitzHugh-Nagumo 系统、耦合 Rossler 系统以及耦合简化霍奇金-赫克斯利系统。这些系统具有非线性耦合和高度复杂的动态行为，传统的预测方法通常难以应对。而 HoGRC 模型的应用成功地验证了本文框架的有效性和可靠性，在这些复杂系统中提供了出色的预测性能。

在对比实验中，我将 HoGRC 与其他四种模型进行了全面的对比，包括 RC (Reservoir Computing)、PRC (Parallel Reservoir Computing)、NDCN (Neural Dynamics on Complex Network) 以及 TPI (Two-Phase Inference)。这些对比实验帮助我深入了解不同模型在处理上述三个系统时的优劣势，并为进一步优化和改进 HoGRC 提供了宝贵的依据。通过这些实验，展示了 HoGRC 在多步状态预测中的优势，特别是在复杂和高维系统中，HoGRC 表现出了较其他模型更为优越的预测精度和稳定性。

为了进一步验证模型的实用性，我将 HoGRC 应用于实际的英国电网系统，这一实际网络系统涉及多个动态因素和非线性关系，预测精度要求较高。通过在这一真实世界的系统上进行验证，我进一步确认了 HoGRC 模型在实际应用中的适应性和有效性，展现了模型在复杂工程应用中的巨大潜力。

此外，为了提升预测效率和准确性，我还对结构推断模块进行了重要的改进。传统方法在进行结构推断时往往需要多次迭代，导致计算时间较长，影响预测效率。针对这一问题，我

提出了新的改进方案，改进后的模型能够快速推断高阶结构，并通过并行计算策略加速了预测过程。这一改进显著提高了模型在多步预测中的计算效率，并且通过减少误差积累，提升了状态预测的准确率。

综上所述，我的相关工作包括在多个复杂系统上进行了全面验证，与其他四个模型进行对比实验，在实际网络系统中进行了应用等方面，验证了该模型在动态预测上的准确性与可扩展性。同时，通过对模型的优化和改进，我成功提升了预测性能，为实际应用提供了更强的支持。

## 4.2 实验环境搭建

为了方便管理项目环境，创建新的 Conda 环境。项目要求使用 Python 3.9.7。通过以下指令安装 Conda 环境并激活：

```
conda create -n HoGRC python=3.9.7  
conda activate HoGRC
```

项目代码提供了 requirements.txt 文件，用于说明 Python 环境所需要的依赖项。注意，PyTorch 2.1.2 版本支持 CUDA 11.8 和 CUDA 12.1，可以根据系统和硬件配置选择适合的版本进行安装。

```
1  joblib==1.3.2  
2  matplotlib==3.8.2  
3  numpy==1.26.2  
4  pandas==2.1.4  
5  scipy==1.11.4  
6  scikit-learn==1.3.2  
7  torch==2.1.2  
8  torchdiffeq==0.2.3
```

图 3. requirements 文件内容

可以直接使用以下指令进行环境配置：

```
pip install -r requirements.txt
```

## 4.3 创新点

由于状态预测部分已经足够完善，我针对本文的结构推断部分，进行了部分改进。在本文的结构预测方法中，是通过简单的寻找下一步满足公式 2 的结构，并直接进行替换，继续进行迭代。这种方法虽然能完成基本的预测任务，但往往无法充分优化预测的准确性，也限制了预测结果的精度和效率。因此，我决定对这一方法进行改进。新的改进方法是首先在每一步中寻找下一步的最优结构，而不是仅仅选择满足条件的结构。这意味着，除了简单的条件判断外，将计算所有可能的下一步结构的预测误差，并根据这些误差选择最优的结构。这一做法能够更准确地识别在预测过程中最可能产生较小误差的路径，从而提高整体预测的准确

性。此外，我还从计算效率的角度进行了考虑。由于在每一轮迭代中需要对多个结构的预测误差进行计算，传统的顺序执行方式可能会导致效率低下。为了解决这一问题，针对每一步预测中的多个可能路径，我采用了并行执行策略，显著提高了计算效率。通过这一并行化处理，能够在更短的时间内计算出所有结构的预测误差，并根据误差最小的结构进行迭代，尤其是在面对较为复杂或高维的预测任务时，能够显著提高整体效率，并加速模型的迭代过程。将改进后的结构推断模块应用于 Lorenz63 系统后，推断过程显示出明显的优势，结果如图 4 和图 5 所示。

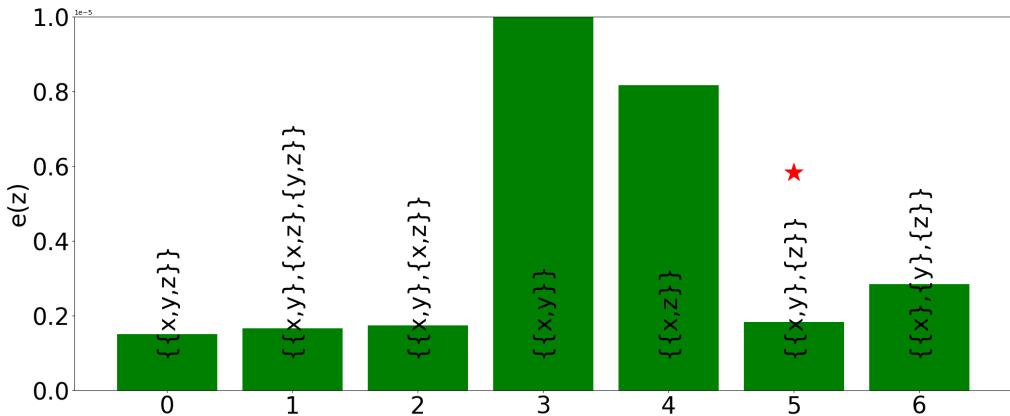


图 4. 节点 z 高阶结构推断结果

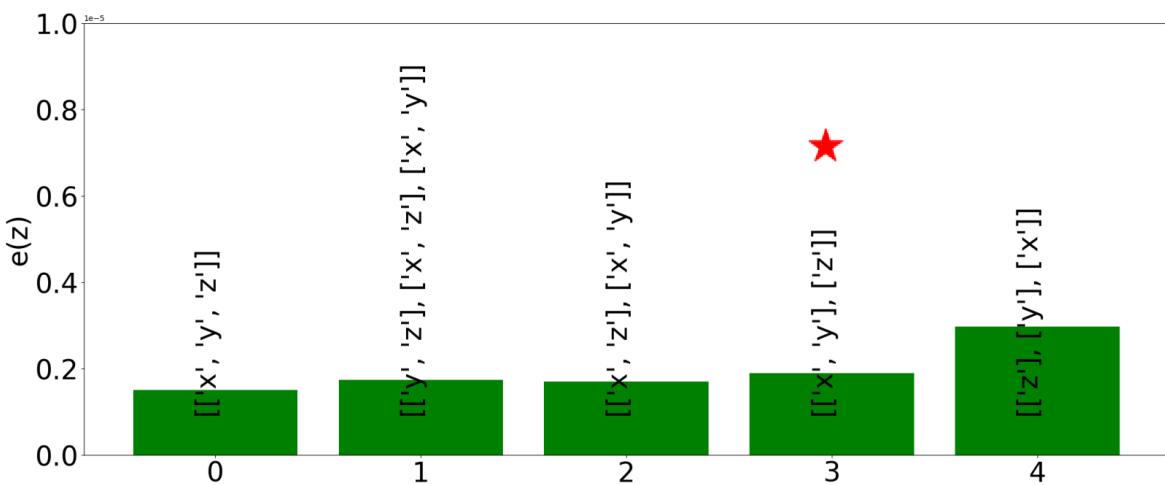


图 5. 改进后节点 z 高阶结构推断结果

从这两个图的对比分析中，我们可以清晰地看到改进后的结构推断方法在迭代效率和准确性方面的优势。图 4 展示了传统方法的表现。虽然该方法也能找到一个较好的结构，但迭代次数明显较多，且误差的减小速度较慢。这表明传统方法在寻找最优结构时的效率较低，往往需要更多的计算步骤和时间来达到较为满意的预测效果。红色星形标记的最优结构位置在迭代过程中较为滞后，表明传统方法在多次迭代中仍无法有效找到最优结构。在图 5 中，改进后的方法明显减少了迭代次数，并更快速地找到了最优结构。通过计算所有可能的下一步结构的预测误差，并根据这些误差选择最优结构，改进方法在较少的步骤中就能显著降低误差

并找到最佳的预测路径。红色星形标记表示最优结构的选择位置，它显示出经过优化后，最优结构被迅速选中，从而减少了迭代过程中的时间开销和计算资源消耗。

从对比中可以看出，改进后的方法通过引入“最优结构选择”和“并行计算”策略，大幅提高了预测的效率。传统方法在多个步骤中进行搜索，效率较低，且误差逐渐积累，最终导致预测结果的精度不如改进后的方法。因此，改进后的结构推断方法在减少迭代次数、提高计算效率和加速最优结构的找到方面表现优越，尤其在复杂系统中，能够显著节省计算时间并提高预测的准确性。在这两个图中，推断出的最优结构一致，这可能是因为节点的耦合关系简单，只有三个变量相互影响，但是这也侧面验证了改进后方法的准确性。

为了验证改进后的结构推断方法是否能够显著提高模型的准确率，我们在 CRoS（耦合 Rossler 系统）上进行了实验验证。通过对改进前后的模型预测结果，使用 VPS（有效预测步数）作为主要衡量指标，来评估模型在多步预测任务中的表现。VPS 反映了模型在长期预测中维持较高准确率的能力，是评估预测精度和效率的关键指标。在 CRoS 系统中，由于其高度的非线性和复杂的动力学行为，准确预测系统的长期发展是一项挑战。因此，使用 VPS 来衡量不同方法在该系统上的表现，可以直观地展示改进后的结构推断方法在减少误差积累、提高预测准确性方面的优势。

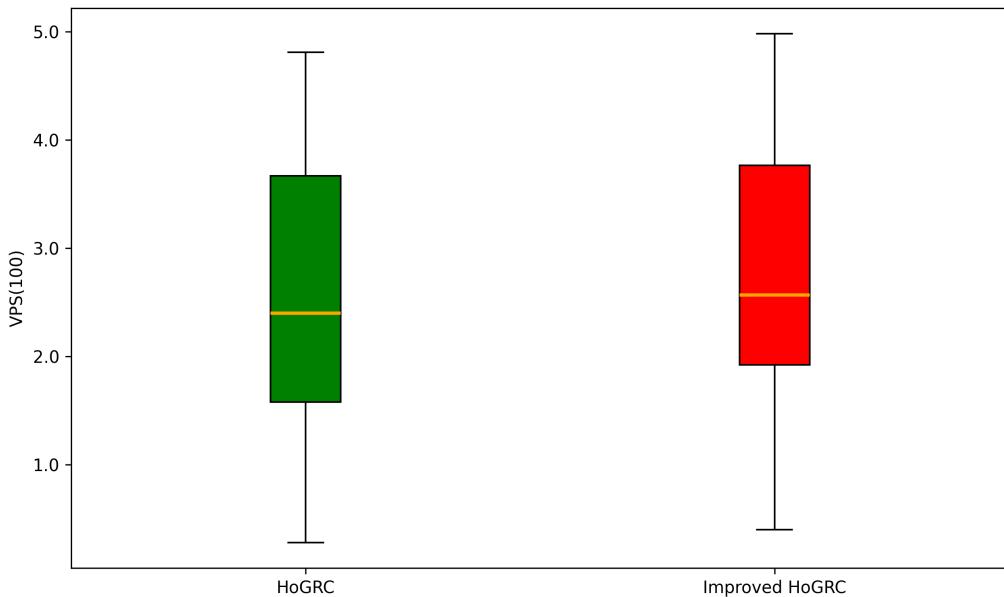


图 6. 改进前后模型预测步长对比

在图 6 中，绿色框表示原始的 HoGRC 方法，而红色框表示改进后的 HoGRC 方法。我们可以看到，改进后的 HoGRC 方法的 VPS 显著高于原始的 HoGRC 方法。这表明，在 CRoS 系统的预测任务中，改进后的结构推断方法能够保持更长时间的高预测准确性。特别是在多步预测过程中，改进后的 HoGRC 能够有效减少误差积累，延长有效预测的步长，从而提供更稳定和准确的长期预测结果。

此外，HoGRC 方法的 VPS 较低，这表明在较长时间步的预测中，模型的预测误差迅速

累积，导致精度下降。相比之下，改进后的 HoGRC 方法，通过引入最优结构选择和并行计算策略，显著提高了预测精度，减少了误差扩展的影响，因此在长时间预测中能够保持较低的误差并稳定进行预测。通过优化结构推断模块，HoGRC 方法在 CRoS 系统上的表现得到了显著提升，尤其是在长期多步预测任务中，改进后的方法在 VPS 上表现出更强的能力，验证了改进方法的有效性和优势。

通过这些改进，新的结构预测方法不仅能够提高预测的精度，还能显著提升计算效率。这使得模型在处理大规模数据或复杂系统时，能够在保证准确性的同时，减少计算资源的消耗，为实际应用提供了更加高效的解决方案。

## 5 实验结果分析

### 5.1 结构推断

本部分对实验所得结果进行分析，详细对实验内容进行说明，实验结果进行描述并分析。针对本文的任务——结构推断，以 Loren63 系统中节点 z 的高阶结构为例。通过 HoGRC 框架，计算了不同的候选高阶结构对预测误差的影响，目的是确定最优的高阶邻居结构

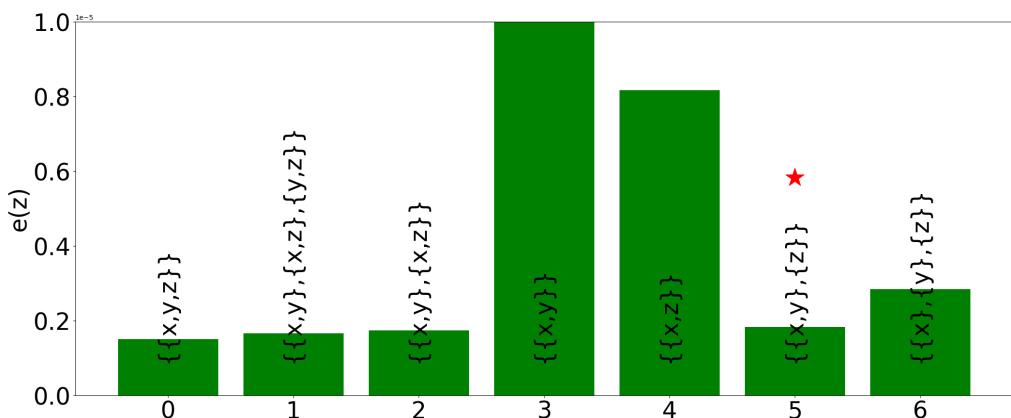


图 7. 节点 z 高阶结构推断结果

这张图展示了 Loren63 系统中节点 z 的高阶邻居推断过程中的候选高阶结构 (candidate complexes) 与其对应的预测误差 ( $e(z)$ ) 的关系。。每一根柱子代表一个不同的候选高阶结构，以及与之对应的预测误差。横轴表示候选高阶结构，纵轴则表示每个高阶结构对应的误差 ( $e(z)$ )。红色的星号标记了最优候选高阶结构，它对应于为节点 z 推断出的最优高阶结构。

从这张图可以看出，某些候选高阶结构（如  $x, y$ ）能显著降低误差，而另一些候选高阶结构（如  $x, y, z$ ）则导致较高的预测误差。说明了通过迭代算法可以选择最佳的高阶结构，从而优化系统结构，提升预测性能。通过选择能最小化预测误差的候高阶结构，HoGRC 框架可以有效地推断出节点 z 的最优高阶结构。

### 5.2 状态预测

首先考虑耦合的 FitzHugh-Nagumo 系统 (FHNS) [16]，描述了神经元脉冲放电的经典非线性动力学模型。它由两个主要的微分方程组成，通常用来模拟神经元的激活和恢复过程。

FHNS 系统由两个变量组成：一个代表神经元的膜电位（激活变量），另一个代表恢复变量（通常表示神经元的恢复速率）。在耦合的 FHNS 系统中，多个神经元的膜电位和恢复变量通过耦合项进行相互作用，可以用来模拟神经网络的活动、研究神经脉冲传播及其在复杂网络中的作用。耦合 FHNS 系统的动力学函数如公式 6 所示。

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) &= F(x_i^1, x_i^2) = (x_i^1 - (x_i^1)^3 - x_i^2, a + bx_i^1 + cx_i^2)^\top, \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= G(x_i^1, x_j^1) = \frac{1}{k_i^{\text{in}}}(x_i^1 - x_j^1).\end{aligned}\quad (6)$$

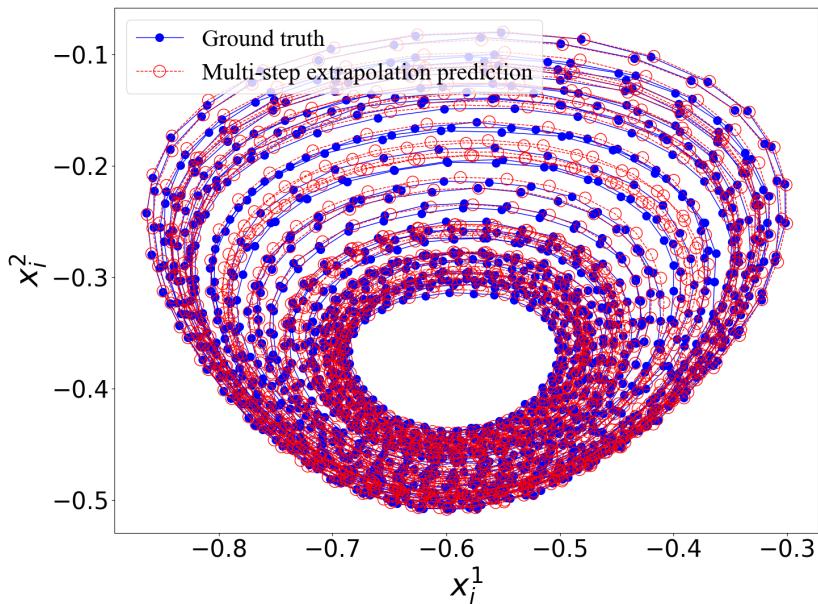


图 8. HoGRC 模型在 FitzHugh-Nagumo (FHN) 系统中的状态预测

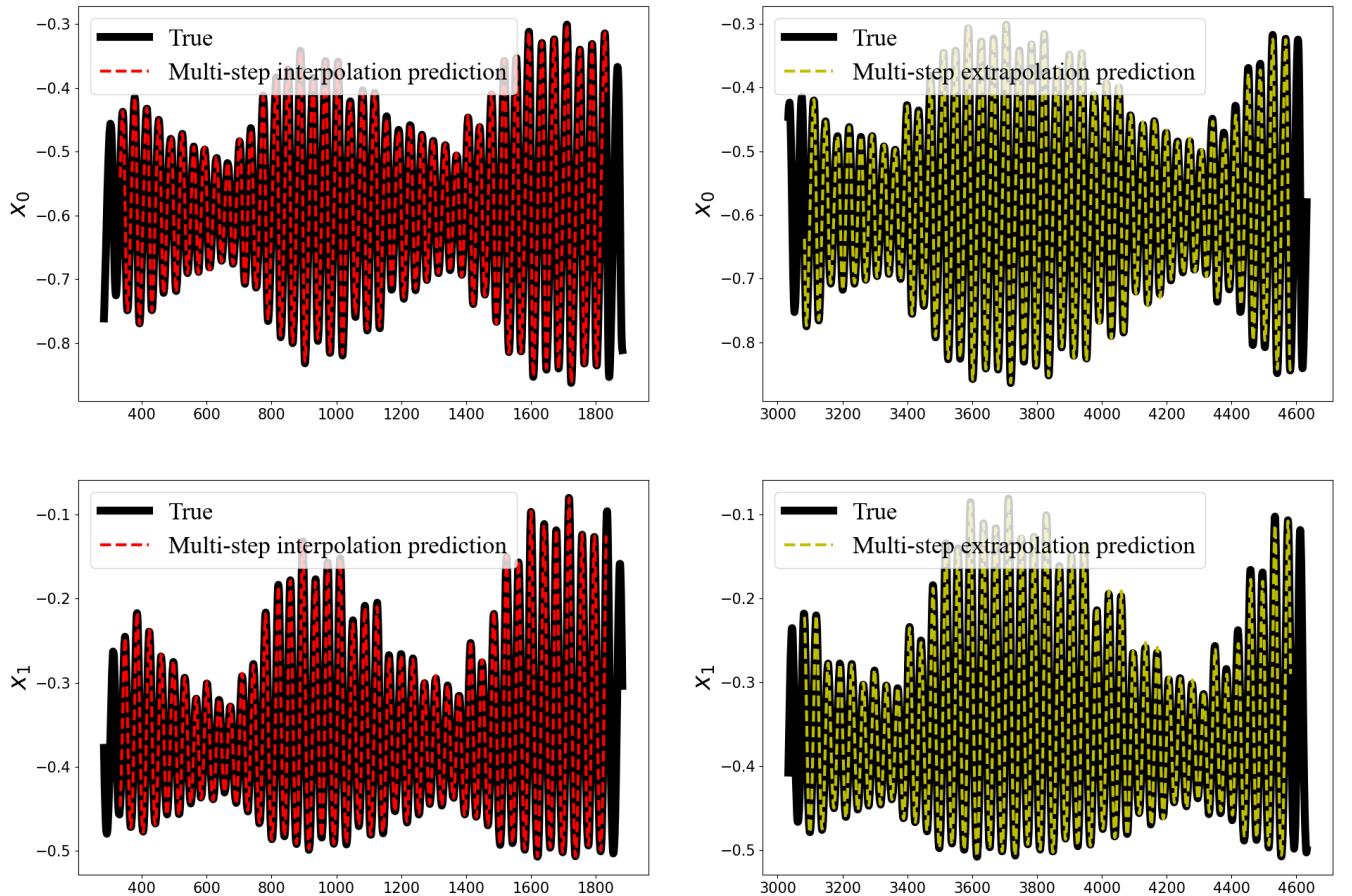


图 9. HoGRC 模型在 FitzHugh-Nagumo (FHN) 系统不同维度的状态预测

从上图中可以看出，本文提出的 HoGRC 框架预测的轨迹与 FHNS 系统的真实轨迹非常匹配。图 8展示了系统的多步外推预测（Multi-step extrapolation prediction）与真实数据（Ground truth）的比较。在图中，蓝色实心圆表示真实数据点，而红色空心圆代表多步外推预测的结果。这些数据展示了 HoGRC 框架在进行多步预测时如何利用过去的观测数据推断系统的未来状态，并且成功地捕捉到系统的动态变化。

图 9展示了另一个情形，包含了黑色实线、红色虚线和黄色虚线。其中，黑色实线表示真实数据（True），而红色虚线代表多步插值预测的结果。这种图示表明，HoGRC 框架在进行短期插值预测时，能够有效地拟合实际数据，并在系统的短期动态上提供较为准确的预测。右侧的图中显示了黄色虚线，它表示多步外推预测的结果，与黑色实线的真实数据相比，展示了预测的外推效果。

Rossler 系统本身是一个三维非线性动力学模型，通常用来描述混沌现象。在耦合的 Rossler 系统 (CRoS) [17] 上实验，CRoS 是由多个 Rossler 子系统通过耦合项相互作用而组成的动态系统，通过在多个子系统之间引入相互作用，例如在每个子系统的状态变量上施加耦合项，从而使得各子系统之间能够相互影响。CRoS 的应用范围非常广泛，能够用来建模如电路系统、神经网络、生态系统等复杂非线性系统。CRoS 系统的动力学函数如公式 7所示

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) &= F(x_i^1, x_i^2, x_i^3) = (-h_i x_i^2 - x_i^3, h_i x_i^1 + ax_i^2, b + x_i^3(x_i^1 + c))^{\top}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= G(x_i^1, x_j^1) = x_j^1 - x_i^1.\end{aligned}\quad (7)$$

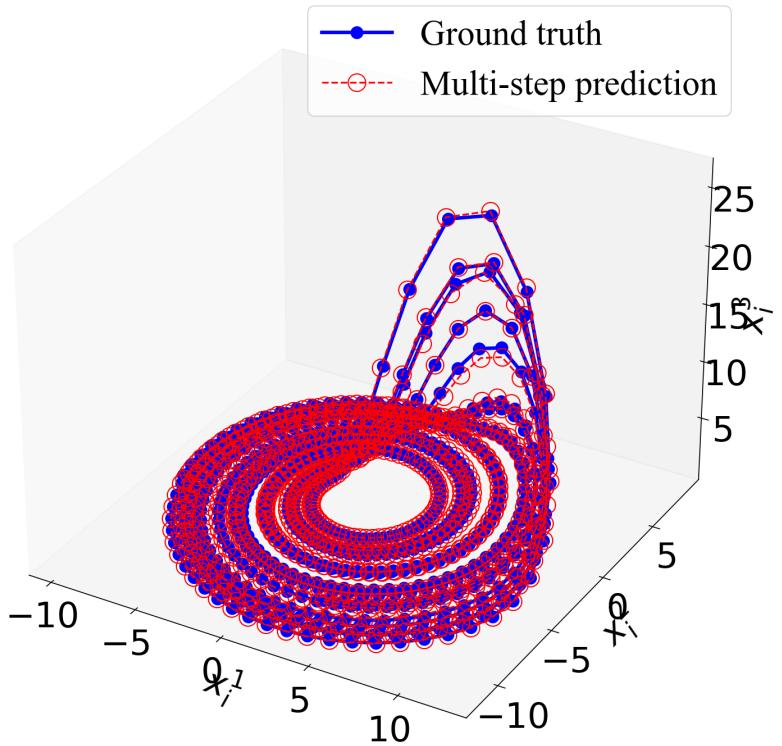


图 10. HoGRC 模型在 coupled Rossler (CRoS) 系统中的状态预测

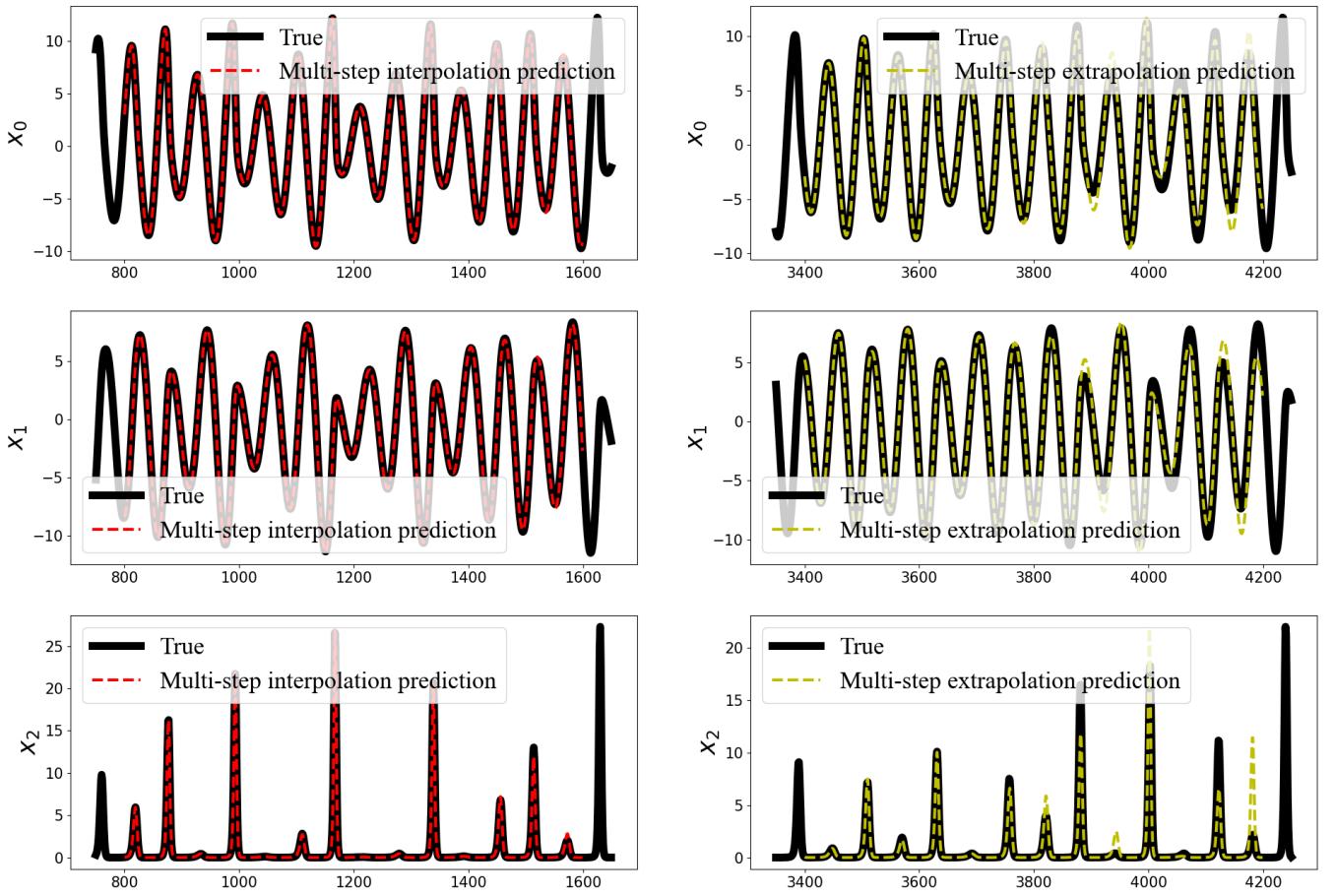


图 11. HoGRC 模型在 coupled Rossler (CRoS) 系统不同维度的状态预测

从图 10 可以看出多步预测与真实轨迹之间的对比。红色虚线代表通过多步预测获得的轨迹，而蓝色实线显示了真实的动态轨迹。随着预测步骤的增加，多步预测的结果逐渐偏离真实轨迹，这表明在长期预测中，模型的预测精度有所下降。这种现象通常出现在复杂动态系统中，尤其是当系统的动态行为较为复杂时，随着预测步数的增加，误差也会累积，从而影响预测的准确性。在图 11 中，展示了三个变量的预测结果： $x_0$ 、 $x_1$  和  $x_2$ 。左侧为插值预测结果（红色虚线），右侧则为外推预测结果（黄色虚线）。从图中可以看到，插值预测在短期内与真实轨迹较为接近，但随着时间的推移，误差逐渐增大。外推预测则呈现出更为明显的误差放大趋势，特别是在长时间步数的情况下。由此可见，虽然插值预测能够提供较为准确的结果，但外推预测在复杂动态系统中面临着较大的挑战，特别是在长时间的预测任务中，误差容易迅速累积。

耦合的 simplified HodgkinHuxley (CHHS) 系统 [18] 是对经典 Hodgkin-Huxley 模型的简化版本，旨在模拟神经元的电活动和神经脉冲的传播。简化后的 Hodgkin-Huxley 模型通过简化部分参数和方程，使其计算更加高效，同时仍然保留了神经脉冲放电的基本特征。在耦合的简化 Hodgkin-Huxley 系统中，多个神经元通过电连接相互作用，这些耦合关系通常通过电流传递的方式来实现。在 CHHS 系统中，每个神经元的膜电位由一个二阶微分方程表示，电流输入由外部刺激和邻近神经元的放电产生的耦合电流组成。通过调节不同神经元之间的耦合强度，可以控制神经元之间的相互作用，使得系统展现出多种动态行为。耦合简化 Hodgkin-Huxley 系统在神经科学和生物物理学中有广泛应用，尤其用于研究神经元之间的同步化行为、神经信号的传播、以及在更大规模的神经网络中如何通过局部的相互作用引发全

局行为。耦合简化 Hodgkin-Huxley 系统的动力学函数如公式 8 所示

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{x}_i) &= F(x_i^1, x_i^2, x_i^3) = (x_i^2 - a(x_i^1)^3 + b(x_i^1)^2 - x_i^3 + I_{\text{ext}}, c - u(x_i^1)^2 - x_i^2, r[s(x_i^1 - x_0) - x_i^3])^\top \\
 \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= G(x_i^1, x_j^1) = (V_{\text{syn}} - x_i^1) \cdot \mu(x_j^1), \quad \mu(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(x - \Omega_{\text{syn}})}}
 \end{aligned} \tag{8}$$

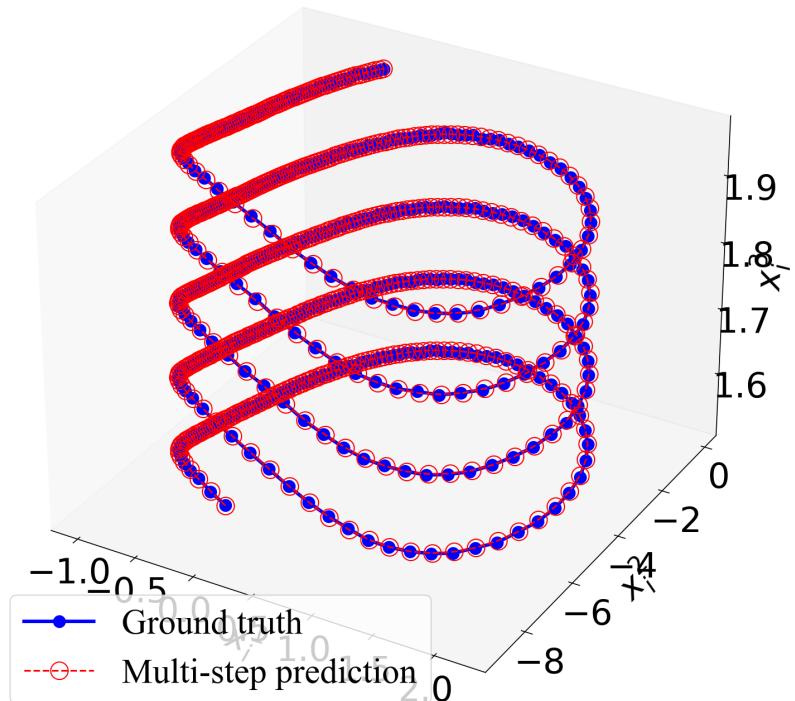


图 12. HoGRC 模型在 coupled simplified HodgkinHuxley (CHHS) 系统中的状态预测

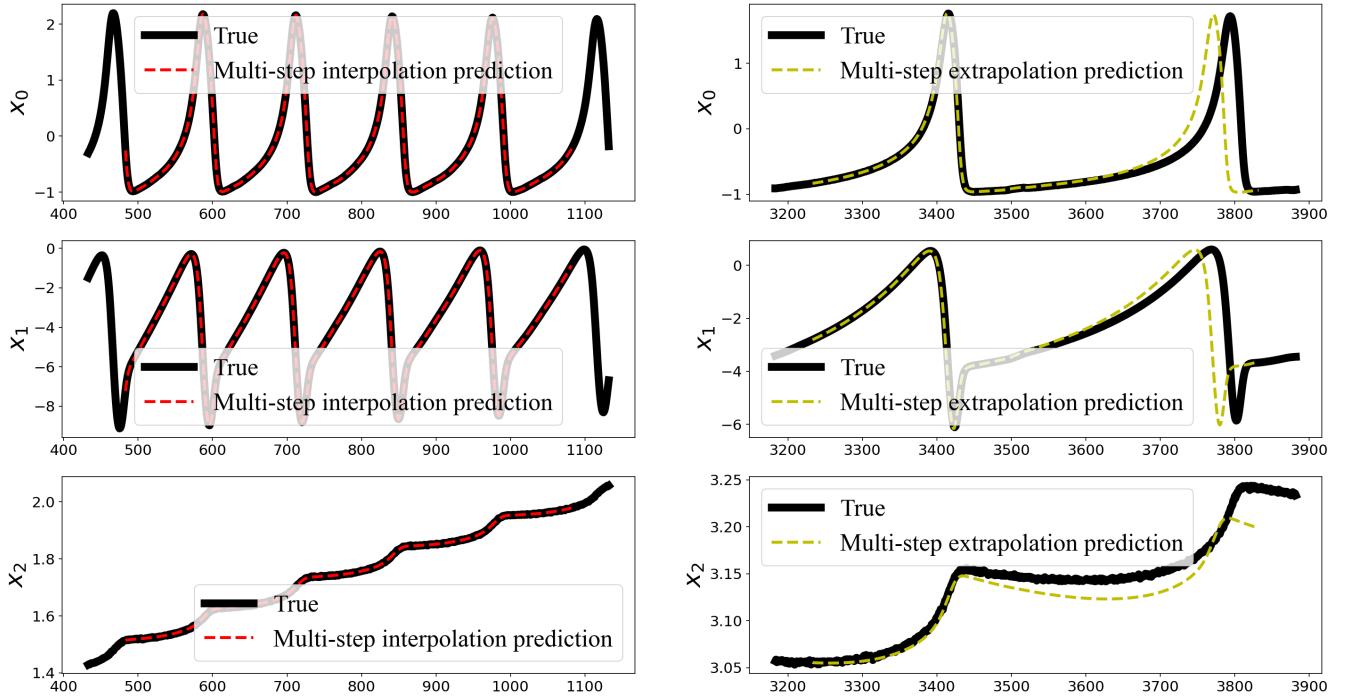


图 13. HoGRC 模型在 coupled simplified HodgkinHuxley (CHHS) 系统不同维度的状态预测

在图 12 中，展示了一个动态系统的三维轨迹，红色虚线代表通过多步预测获得的轨迹，而蓝色实线为真实轨迹。随着预测步数的增加，预测的轨迹逐渐偏离真实轨迹，表明在长时间的多步预测中，误差会随着时间的积累而增大。这种现象在复杂动态系统中尤为明显，尤其是在长时间的外推预测中，预测结果逐渐偏离真实轨迹，表明系统的复杂性和非线性特征使得长时间预测面临较大的挑战。图 13 展示了三个变量 ( $x_0, x_1, x_2$ ) 的插值预测和外推预测结果与真实值的对比。在插值预测中，模型能够较为准确地跟随真实轨迹，尤其是在短期内，误差较小。然而，随着时间步数的增加，插值预测的误差逐渐放大，特别是在  $x_2$  变量的预测中更为明显。相比之下，外推预测的误差更大，随着预测步数的延长，偏差显著增大。这表明，在长时间的预测任务中，尤其是对于复杂和非线性耦合的系统，外推预测的精度较低，模型的预测能力需要进一步提升以应对这些挑战。

### 5.3 模型对比实验

除了 RC 和 PRC 方法之外，本文还使用了最近提出的两种方法进行对比分析，即复杂网络神经动力学 (NDCN) [19] 和两阶段推理 (TPI) [2]，作为 NDS 预测的基线方法。NDCN 将图神经网络与微分方程相结合来学习和预测复杂的网络动态，而 TPI 自动学习一些基函数来推断复杂系统行为的动态方程以进行网络动态预测。TPI 首先定义了一个基本函数库，包括多项式、三角函数、指数函数、分数函数、缩放函数和各种激活函数。然后，它根据已知的时间序列数据进行训练，并使用这些基函数的线性组合来模拟系统动力学。图 14、图 15、图 16 分别是使用上述五种方法对 FHNS、CRoS 和 CHHS 三个系统进行预测对比，VPS 表示有效预测步长，即一定误差范围内的最大预测步长。

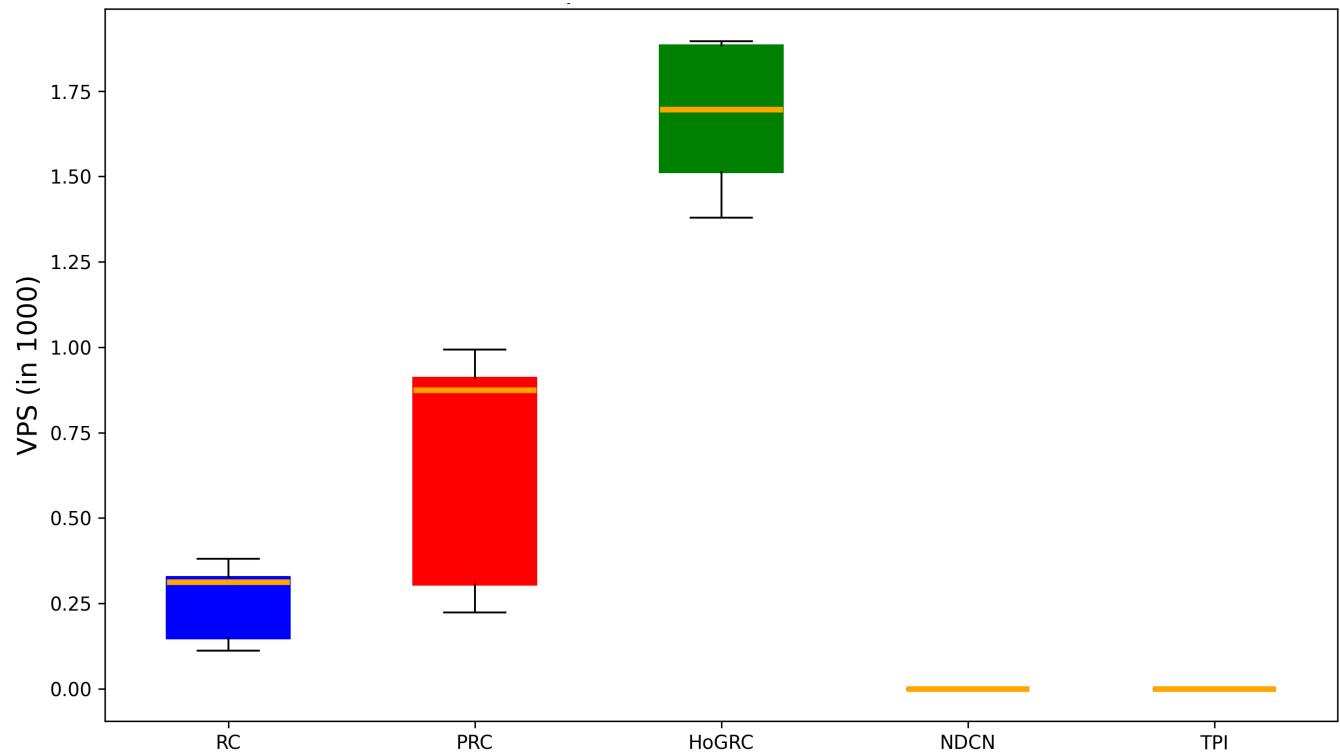


图 14. 不同模型在 FNH 系统的有效预测步长对比

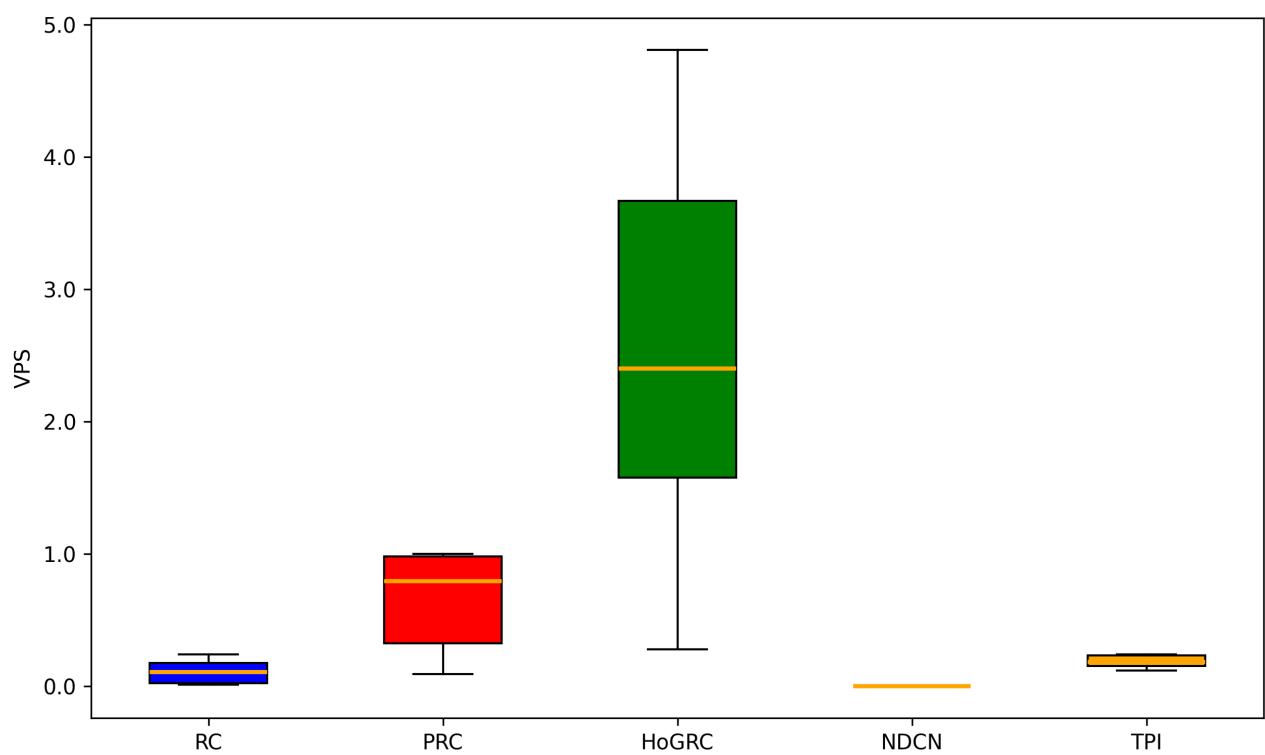


图 15. 不同模型在 CRoS 系统的有效预测步长对比

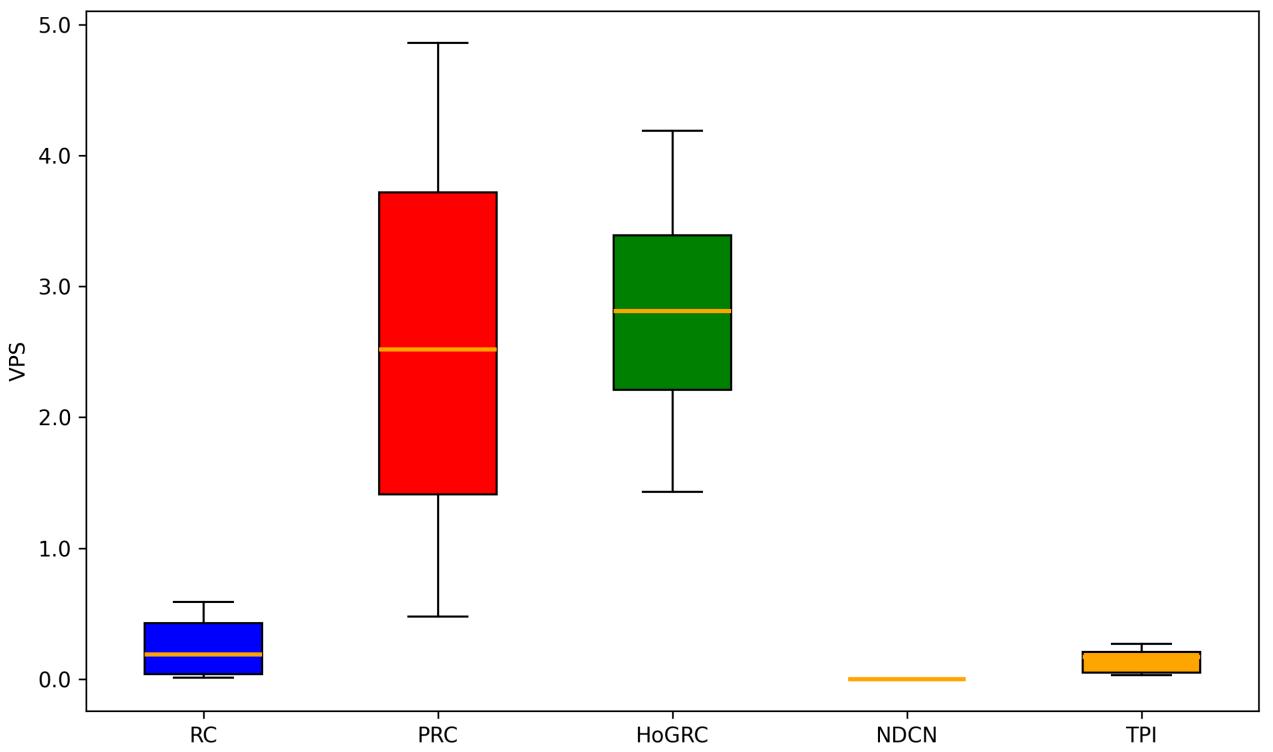


图 16. 不同模型在 CHHS 系统的有效预测步长对比

从图 14、图 15 和图 16 中可以看出，HoGRC 在 FHNS (FitzHugh-Nagumo 系统)、CRoS (耦合 Rossler 系统) 和 CHHS (耦合简化霍奇金-赫克斯利系统) 中展现了显著的优势。HoGRC 不仅能够提供更长时间的准确预测，而且在多个复杂系统中的稳定性也远超其他方法。从箱形图中可以看到，HoGRC 的 VPS (有效预测步数) 明显高于其他方法，表明其能够有效处理复杂的动态行为，并能够维持长时间的高预测精度。

HoGRC 的优势在于它能够结合高阶结构推断与动态预测。这种方法通过有效地利用系统的高阶相互关系，显著提高了预测的准确性，尤其是在面对复杂的非线性耦合和高维动态系统时。通过高阶 Granger 因果推断，HoGRC 能够更好地捕捉到系统的内在动态特性，因此在插值和外推预测任务中都表现得更加出色，减少了预测误差的累积。相比之下，RC 方法虽然在一些简单系统中能够提供一定的预测能力，但在处理复杂系统时，其有效预测步数较低，且长时间预测时的误差逐渐增大。RC 方法没有足够地利用系统的高阶结构，因此在长时间预测中容易受到误差放大的影响，预测结果相对不稳定。

PRC 虽然通过引入局部结构来改善 RC 方法，但仍然存在一定的局限性。PRC 在一些复杂系统中的表现不如 HoGRC，尤其是在长时间的外推预测中，无法有效利用高阶因果关系，从而导致预测精度相对较低。此外，NDCN 和 TPI 方法在本次实验中的表现也相对较差。NDCN 作为一种基于图神经网络的模型，虽然能够处理复杂网络，但在非线性系统中效果有限。但是由于本文涉及的系统具有较为复杂的混沌特性，而 NDCN 适用于趋于平衡的复杂网络系统，因此无法发挥它的模型优势。此外，由于本文涉及的网络动态系统的实验数据量较少，且不同节点的自身动态以及节点间的交互动态也不尽相同，TPI 无法有效捕捉系统的动

态变化，预测能力较弱，表现不佳。另外，使用上述两种方法需要提前了解系统的空间结构信息。相比之下，我们的方法不仅可以推断底层耦合网络，还可以做出更长期的预测。因此，HoGRC 方法在网络动态的预测问题上也具有优势。

总的来说，HoGRC 在复杂系统中的表现明显优于其他方法，特别是在长期预测和多步预测任务中。它能够更好地处理复杂的高维和非线性耦合系统，展示出更高的预测精度和更强的稳定性。

#### 5.4 真实网络实验

为了更好地证明模型的适用性，本文将 HoGRC 框架应用到实际的电力系统中。选择英国电网 [20] 作为网络结构，其中包括 120 个单元（10 个发电机和 110 个用户）和 165 条无向边。为了更好地描述电网动态，本文考虑一个具有高阶相互作用的更通用的 Kuramoto 模型 [21]，如公式 9：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \gamma_1 \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) + \gamma_2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N B_{ijk} \sin(\theta_j + \theta_k - 2\theta_i) \quad (9)$$

而成对的和高阶的相互作用被编码在邻接矩阵  $A$  和邻接张量  $B$  中。在特定的耦合设置下，这种系统表现出极其复杂的混沌动力学而不是同步。

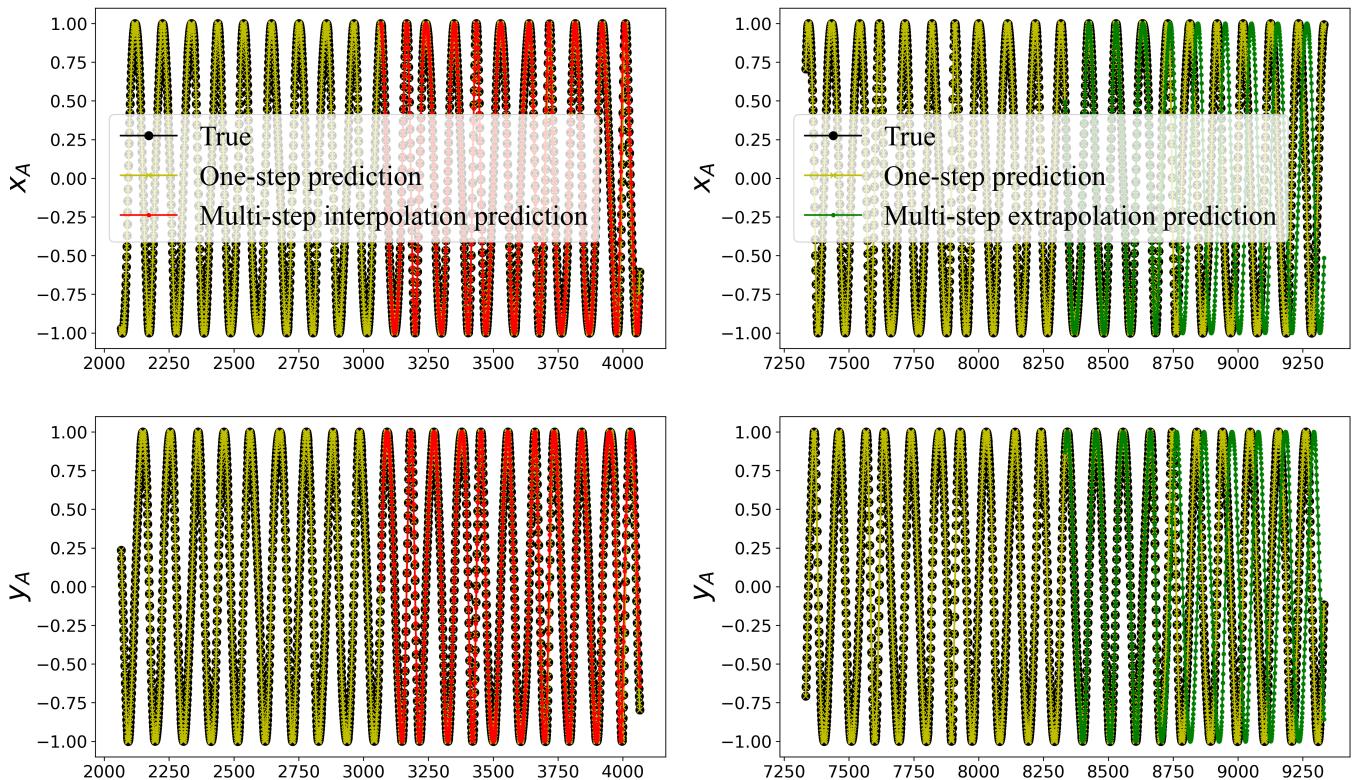


图 17. HoGRC 在英国电力网络上的应用

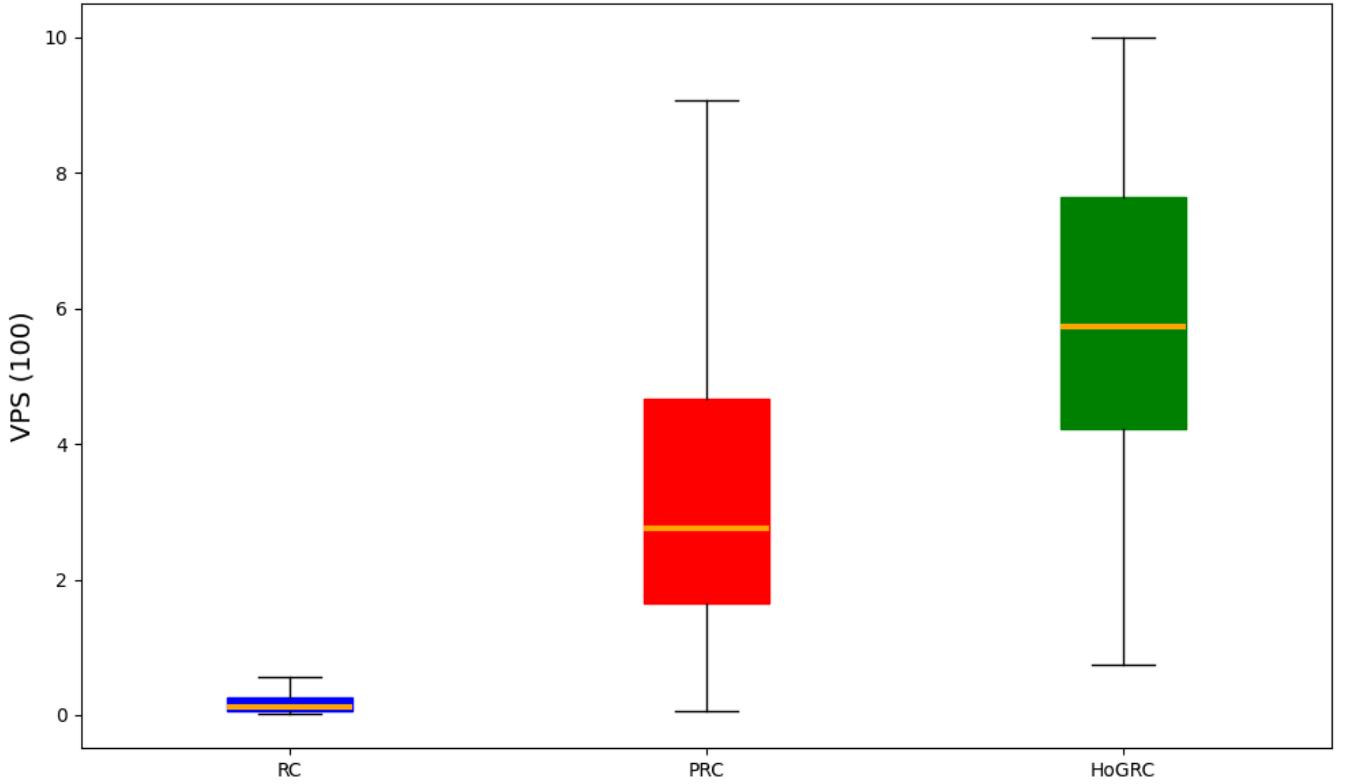


图 18. 不同模型在英国电网系统的有效预测步长对比

为了验证本文方法的优势，通过识别英国电网中的每个不同三角形并生成实验数据来构建高阶相互作用。根据这些图表的分析，HoGR 方法在电力系统预测中的表现明显优于其他方法。首先，图 17清楚地展示了 HoGRC 在单步预测、多步插值预测和多步外推预测中的优越性。在短期预测中，HoGRC 能够紧密地跟踪电力系统的真实轨迹（黑色实线），并与插值预测（红色虚线）保持高度一致。这表明 HoGRC 在处理电力系统中常见的短期动态变化时非常有效。尤其在进行外推预测时（绿色虚线），HoGRC 展示了相对较小的误差，能够在较长时间步内提供更稳定的预测结果。

在预测任务中，从图 18中可以看出，HoGRC 在预测有效步数（VPS）方面显著领先于 RC 和 PRC，这主要是因为选取的网络结构具有极大的结构复杂性和高度非线性，这使得传统方法容易过拟合。而本文的方法可以了解系统的真实动态，从而在更长的范围内进行准确的预测。具体来看，HoGRC 的 VPS 高于 4（单位为 1000），表明它能够在较长的时间跨度内保持较高的预测精度。而 RC 和 PRC 的 VPS 较低，尤其是 RC 的 VPS 接近于零，显示出其在电力系统的多步预测中存在较大的局限性。PRC 虽有所改进，但其预测效果仍不如 HoGRC。相比之下，RC 和 PRC 在这些预测任务中的表现较差。RC 的多步预测效果不佳，其预测结果与真实值之间的差距较大，且 VPS 非常低，说明其在面对复杂动态系统时存在较大误差积累。PRC 虽然有所改进，但仍然无法像 HoGRC 那样在长时间步的预测中保持高精度，尤其在外推预测中，PRC 的误差也显著增大。

总的来说，HoGRC 在电力系统的预测中展现了出色的性能，特别是在长时间步的外推预测任务中，能够有效减少误差，提供更精确的长期预测结果。相比其他方法，HoGRC 通过高阶 Granger 因果推断和复杂动态建模，能够更好地捕捉电力系统中的非线性和时变特性，适应系统的长期动态变化。

## 6 总结与展望

本部分对整个文档的内容进行归纳并分析目前实现过程中的不足以及未来可进一步进行研究的方向。本文提出的高阶 Granger 水库计算 (HoGRC) 框架，通过结合高阶因果推理与储备池计算 (RC)，有效解决了复杂动力系统建模和预测中的挑战。HoGRC 框架在推断系统的高阶结构的同时，能够准确捕捉到系统内部深层次的交互关系，并大幅提升了多步预测的精度。通过在多个复杂系统（如耦合 FitzHugh-Nagumo 系统、耦合 Rossler 系统和简化 Hodgkin-Huxley 系统）中的实验，HoGRC 展现了显著的优势，尤其是在长时间的多步预测任务中，能够有效减少误差的积累，并实现稳定的预测性能。与传统的 RC 和 PRC 方法相比，HoGRC 框架能够更好地处理高维和非线性耦合的系统，表现出更高的预测精度和更强的稳定性。

在结构推断方面，HoGRC 通过引入格兰杰因果推理 (GC)，能够揭示复杂系统中的高阶相互作用，进而推断出最优的高阶结构。这一过程不仅增强了系统的动态理解，还为后续的状态预测提供了更准确的信息。而在动态预测方面，HoGRC 通过将推断出的高阶结构信息嵌入储层计算框架，成功提高了多步预测的稳定性和准确性。尤其是在面对复杂的非线性耦合系统时，HoGRC 能够更好地捕捉系统的内在动态特性，减少了预测误差的积累，尤其是在外推预测任务中，表现出了优越性。

尽管 HoGRC 在实验中表现出色，但仍有进一步优化的空间。未来研究可以通过优化高阶结构推断模块，提升其在更加复杂和高维度系统中的适应性和准确性。此外，针对多步预测中的误差累积问题，进一步提高预测精度和减少误差扩展将是未来的研究重点。HoGRC 框架在多个复杂系统中的验证已证明其强大的应用潜力，但仍需在更多的实际应用中验证其效果，尤其是在工程系统和实际网络等复杂环境中的适应性。此外，将 HoGRC 与深度学习、图神经网络等先进方法结合，可能可以进一步提升其在大规模复杂系统中的预测能力和智能化水平。

总之，HoGRC 框架为复杂动力系统的建模与预测提供了一种创新的方法，突破了传统方法的局限，尤其在处理高维、非线性耦合系统时展现了独特的优势。随着后续的研究和优化，HoGRC 有望在更多领域中发挥重要作用，并为复杂系统的动态预测和决策提供有力支持。

## 参考文献

- [1] Sandor Beregi, David AW Barton, Djamel Rezgui, and Simon Neild. Using scientific machine learning for experimental bifurcation analysis of dynamic systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 184:109649, 2023.
- [2] Ting-Ting Gao and Gang Yan. Autonomous inference of complex network dynamics from incomplete and noisy data. *Nature Computational Science*, 2(3):160–168, 2022.
- [3] Laura E Suárez, Agoston Mihalik, Filip Milisav, Kenji Marshall, Mingze Li, Petra E Vértes, Guillaume Lajoie, and Bratislav Misic. Connectome-based reservoir computing with the conn2res toolbox. *Nature Communications*, 15(1):656, 2024.

- [4] Herbert Jaeger and Harald Haas. Harnessing nonlinearity: Predicting chaotic systems and saving energy in wireless communication. *science*, 304(5667):78–80, 2004.
- [5] Jaideep Pathak, Zhixin Lu, Brian R Hunt, Michelle Girvan, and Edward Ott. Using machine learning to replicate chaotic attractors and calculate lyapunov exponents from data. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 27(12), 2017.
- [6] Jaideep Pathak, Brian Hunt, Michelle Girvan, Zhixin Lu, and Edward Ott. Model-free prediction of large spatiotemporally chaotic systems from data: A reservoir computing approach. *Physical review letters*, 120(2):024102, 2018.
- [7] Claudio Gallicchio, Alessio Micheli, and Luca Pedrelli. Deep reservoir computing: A critical experimental analysis. *Neurocomputing*, 268:87–99, 2017.
- [8] Daniel J Gauthier, Erik Boltt, Aaron Griffith, and Wendson AS Barbosa. Next generation reservoir computing. *Nature communications*, 12(1):1–8, 2021.
- [9] Zhixin Lu, Brian R Hunt, and Edward Ott. Attractor reconstruction by machine learning. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(6), 2018.
- [10] Federico Battiston, Enrico Amico, Alain Barrat, Ginestra Bianconi, Guilherme Ferraz de Arruda, Benedetta Franceschiello, Iacopo Iacopini, Sonia Kefi, Vito Latora, Yamir Moreno, Micah M. Murray, Tiago P. Peixoto, Francesco Vaccarino, and Giovanni Petri. The physics of higher-order interactions in complex systems. *NATURE PHYSICS*, 17(10):1093–1098, OCT 2021.
- [11] Michael T. Schaub, Austin R. Benson, Paul Horn, Gabor Lippner, and Ali Jadbabaie. Random walks on simplicial complexes and the normalized hodge 1-laplacian. *SIAM REVIEW*, 62(2):353–391, JUN 2020.
- [12] Per Sebastian Skardal and Alex Arenas. Abrupt desynchronization and extensive multistability in globally coupled oscillator simplexes. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 122(24), JUN 19 2019.
- [13] Unai Alvarez-Rodriguez, Federico Battiston, Guilherme Ferraz de Arruda, Yamir Moreno, Matjaz Perc, and Vito Latora. Evolutionary dynamics of higher-order interactions in social networks. *NATURE HUMAN BEHAVIOUR*, 5(5):586–595, MAY 2021.
- [14] Alex Tank, Ian Covert, Nicholas Foti, Ali Shojaie, and Emily B Fox. Neural granger causality. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 44(8):4267–4279, 2021.
- [15] Andrei Nikolaevich Tikhonov. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization. In *Doklady akademii nauk*, volume 151, pages 501–504. Russian Academy of Sciences, 1963.

- [16] Richard FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical journal*, 1(6):445–466, 1961.
- [17] Li Xiao-Wen and Zheng Zhi-Gang. Phase synchronization of coupled rossler oscillators: amplitude effect. *Communications in Theoretical Physics*, 47(2):265, 2007.
- [18] Mikhail I Rabinovich, Pablo Varona, Allen I Selverston, and Henry DI Abarbanel. Dynamical principles in neuroscience. *Reviews of modern physics*, 78(4):1213–1265, 2006.
- [19] Chengxi Zang and Fei Wang. Neural dynamics on complex networks. In *KDD ‘20: PROCEEDINGS OF THE 26TH ACM SIGKDD INTERNATIONAL CONFERENCE ON KNOWLEDGE DISCOVERY & DATA MINING*, pages 892–902. Assoc Comp Machinery; ACM SIGMOD; ACM SIGKDD, 2020. 26th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD), ELECTR NETWORK, AUG 23-27, 2020.
- [20] Martin Rohden, Andreas Sorge, Marc Timme, and Dirk Witthaut. Self-organized synchronization in decentralized power grids. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 109(6), AUG 9 2012.
- [21] Per Sebastian Skardal and Alex Arenas. Higher order interactions in complex networks of phase oscillators promote abrupt synchronization switching. *COMMUNICATIONS PHYSICS*, 3(1), NOV 30 2020.