# 大规模 MIMO 信号检测的深度展开模拟分叉

#### 摘要

多输入多输出(MIMO)技术是下一代无线通信的关键组成部分。近年来,为了超越传统检测器的性能局限,研究者们已开发出一系列基于深度学习或量子算法的 MIMO 信号检测器。本文重点探讨了模拟分叉算法(SB),这是一种量子算法,并提出了两种提升其检测性能的技术。第一种方法基于 Levenberg-Marquardt 算法的启发,对 SB 进行改进,以消除最大似然检测中的局部极小值。第二项技术则是引入深度展开技术,这是一种深度学习方法,用于优化迭代算法的内部参数。具体来说,使得 SB 的更新规则具备可微性,从而提出了一种深度展开的 SB。数值实验结果有力地证明了,本文所提出的检测器在大规模 MIMO 系统中,相较于现有技术,显著提升了信号检测的性能。 [1]

**关键词:** MIMO; 信号检测; 深度学习; 深度展开; 模拟分叉

### 1 引言

#### 1.1 研究背景

这篇文章的研究背景是基于大规模 MIMO 系统中的信号检测。多输入多输出(MIMO)技术是下一代无线通信的关键技术 [2] [3],能够显著提升系统的容量和可靠性。但在大规模 MIMO 系统中,传统的最大似然检测器计算复杂度高,而最小均方误差(MMSE)检测器 [4] 在信噪比较高时性能下降严重。为了克服这一难题,近年来出现了许多近似最大似然检测器,主要分为两类:

- 基于深度学习(DL)的检测器:深度学习技术已广泛应用于信号处理领域,尤其是深度展开(DU)[5][6],它是构建可训练信号检测器的有力工具[7][8],通过将其与现有迭代算法结合,可嵌入可训练内部参数,并利用反向传播等技术训练这些参数,现已应用于压缩感知[9]、无线通信信号检测等任务。
- 基于量子启发式算法的检测器: 利用量子计算原理,例如量子退火和 Grover 搜索,设计高效的优化算法进行信号检测。量子启发计算在优化和信号处理中已受到关注,量子计算技术(如量子退火 [10]、相干伊辛机 [11])已应用于 MIMO 信号检测且表现出一定性能。

#### 1.2 选题依据

这篇论文研究了大规模 MIMO 系统中的信号检测问题,并提出了两种基于模拟分岔(SB) 算法的改进方法。

SB 算法是一种量子启发式算法,可以有效解决大规模组合优化问题,包括 MIMO 信号检测。然而,在实际应用中,SB 算法虽能有效解决如 MIMO 信号检测这类大规模组合优化问题,但因其参数选择的复杂性,其性能提升面临瓶颈。而该论文通过巧妙的方法成功解决了这一参数优化难题,不仅使算法在处理特定问题时的性能得到大幅提升,还为后续研究提供了宝贵的思路和方法。

我的研究方向同样围绕量子启发式算法的加速与应用,尤其关注 SB 算法,该论文的研究成果与我的研究高度相关且极具启发性,能够为我在算法优化及性能提升方面提供重要的参考和借鉴,所以我选择复现这篇文章,期望能从中汲取精华,推动自己研究的进展。

#### 1.3 研究意义

这篇论文提出的基于模拟分岔 (SB) 算法的改进方法, 对于大规模 MIMO 系统的信号检测具有重要的理论意义和应用价值, 主要体现在以下几个方面:

- 1. **提高信号检测性能**:通过提出两种改进技术,有效解决了基于模拟分叉(SB)算法的 MIMO 检测器存在的问题,如误差下限问题,并显著提升了信号检测性能,使检测器在 高信噪比区域展现出更优的检测性能。
- 2. **降低计算复杂度:** SB 算法作为一种强大的学习算法,其计算复杂度高,适用于大规模 MIMO 系统。
- 3. **推动量子启发算法与深度学习结合**:本文的研究成果表明,量子启发式算法和深度学习技术在信号处理领域具有巨大的应用潜力。

# 2 相关工作

SB (Simulated Bifurcation) 算法作为一种量子启发算法, 近年来被应用于解决 MIMO 信号检测问题, 并取得了不错的效果。以下是一些相关的代表性工作:

#### 2.1 ML-SB

ML-SB 结合了最大似然估计(ML)与模拟分叉算法。其目标是通过最小化接收信号与信道模型之间的误差,找到最可能的发送信号。使用 SB 作为优化工具,将 MIMO 信号检测问题转化为能量最小化问题。ML-SB 在低信噪比(SNR)区域表现优秀,但在高 SNR 区域可能会遇到误差下限问题。

#### 2.2 G-SB

G-SB [12] 是另一种基于 SB 算法的 MIMO 信号检测方法,它通过引入 LMMSE (最小均方误差) 解作为指导来改进 SB 算法。G-SB 旨在降低 SB 算法的误差底限,通过在目标函数中添加一个惩罚项来避免陷入局部最小值。这个惩罚项涉及到 LMMSE 解和信号检测问题的目标函数。尽管 G-SB 在降低误差底限方面表现更好,但它的计算成本较高,因为它需要进行矩阵求逆操作。

### 3 本文方法

#### 3.1 simulated bifurcation (SB) 算法简介

SB [13] 是一种量子启发式算法,用于解决二次无约束二元优化问题 (QUBO)。它通过模拟经典动力学系统来寻找能量函数的局部最小值,并将其应用于 MIMO 信号检测。

#### 3.1.1 原理

SB 是一种受量子 Kerr 非线性参量振荡器启发的经典动力学系统 [14], 用于近似求解二次 无约束二进制优化问题(QUBO)。其能量函数  $E(\sigma) = \sum_{i,j=1}^n J_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ji}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ji}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ji}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ji}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ji}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ji}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ji}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ji}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ij} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ii} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ii} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ii} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ii} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \left(J_{ii} = 0, J_{ii} = J_{ii}, \sigma_i\sigma_j + \sum_{i=1}^n h_i\sigma_i \right)$ 

在 MIMO 信号检测中,将 ML 估计器中的 J 设为  $H^TH$  – diag  $\left(H^TH\right)$  ,h 设为  $-2H^Ty$  ,从而应用于 MIMO 信号检测。

#### 3.1.2 实施步骤

参数设置: 设置  $a_0$   $c_0$  等参数(如  $a_0=1, c_0=2\left[(N-1)/\sum_{i,j}J_{ij}^2\right]^{1/2}$ ),确定时间步长  $\Delta$ 、迭代次数 T ,并设定  $a(t)=t/(\Delta T)$  。

初始化变量: 随机初始化 x(0) 和 y(0) 。

迭代更新: 按更新规则  $x(k+1) = x(k) + \Delta y(k)$  和

$$y(k+1) = y(k) - \Delta \left[ (1 - a(k\Delta))x(k) + c_0(Jx(k) + h) \right] ( \, \underline{\ } \, |x_i(k)| > 1 \, \, \mathrm{B}^{\dagger}, \, \, x_i(k) = \mathrm{sign} \left( x_i(k) \right)$$

, $y_i(k) = 0$ )进行计算,直至达到迭代次数 T ,得到收敛结果  $x^*$  [15]。但该算法存在收敛点 依赖初始点和参数选择的问题,在 MIMO 信号检测中表现为 ML - SB 检测器在高信噪比区 域存在误差下限。

### 3.2 基于 Levenberg-Marquardt 算法 [16] [17] 改进 SB (LM - SB)

本文首先提出了 LM-SB 检测器,它通过引入 LMMSE-like 矩阵来消除 SB 检测器中的局部最小值,从而改善高信噪比区域的性能。

#### 3.2.1 原理

受可训练 MIMO 检测器中使用类似 LMMSE 矩阵改进梯度下降算法的启发,将 LevenbergMarquardt (LM) 算法应用于 SB 算法。通过重新定义 J 和 h ,即  $J = U_{\lambda}H - \mathrm{diag}\left(U_{\lambda}H\right)$  ,  $h = -2U_{\lambda}y$  (其中  $U_{\lambda} = H^{T}\left(HH^{T} + \lambda I\right)^{-1}$ , $\lambda > 0$  为参数),使得 SB 算法在迭代过程中能够更好地逼近全局最小值,从而有可能消除局部最小值导致的检测误差。

#### 3.2.2 实施步骤

参数设置: 在大规模 MIMO 系统中,确定天线数量  $N_t$  和  $N_r$  ,对于 SB 算法部分参数设定为  $a_0=1$  , $c_0=2\left[(N-1)/\sum_{i,j}J_{ij}^2\right]^{1/2}$  (N 为相关维度), $a(t)=t/(\Delta T)$  ,时间步长  $\Delta=1$  ,迭代次数 T (如实验中设置 T=50),同时确定  $\lambda$  的值(如  $\lambda=1$ )。

初始化变量: 随机初始化 x(0) 和 y(0) 作为算法迭代的起始点。

迭代更新: 按照  $x(k+1) = x(k) + \Delta y(k)$  和  $y(k+1) = y(k) - \Delta [(1 - a(k\Delta))x(k) + c_0(Jx(k) + h)]$  ( 当  $|x_i(k)| > 1$  时, $x_i(k) = \text{sign}(x_i(k)), y_i(k) = 0$ ) 的规则进行迭代计算,在每次迭代中根据新定义的 J 和 h 计算更新值,直至达到设定的迭代次数 T 。

LM-SB 模型的工作流程图如图 1所示:

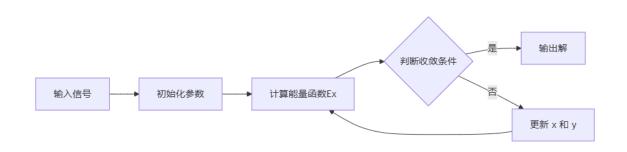


图 1. LM-SB 模型工作流程图

#### 3.3 深展开模拟分叉 (DU - LM - SB)

为了进一步减少迭代次数并提高检测性能,本文将 SB 算法与深度展开 (DU) 技术相结合,提出了 DU-LM-SB 检测器。DU-LM-SB 将 SB 算法的更新规则进行微分,并使用训练数据来训练控制 SB 动力学的一些内部参数。

#### 3.3.1 原理

为了进一步优化 SB 算法的性能并减少迭代次数,将深度展开 (DU) 技术与改进后的 LM - SB 相结合。通过使 SB 的更新规则可微分,引入可训练参数(步长参数  $\Delta_k^{T-1}$  、控制项强度的  $\eta$  以及  $U_\lambda$  中的  $\lambda$  ),利用训练数据对这些参数进行训练,从而能够根据具体的 MIMO 系统和信号特征调整算法的行为,提高检测性能。

#### 3.3.2 实施步骤

初始化可训练参数: 设定迭代次数 T( 如 T=10) ,初始化步长参数  $\Delta_{k=0}^{T-1}$  (初始值  $\Delta_k=1.0$ )、 $\eta$  (初始值  $\eta=1$  )和  $\lambda$  (初始值  $\lambda=1$  ),同时设置  $\phi_s$  和  $\psi_s$  的参数(如  $\Lambda=10, A=100$  ,B=1.01 ),这些参数用于使更新规则中的条件部分可微分。

生成训练数据:随机生成大量的发送信号 x 和接收信号 y 对,模拟实际的 MIMO 通信场景,用于后续的模型训练。

训练过程前向传播: 对于每一对训练数据 (x,y) , 按照更新规则  $\tilde{x}(k) = x(k) + \Delta_k y(k)$  ,  $\tilde{y}(k) = y(k) - \Delta_k \left[ (1-a(k))\tilde{x}(k) + \eta c_0 (J\tilde{x}(k)+h) \right]$  ,  $x(k+1) = \phi_s(\tilde{x}(k);\Lambda)$  ,  $y(k+1) = \tilde{y}(k) \left[ 1 - \psi_s(\tilde{x}(k);A,B) \right]$  进行迭代计算,其中 J 和 h 按照 LM - SB 中的方式计算,得到预测的  $\hat{x}$  。

计算损失: 计算预测值  $\hat{x}$  与真实发送信号 x 之间的均方误差(MSE)损失,以衡量模型预测的准确性。

反向传播与参数更新:使用 Adam 优化器 [18],根据计算得到的损失反向传播计算梯度,更新可训练参数  $\Delta_{k_{k=0}}^{T-1}$   $\eta$  和  $\lambda$  ,学习率设置为  $2\times 10^{-4}$  。在每次参数更新时,使用 1000 个大小为 2000 的小批量数据,并且每个小批量数据生成一个新的信道矩阵 H ,以增加训练数据的多样性。检测过程:经过训练后,对于实际的接收信号 y ,使用训练好的参数按照上述前向传播过程计算得到检测后的信号  $\hat{x}$  ,从而实现对 MIMO 信号的检测。

DU-LM-SB 模型的工作流程图如图 2所示:

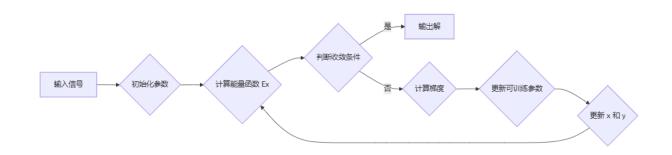


图 2. DU-LM-SB 模型工作流程图

### 4 复现细节

#### 4.1 实验环境搭建

硬件环境:

• 处理器: Intel Core i7-14650HX

• 内存: 32GB RAM

软件环境:

• 操作系统: Windows 11

• 开发工具: Python 3.9, Jupyter Notebook, Pytorch2.0

#### 4.2 与已有开源代码对比

已有开源代码: https://github.com/s-takabe/unfolded\_simbif

在复现过程中,我借用了原文的算法设计和实现代码。为了进一步提升实验效果,我对原有代码进行了若干重要的参数调整,以提升模型的性能。具体包括:学习率以及迭代次数。

- *lr\_adam*: 由于初始的学习率过小,模型参数的更新幅度太小,可能会停滞在局部最优解。所以我将学习率由 2e-6 改为 5e-3,同时也可以加速训练过程,使模型更快地接近最优解。
- *T\_max*: 为了提高模型的训练效果和收敛性,允许模型在训练过程中进行更多的参数 更新,从而更好地学习数据的特征。所以我将最大迭代次数由 10 改为 50,提升模型 的学习能力和最终性能。

通过上述参数的优化,模型的整体效果较之前得到了提升,虽然比原文还是稍差一些,但也验证了这些调整在提高 MIMO 信号检测性能方面的重要性。具体结果如图 3所示:

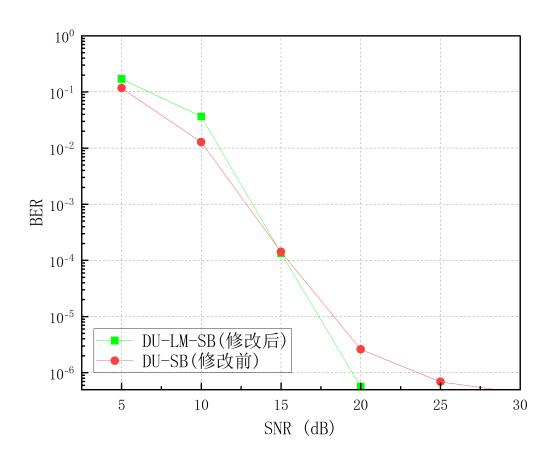


图 3. 参数修改前后对比图

与原论文中的结果对比(由于没有原论文的数值结果,所以没有在上图中展示,但可与图 4结果进行对比),修改前的效果在低信噪比区域相差不大,但在高信噪比区域达不到原论文的效果;修改后的效果在高信噪比区域差不多,但在低信噪比区域有所差异。但经过每个信噪比下的综合对比,修改后的整体效果要略优于修改前的效果。

# 5 实验结果分析

本文提出了一种基于模拟分岔 (SB) 算法的深度展开 (DU) 信号检测器,用于大规模 MIMO 系统。实验结果表明,该检测器在低 SNR 和高 SNR 区域均优于现有 SB 检测器,并且优于其他传统的可训练 MIMO 检测器。本文主要进行了两个实验,下面进行逐一分析。

#### 5.1 不同 SB 检测器对比 $(N_t = N_r = 16)$

实验设置: 对比了 ML - SB (T = 50)、G - SB (T = 50 且  $\lambda_g$  = 0.5)、LM - SB (T = 10、50 且  $\lambda$  = 1)、TPG 和 MMSE 检测器。其中,ML - SB 直接基于最大似然估计应用 SB 算法;G - SB 在 ML - SB 基础上加入 LMMSE 引导;LM - SB 基于 Levenberg-Marquardt 算法改进;TPG

是基于深度展开和投影梯度下降的 MIMO 检测器; MMSE 为传统最小均方误差检测器。各检测器参数设置遵循相应定义,如  $\Delta=1, \lambda_g=0.5(G-SB), \lambda=1(LM-SB), a(t)=t/(\Delta T), T$ 根据不同检测器设置(如 LM – SB 实验了 T=10 和 T=50)。原文结果如图 4所示:

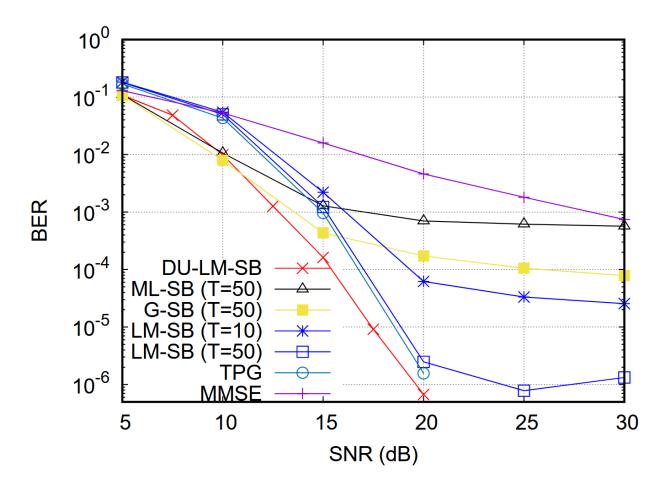


图 4. 原文 Nt = Nr = 16 时的实验结果示意

#### 结果分析:

低信噪比区域: ML - SB 和 G - SB 在低信噪比区域表现出色, 优于 MMSE 检测器。这是因为在低信噪比情况下,它们能够较好地利用信号特征进行检测。

高信噪比区域: ML - SB 和 G - SB 出现误差下限,而 LM - SB 在高信噪比区域性能提升明显。这是因为 ML - SB 和 G - SB 所基于的原始 SB 算法容易陷入局部最小值,导致检测误差无法进一步降低。如文中的玩具示例所示, $f_{ML}$  和  $f_G$  存在局部最小值,可能使 SB 收敛到这些局部最小值,造成检测错误。而 LM - SB 通过改进算法,有可能避免陷入局部最小值,从而提高了检测性能。不过,LM -SB 在低信噪比区域性能下降,且参数  $\lambda$  的选择困难,这是其缺点。例如,不当的  $\lambda$  值可能导致算法在低信噪比下无法准确估计信号。

我的复现结果如图 5所示(由于我的研究重点在 SB 算法, 所以没有对比 TPG 和 MMSE 检测器):

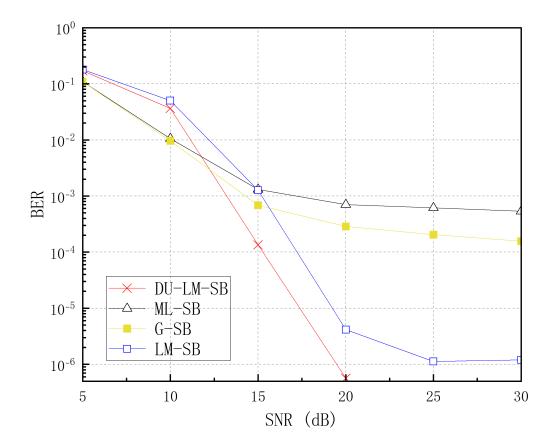


图 5. Nt = Nr = 16

对比分析:与原文相差不大。在高信噪比区域有显著优势,不仅提高了性能,且消除了误差下限。

# **5.2** 不同 SB 检测器对比 $(N_t = N_r = 32)$

实验设置: 与  $N_t = N_r = 16$  时类似,对各检测器进行测试,保持参数设置原则相同,仅天线数量变为 32。原文结果如图 6所示:

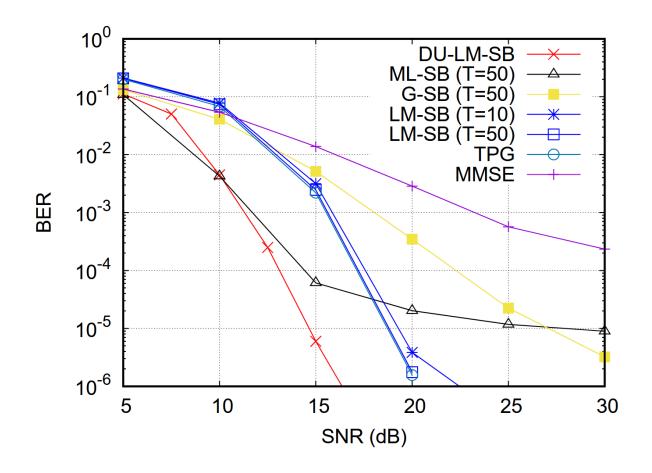


图 6. 原文 Nt = Nr = 32 时的实验结果示意

#### 结果分析:

LM-SB(T=10) 性能接近 LM-SB(T=50) 和 TPG,但仍存在误差下限。随着天线数量增加,系统复杂度提高,但 LM-SB 在不同迭代次数下的性能表现相对稳定,说明其在一定程度上能够适应天线数量的变化。然而,误差下限问题依然存在,表明在高信噪比下仍有改进空间。DU-LM-SB 性能最佳且无误差下限。在低信噪比区域,DU-LM-SB 通过深度展开技术训练可训练参数,能够更好地适应复杂的信号环境,提高检测性能;在高信噪比区域,其优势更加明显,通过调整参数避免了陷入局部最小值,从而显著提升了检测性能。例如,与 LM-SB(T=50) 和 TPG 相比,在  $BER=10^{-5}$  时,DU-LM-SB 的增益约为5dB,这表明其在高信噪比下具有更好的误比特率性能,能够更准确地检测信号。

我的复现结果如图 7所示:

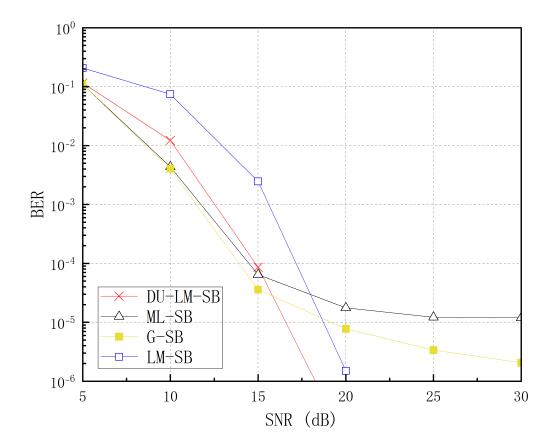


图 7. Nt = Nr = 32

对比分析:与原文相差不大。在大规模 MIMO 问题下, DU-LM-SB 表现出来明显的优势, 在低信噪比和高信噪比区域均表现良好。

# 6 总结与展望

模拟分叉算法 (SB) 作为一种受量子计算启发的算法,在 MIMO 信号检测中展现出独特的优势,为解决大规模 MIMO 系统中计算量巨大和传统检测器性能下降的问题提供了新的思路。

- 1. 消除局部极小值:通过改进 SB 算法,引入 Levenberg-Marquardt 算法的思想,可以消除局部最优解,进一步提高检测性能。
- 2. 深度展开:将 SB 算法与深度学习技术结合,形成深度模拟分叉算法(DUSB),通过训练内部参数,进一步提高检测性能,并减少迭代次数。

#### 展望:

- 1. 进一步改进 SB 算法,例如探索更有效的消除局部最优解的方法,或者结合其他优化 算法,进一步提高检测性能。
  - 2. 硬件实现:研究如何在实际硬件平台上实现 SB 算法,包括专用集成电路 (ASIC)、现

场可编程门阵列(FPGA)等。这将有助于推动 SB 算法从理论研究走向实际应用,提高其实用性和市场竞争力。

## 参考文献

- [1] Satoshi Takabe. Deep unfolded simulated bifurcation for massive mimo signal detection. arXiv preprint arXiv:2306.16264, 2023.
- [2] Erik G Larsson, Ove Edfors, Fredrik Tufvesson, and Thomas L Marzetta. Massive mimo for next generation wireless systems. *IEEE communications magazine*, 52(2):186–195, 2014.
- [3] Shaoshi Yang and Lajos Hanzo. Fifty years of mimo detection: The road to large-scale mimos. *IEEE communications surveys & tutorials*, 17(4):1941–1988, 2015.
- [4] David A Shnidman. A generalized nyquist criterion and an optimum linear receiver for a pulse modulation system. *The Bell System Technical Journal*, 46(9):2163–277, 1967.
- [5] Karol Gregor and Yann LeCun. Learning fast approximations of sparse coding. In *Proceedings of the 27th international conference on international conference on machine learning*, pages 399–406, 2010.
- [6] John R Hershey, Jonathan Le Roux, and Felix Weninger. Deep unfolding: Model-based inspiration of novel deep architectures. arXiv preprint arXiv:1409.2574, 2014.
- [7] Alexios Balatsoukas-Stimming and Christoph Studer. Deep unfolding for communications systems: A survey and some new directions. In 2019 IEEE International Workshop on Signal Processing Systems (SiPS), pages 266–271. IEEE, 2019.
- [8] Anu Jagannath, Jithin Jagannath, and Tommaso Melodia. Redefining wireless communication for 6g: Signal processing meets deep learning with deep unfolding. *IEEE Transactions on Artificial Intelligence*, 2(6):528–536, 2021.
- [9] Daisuke Ito, Satoshi Takabe, and Tadashi Wadayama. Trainable ista for sparse signal recovery. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 67(12):3113–3125, 2019.
- [10] Minsung Kim, Davide Venturelli, and Kyle Jamieson. Leveraging quantum annealing for large mimo processing in centralized radio access networks. In *Proceedings of the ACM special interest group on data communication*, pages 241–255. 2019.
- [11] Abhishek Kumar Singh, Kyle Jamieson, Peter L McMahon, and Davide Venturelli. Ising machines' dynamics and regularization for near-optimal mimo detection. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 21(12):11080–11094, 2022.
- [12] Wen Zhang and Yu-Lin Zheng. Simulated bifurcation algorithm for mimo detection. arXiv preprint arXiv:2210.14660, 2022.

- [13] Hayato Goto, Kosuke Tatsumura, and Alexander R Dixon. Combinatorial optimization by simulating adiabatic bifurcations in nonlinear hamiltonian systems. *Science advances*, 5(4):eaav2372, 2019.
- [14] Hayato Goto. Quantum computation based on quantum adiabatic bifurcations of kerrnonlinear parametric oscillators. *Journal of the Physical Society of Japan*, 88(6):061015, 2019.
- [15] Hayato Goto, Kotaro Endo, Masaru Suzuki, Yoshisato Sakai, Taro Kanao, Yohei Hamakawa, Ryo Hidaka, Masaya Yamasaki, and Kosuke Tatsumura. High-performance combinatorial optimization based on classical mechanics. *Science Advances*, 7(6):eabe7953, 2021.
- [16] Kenneth Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. Quarterly of applied mathematics, 2(2):164–168, 1944.
- [17] Donald W Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters.

  Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics, 11(2):431–441, 1963.
- [18] P Kingma Diederik. Adam: A method for stochastic optimization. (No Title), 2014.