

Identifying partial topology of simplicial complexes

摘要

本文研究了基于自适应同步的单纯复形的部分拓扑识别问题。对于感兴趣的节点，通过设计自适应控制器和参数估计器，可以准确地重构它们所参与的交互作用。特别是，我们的方法不仅可以有效地恢复成对的相互作用，而且还可以恢复高阶结构。此外，还建立了一个新的具有严格定义的线性独立条件。对一般二维单纯复形和真实结构进行了数值模拟，证明了结果的有效性，并讨论了不同参数对识别过程的影响。

关键词：拓扑识别；单纯复形

1 引言

揭示复杂网络中节点之间的潜在关系是网络科学研究中的一项重要研究任务。由于拓扑结构与网络的动态和功能密切相关，揭示其连接和交互模式可以极大地促进网络控制 [1][2]、预测 [3]、动态分析 [4] 等方面的研究。在方法方面，基于数据的方法和基于模型的方法是拓扑识别的两个主要方法。前者旨在揭示仅基于测量的时间序列数据的网络变量之间的关系，如压缩感知 [5][6]、格兰杰因果关系检验 [7]、统计推断 [8][9] 等。由于缺乏关于模型的信息，这些基于数据的识别方法对某些系统的准确性可能较低。对于后者，使用微分方程来描述节点状态的演化，其中拓扑参数包含在耦合项中。利用数学模型，引入基于同步的识别，利用实时数据进行动态估计，来重建节点间的连接。并且单纯复形已经成为网络研究的模型，其应用范围从同步、[10, 11, 12] 疫情传播 [13, 14]、意见动力学 [15] 到重建 [16]，并取得了许多有趣的结果。Skardal 和 Arenas 在一个没有突发的同步转变对应物的简复形结构中发现了新的突发的去同步转变现象，其中存在无限多个稳定的部分同步状态。[10] Iacopini 等人 [13] 和 Matamalas 等人 [14] 在单纯复形上的传播动力学分析中发现了突发的转变。Anwar 和 Ghosh 将主稳定性方案推广到具有多个相互作用层的简复形。[12] 对于网络重建而言，值得注意的是，尽管已经开发了针对不同拓扑结构的丰富算法，但处理简复形的文献却非常少。[16] Wang 等人提出了一种基于数据的框架，结合了统计推断和期望最大化，以利用离散状态动力学数据完全重建单纯复形。[16] 据我们所知，迄今为止尚未发表关于基于自适应同步的简复形拓扑识别的结果。因此，本文通过构建一个与所研究网络同步的自适应响应网络，并设计了利用网络数据的参数估计器，通过该方法解决了部分拓扑识别问题。

2 相关工作

在网络科学领域，理解和识别复杂网络的结构对于揭示网络的动态行为和功能至关重要。随着研究的深入，传统的网络拓扑识别方法，主要关注成对相互作用，已逐渐显示出其局限性。近年来，单纯复形作为一种能够描述高阶相互作用的数学结构，为网络研究提供了新的视角。本文旨在探讨基于自适应同步的单纯复形部分拓扑识别问题，以期提高对复杂网络结构识别的准确性和效率。以下是对相关工作的总结。

2.1 网络拓扑识别

网络拓扑识别是网络科学中的一个核心问题，它涉及到从网络的测量数据中推断出网络的结构。传统的网络拓扑识别方法主要关注于成对相互作用，即节点间的直接连接。这些方法包括基于时间序列数据的压缩感知技术 [5][6]、Granger 因果性测试 [7] 和统计推断方法 [8][9]。然而，这些方法可能因缺乏模型信息而准确性受限，或者在处理具有高阶相互作用的网络时不够有效。

2.2 单纯复形在网络研究中的应用

单纯复形提供了一种描述网络中高阶相互作用的框架，其中不仅包括成对链接（1-单纯形），还包括代表群体相互作用的高维单纯形，如三角形（2-单纯形）和四面体（3-单纯形）。这种结构在模拟大脑网络 [17]、神经网络 [18][19] 以及科学出版物中的合作网络 [20] 等方面显示出其重要性。在这些网络中，高阶相互作用对于理解网络功能和动态行为至关重要。

2.3 自适应同步方法

自适应同步方法最初用于识别混沌系统中的未知参数 [21, 22, 23, 24]，后来扩展到复杂动态网络的拓扑识别 [25, 26, 27]。这种方法通过构建响应网络与驱动网络之间的同步，并设计参数估计器来动态调整网络参数，从而实现对网络拓扑的识别。自适应同步方法的优势在于能够处理网络中的噪声和延迟 [25]，以及处理具有时间延迟的多重网络 [26]。

2.4 线性独立条件

在基于同步的网络拓扑识别方法中，线性独立条件是确保参数估计器能够收敛到真实值的关键。然而，传统的线性独立条件在数学描述和验证上存在困难，尤其是在时域中的特征描述和验证 [28][29]。为了解决这个问题，本文提出了一个新的线性独立条件，即在极限情况下的线性独立性，这为参数估计器的收敛提供了更严格的数学基础 [30]。

3 本文方法

3.1 自适应同步方法概述

该论文研究了对于识别感兴趣的节点的高低阶相互作用采用了自适应同步的方法，在自适应同步的过程中，会构造一个辅助网络（也称为响应网络），并通过适当的控制策略，使得

这个辅助网络能够与目标网络（即驱动网络）达到同步状态。当两个网络同步时，可以通过分析辅助网络的状态和演化来推断出目标网络的拓扑结构。

3.2 驱动网络

多维单形复形的动力学可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{x}_i = & f_i(x_i) + \sigma_1 \sum_{j_1=1}^N a_{ij_1}^{(1)} g^{(1)}(x_i, x_{j_1}) \\ & + \sigma_2 \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N a_{ij_1 j_2}^{(2)} g^{(2)}(x_i, x_{j_1}, x_{j_2}) + \cdots \\ & + \sigma_D \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_D=1}^N a_{ij_1 \dots j_D}^{(D)} g^{(D)}(x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_D})\end{aligned}$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^m$ 表示节点 $i (i \in \overline{N})$ 的状态向量，具有自动态函数 $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ； $\sigma_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $g^{(k)} : \mathbb{R}^{(d+1)m} \rightarrow \mathbb{R}^m (k = 1, 2, \dots, D)$ 分别描述了第 k 阶的耦合强度和相互作用形式。单纯复形的拓扑由邻接张量 $A^{(1)}, \dots, A^{(D)}$ 决定。例如，如果存在成对相互作用 (i, j_1) ，则 $a_{ij_1}^{(1)} = 1$ ，否则为 0；如果存在三元相互作用 (i, j_1, j_2) ，则 $a_{ij_1 j_2}^{(2)} = 1$ ，否则为 0。对于其他更高阶的相互作用， $a_{ij_1, \dots, j_k}^{(k)}$ 的意义可以类似推导。为了清晰起见，本文聚焦于 $D = 2$ 的案例来阐述部分拓扑识别方法。然后，动力方程表示为

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sigma_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} g^{(1)}(x_i, x_j) + \sigma_2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} g^{(2)}(x_i, x_j, x_k).$$

为了简化，我们考虑由以下耦合函数给出的

$$g^{(1)}(x_i, x_j) = h^{(1)}(x_j) - h^{(1)}(x_i),$$

$$g^{(2)}(x_i, x_j, x_k) = h^{(2)}(x_j, x_k) - h^{(2)}(x_i, x_i),$$

其中 $h^{(1)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, h^{(2)} : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。为了表达式的紧凑性，定义

$$c_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(1)} & \text{if } j \neq i, \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(1)} & \text{if } j = i, \end{cases}$$

$$c_{ijk}^{(2)} = \begin{cases} a_{ijk}^{(2)} & \text{if } (j, k) \neq (i, i), \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{k=1, k \neq i}^N a_{ijk}^{(2)} & \text{if } (j, k) = (i, i). \end{cases}$$

经过以上准备，要识别的单纯复形，在此后称为驱动网络，其表达式为

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sigma_1 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{x}_j) + \sigma_2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_{ijk}^{(2)} \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k).$$

3.3 响应网络

实际上, 只有少数感兴趣节点的交互被研究, 因此不需要在整个网络中识别链接。不失一般性, 假设感兴趣节点被标记为 $1, 2, \dots, l$ 。为了识别这些节点之间的交互, 构建了一个响应网络来追踪它们在驱动网络中的对应轨迹, 其动力学方程描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i = & f_i(\hat{x}_i) + \sigma_1 \sum_{j=1}^N \hat{c}_{ij}^{(1)} h^{(1)}(S(x_j)) \\ & + \sigma_2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \hat{c}_{ijk}^{(2)} \mathbf{h}^{(2)}(S(\mathbf{x}_j), S(\mathbf{x}_k)) + \mathbf{u}_i. \end{aligned}$$

在上述方程中, \hat{x}_i 表示响应网络中节点 i ($i \in \bar{l}$) 的状态向量; $\hat{c}_{ij}^{(1)}$ 和 $\hat{c}_{ijk}^{(2)}$ 分别是 $c_{ij}^{(1)}$ 和 $c_{ijk}^{(2)}$ 的参数估计器; 而 u_i 代表控制器, 用于驱动网络 (5) 中的节点 i ($i \in \bar{l}$) 与网络 (4) 中相应的节点同步。S 是以下定义的切换函数, 它使用响应网络中节点 i 的状态信息, 如果它是感兴趣的节点或驱动网络的状态。

$$S(x_j) = \begin{cases} \hat{x}_j & \text{if } j \in \bar{l}, \\ x_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3.4 控制器

综合考虑驱动网络和响应网络。假设 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{e}}_i(t)$ 存在。在假设的控制器下, 节点 i ($i \in \bar{l}$) 所连的连接, 即 $c_{ij}^{(1)}$ 和 $c_{ijk}^{(2)}$, 可以使用控制器 u_i 和估计器 $\hat{c}_{ij}^{(1)}$ 和 $\hat{c}_{ijk}^{(2)}$ 成功识别, 这些控制器和估计器被设计为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= -K_i \mathbf{e}_i, i \in \bar{l}, \\ \dot{K}_i &= d_i \mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_i, K_i(0) \geq 0, \\ \dot{\hat{c}}_{ij}^{(1)} &= -\delta_{ij}^{(1)} \mathbf{e}_i^\top \mathbf{h}^{(1)}(S(\mathbf{x}_j)), j \in \bar{N}, \\ \dot{\hat{c}}_{ijk}^{(2)} &= -\delta_{ijk}^{(2)} \mathbf{e}_i^\top \mathbf{h}^{(2)}(S(\mathbf{x}_j), S(\mathbf{x}_k)), j, k \in \bar{N}, \end{aligned}$$

其中, $d_i, \delta_{ij}^{(1)}, \delta_{ijk}^{(2)}$ 是正的常数。

4 复现细节

4.1 与已有开源代码对比

本文代码为未开源, 没有参考相关源代码。

4.2 实验环境搭建

本实验在软件 matlab2023a 下运行。

4.3 使用说明

本文共有两个案例, 分别对应两个源代码 test1.m 和 test2.m, 直接运行即可。

5 实验结果分析

本实验共通过两个案例来对本文提出的方法进行数值模拟。

5.1 十节点混沌网络

为了展示不同参数对识别过程的影响,我们在图1中展示的十个节点单纯复形上进行了模拟。为了说明,我们确定了节点1和2参与的交互,其邻接张量在图1(b)-1(d)中显示。根据 $c_{ij}^{(1)}$ 和 $c_{ijk}^{(2)}$ 的定义,可以立即得出 $c_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)}$ ($i \neq j$), $c_{11}^{(1)} = -5$, $c_{22}^{(1)} = -4$, $c_{ijk}^{(2)} = a_{ijk}^{(2)}$ ($(j, k) \neq (i, i)$), $c_{111}^{(2)} = -12$, 和 $c_{222}^{(2)} = -8$ 。节点动力学函数采用的统一混沌系统。

$$f(x) = \begin{cases} (25a + 10)(x_{i2} - x_{i1}), \\ (28 - 35a)x_{i1} - x_{i1}x_{i3} + (29a - 1)x_{i2}, \\ x_{i1}x_{i2} - \frac{1}{3}(a + 8)x_{i3}, \end{cases}$$

其中 $a \in [0, 1]$. 系统对于 $a \in [0, 0.8)$ 属于广义洛伦兹混沌系统, 对于 $a = 0.8$ 属于吕系统。陈系统对于 $a \in (0.8, 1]$ 。耦合函数被选为:

$$h^{(1)}(x_j) = [x_{j1}, 0, 0]^\top, \quad h^{(2)}(x_j, x_k) = [x_{j1}^2 x_{k1}, 0, 0]^\top.$$

初始网络状态为 $x_i(0) = [3i - 2, 3i - 1, 3i]^\top$ ($i \in \bar{N}$), $\hat{x}_i(0) = [28 + 3i, 29 + 3i, 30 + 3i]^\top$ ($i \in \bar{l}$)。其他参数设置为 $\delta_{ij}^{(1)} = 50$, $\delta_{ijk}^{(2)} = 0.01$, 以及 $d_i = 1$ ($i \in \bar{l}, j, k \in \bar{N}$)。通过四阶 Runge-Kutta 方法求解微分方程。为了衡量估计器的性能, 定义以下平均识别误差:

$$E_p^{(1)}(t) = \frac{1}{Nl} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^N |\tilde{c}_{ij}^{(1)}(t)|,$$

$$E_p^{(2)}(t) = \frac{1}{N^2 l} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |\tilde{c}_{ijk}^{(2)}(t)|.$$

$E_p^{(1)}(t)$ 和 $E_p^{(2)}(t)$ 分别表征成对和三元相互作用的识别精度。虽然对网络结构没有施加特殊限制, 但识别过程可能会受到动态和拓扑参数的影响。

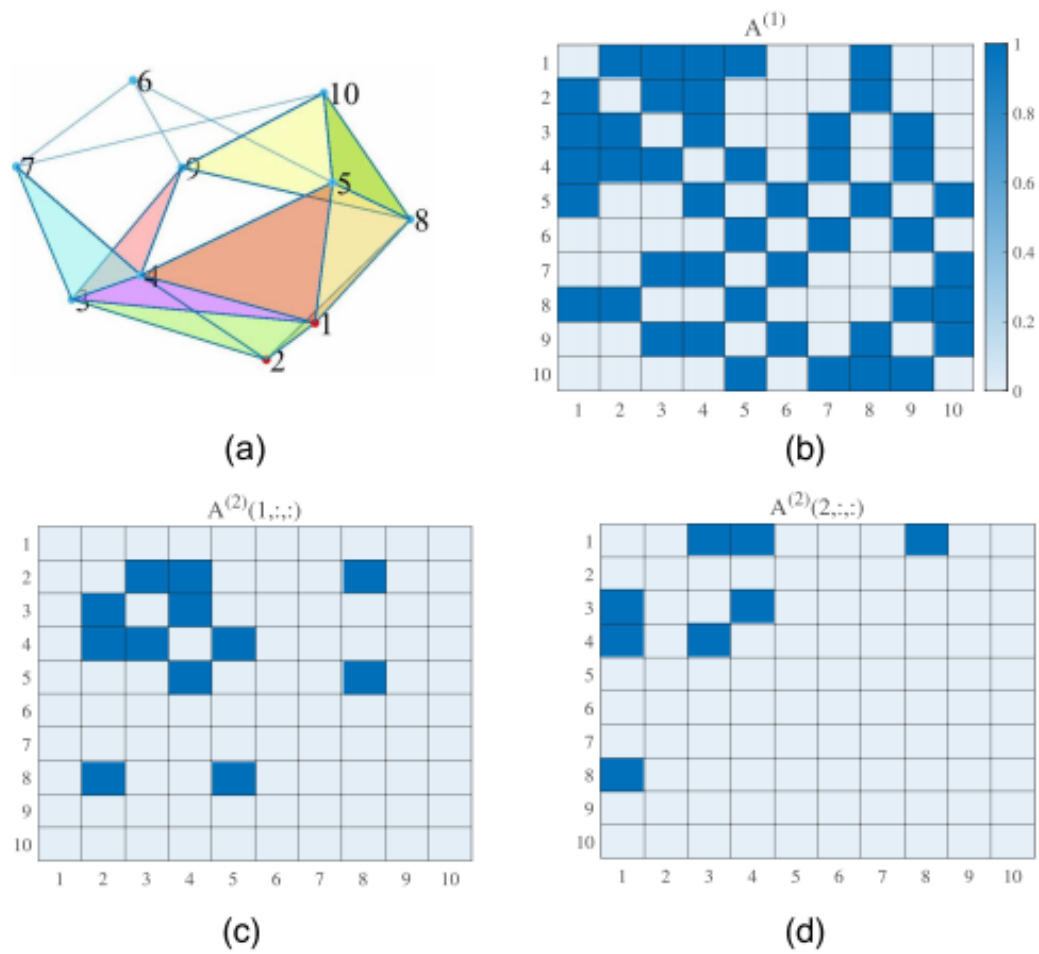


图 1. 网络拓扑结构示意图

5.1.1.1 耦合强度的影响

结果如图2和3将与成对和三联体相互作用相关的耦合强度从一个非常小的值（在这种情况下为 0.1）增加到一个一定的大值，将增强对该耦合相关的相互作用的识别，并阻碍对其他耦合作用的识别，但不是一定成正比。

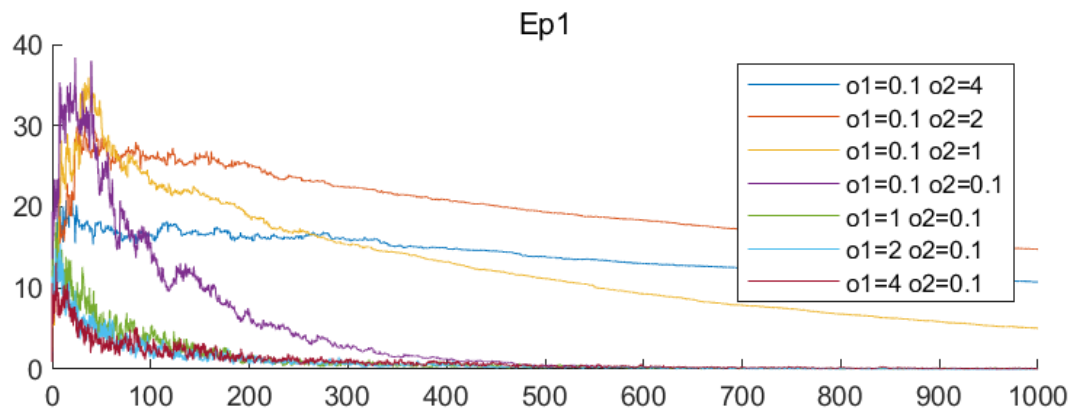


图 2. 成对连接平均误差

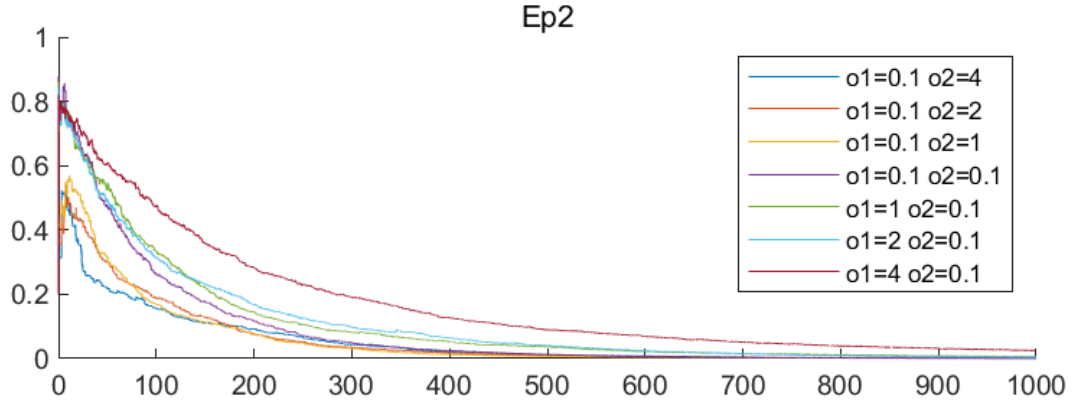


图 3. 三重交互平均误差

5.1.2 动态参数的影响

每个节点的自动态由参数 a 决定，其值将影响网络的演变。以下是通过将 a 从 0 变化到 1，固定 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.1, 0.1)$ 获得的结果，以阐述 a 在影响识别过程中的作用。从图4和5可以看出，对于 a 不小于 0.4 的情况， $E_p^{(1)}$ 和 $E_p^{(2)}$ 都会在 $t = 1000$ 时演化到 0，并且对于小于 0.4 的 a ，它们将无法收敛到原点对于 $a = 0$ 和 0.2。特别是当 $a = 0$ 时，识别误差迅速稳定在非零值，表明识别失败。原因可由图6 验证。驱动网络中的大多数节点在初始时间后不久就演化到稳态，提供的信息很差，无法用于更新参数估计器。因此，参数估计器收敛到错误值并迅速稳定。相比之下，当 a 等于或大于 0.4 时，节点状态不规则地振荡，既不同步也不处于稳态，这对识别有利。

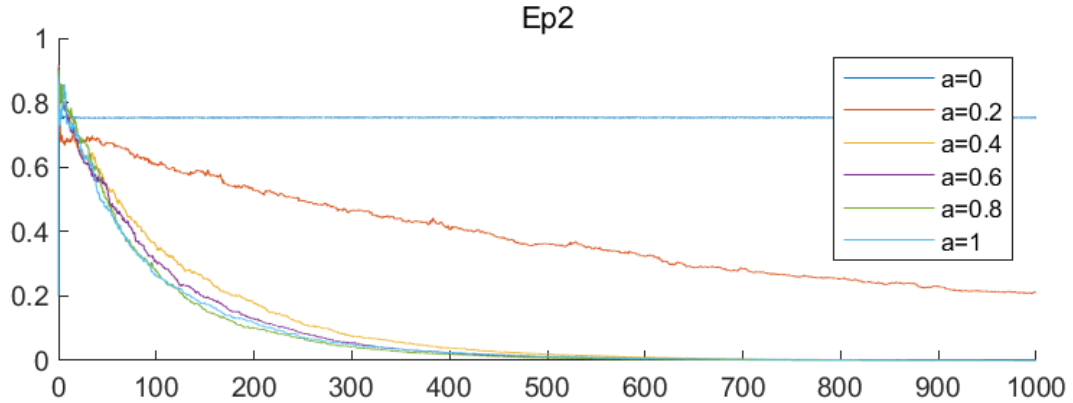


图 4. 成对连接平均误差

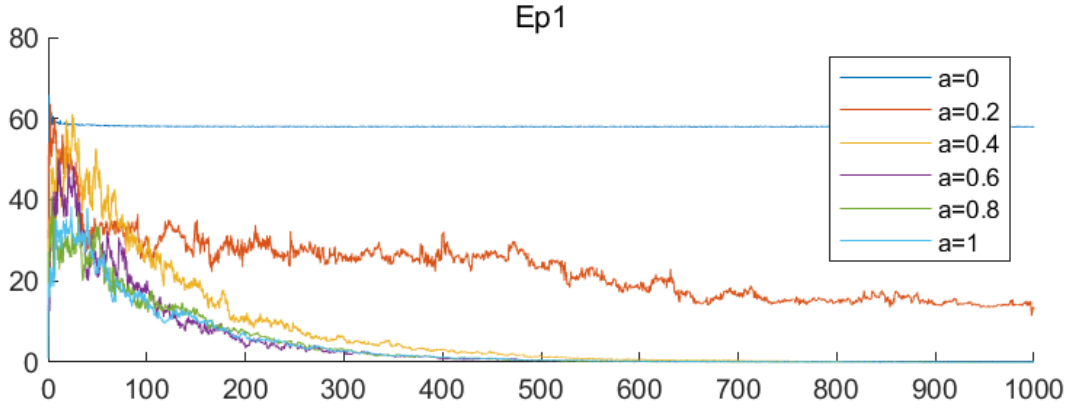


图 5. 三重交互平均误差

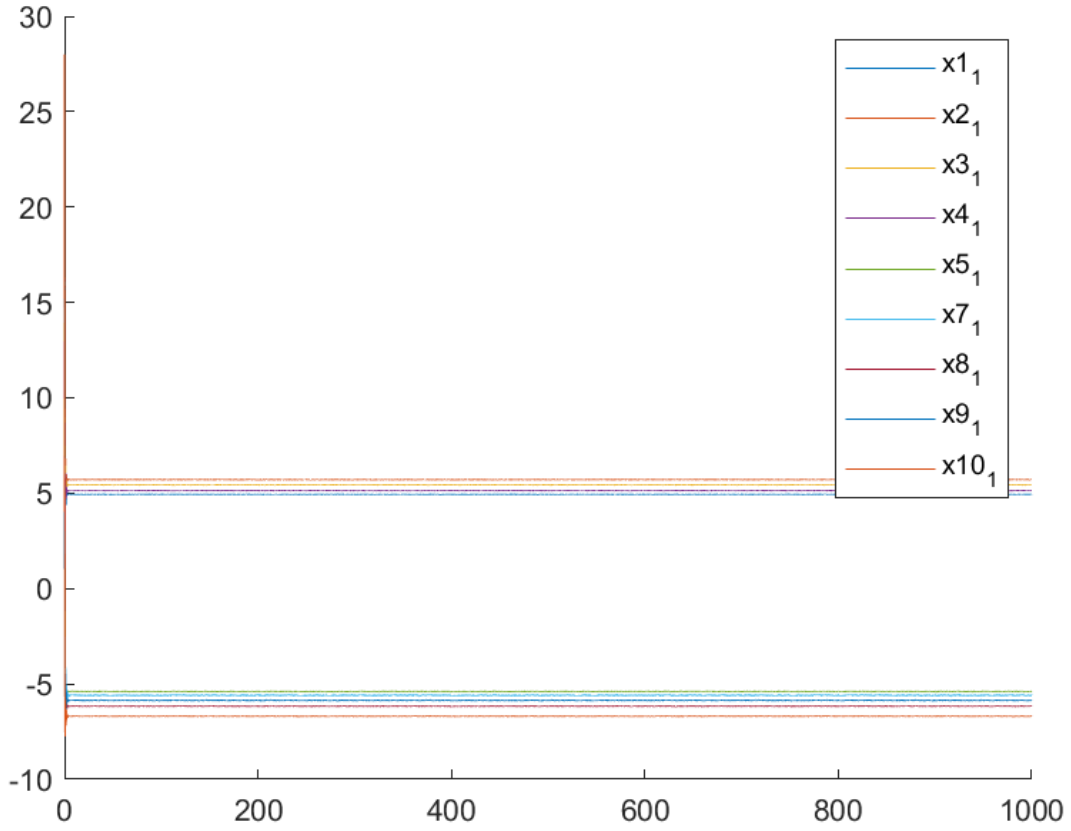


图 6. 驱动网络中某些节点的状态向量的第一个变量的演化

5.2 空手道俱乐部网络

为了确认我们方法的适用性，我们展示了在 Zachary karate club 数据集上的模拟结果，这是一个由 34 个节点和 78 条边组成的社会网络。在现实中，三个俱乐部成员之间可以，但不一定形成一个小组，在这个小组中，观点可以共享和传播，其方式超越了成对关系。为此，我们随机选择网络中的某些三角形，最终生成 20 个 2-单纯形，其示意图和邻接张量如图7所示。在这里，我们采用 Chen 混沌振荡器来模拟耦合个体的行为。成对和三元相互作用的耦合强度均为 0.01，其他参数设置与第 IV A 节中的相同。为了说明，我们展示了识别与节点 2 相连的连接的参数估计器的演变。从图8和图9中可以看出， $\hat{c}_{2j}^{(1)}$ 和 $\hat{c}_{2jk}^{(2)}$ 的真实值分别为 $c_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(1)}$ ($j \neq 2$), $c_{22}^{(1)} = -9$, $c_{2jk}^{(2)} = a_{2jk}^{(2)}$ ($(j, k) \neq (2, 2)$), 和 $c_{222}^{(2)} = -16$. 图8和9显示， $\hat{c}_{2j}^{(1)}$ 和 $\hat{c}_{2jk}^{(2)}$ 在

$t=20000$ 时收敛到其真实值的一个非常小的邻域。同时，成对和三元相互作用的平均识别误差随时间降低到 0，如图10和11所示。我们发现，从 Zachary karate club 数据集生成的单纯形复形的部分识别比十节点单纯形复形的识别消耗更多的时间。随着网络规模的扩大，识别过程变得更加耗时，计算复杂度迅速增长，即使只考虑几个感兴趣的节点。这是重建高阶网络需要解决的问题。

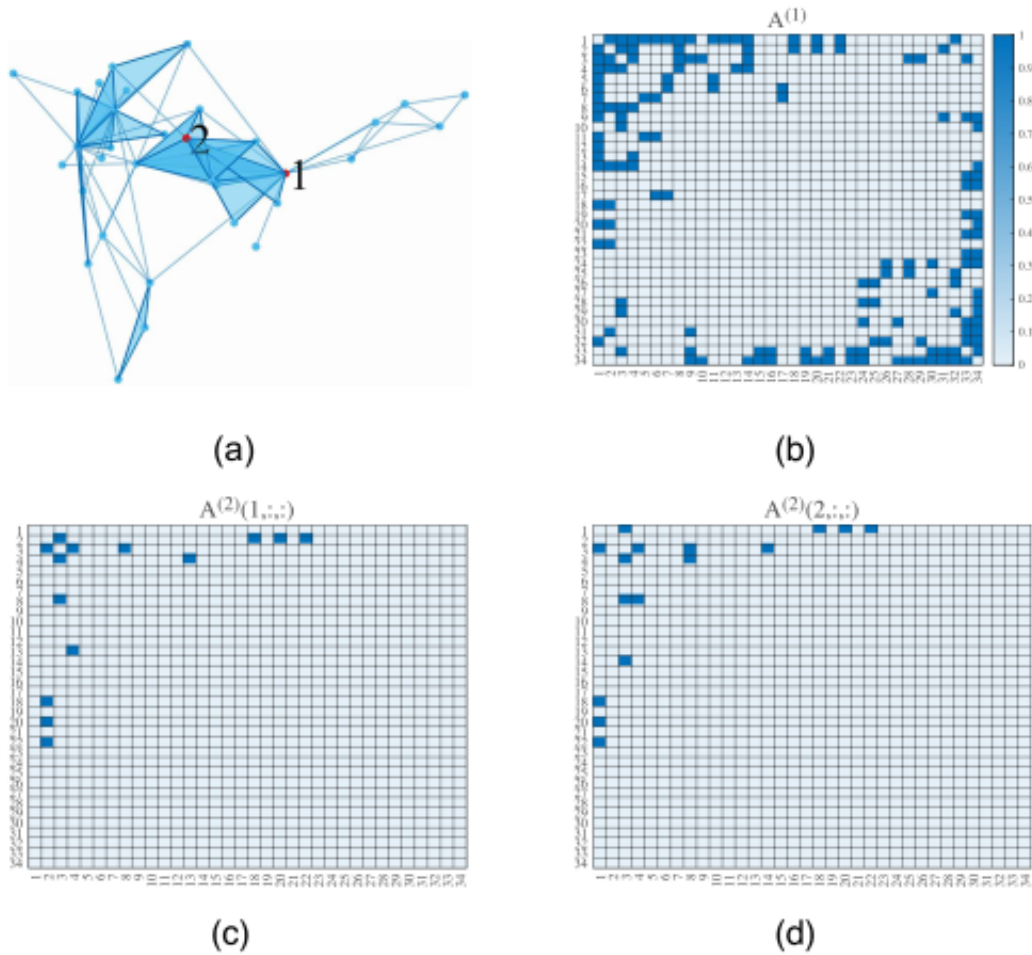


图 7. 网络示意图和邻接张量

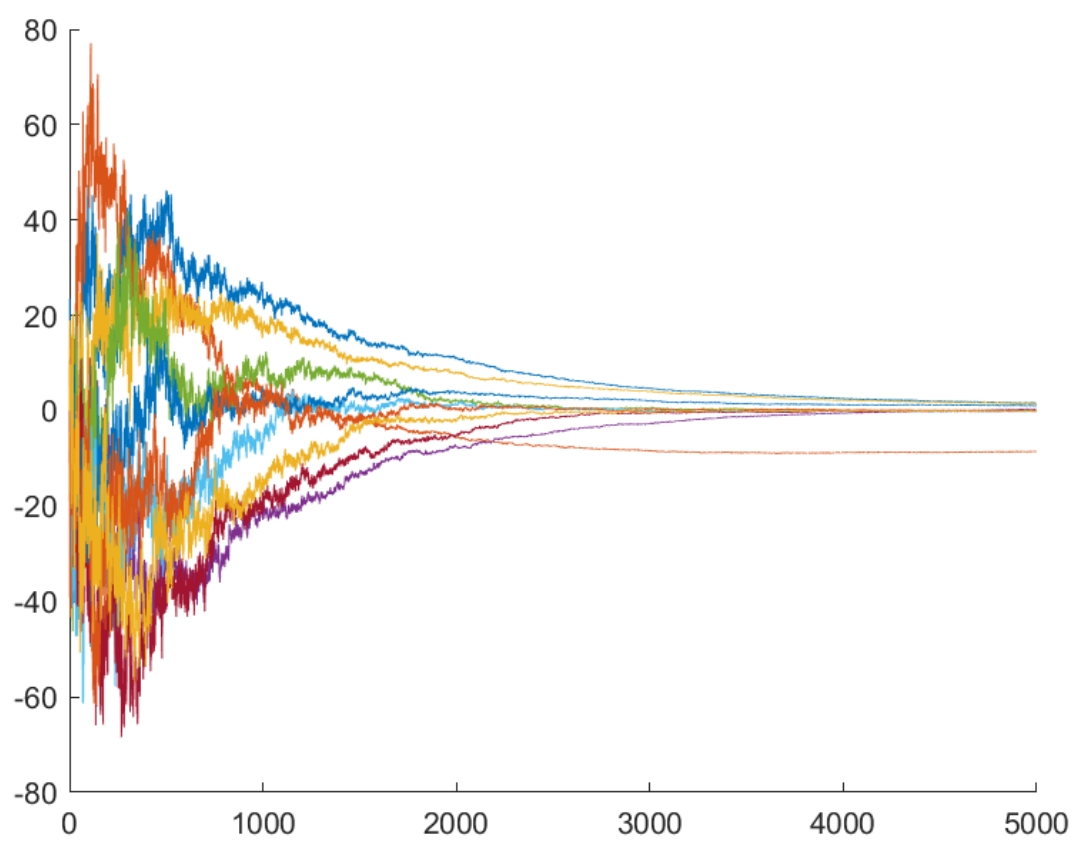


图 8. 成对连接平均误差

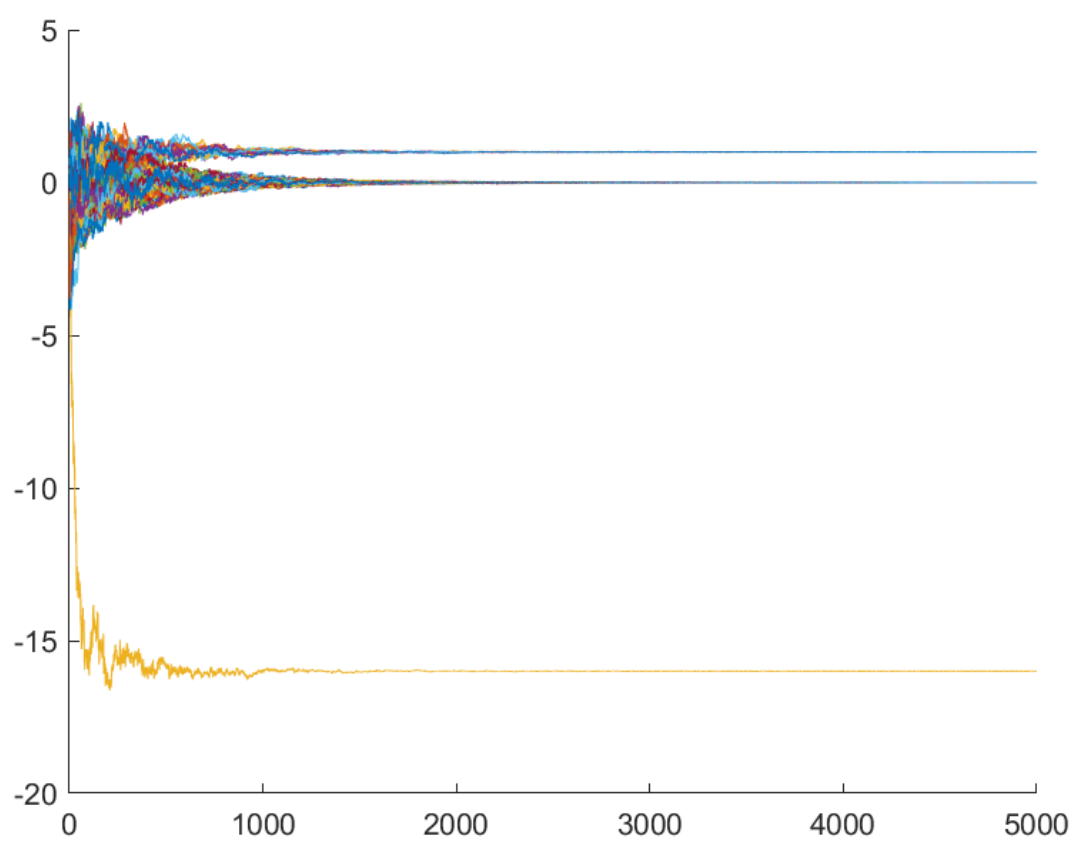


图 9. 三重交互平均误差

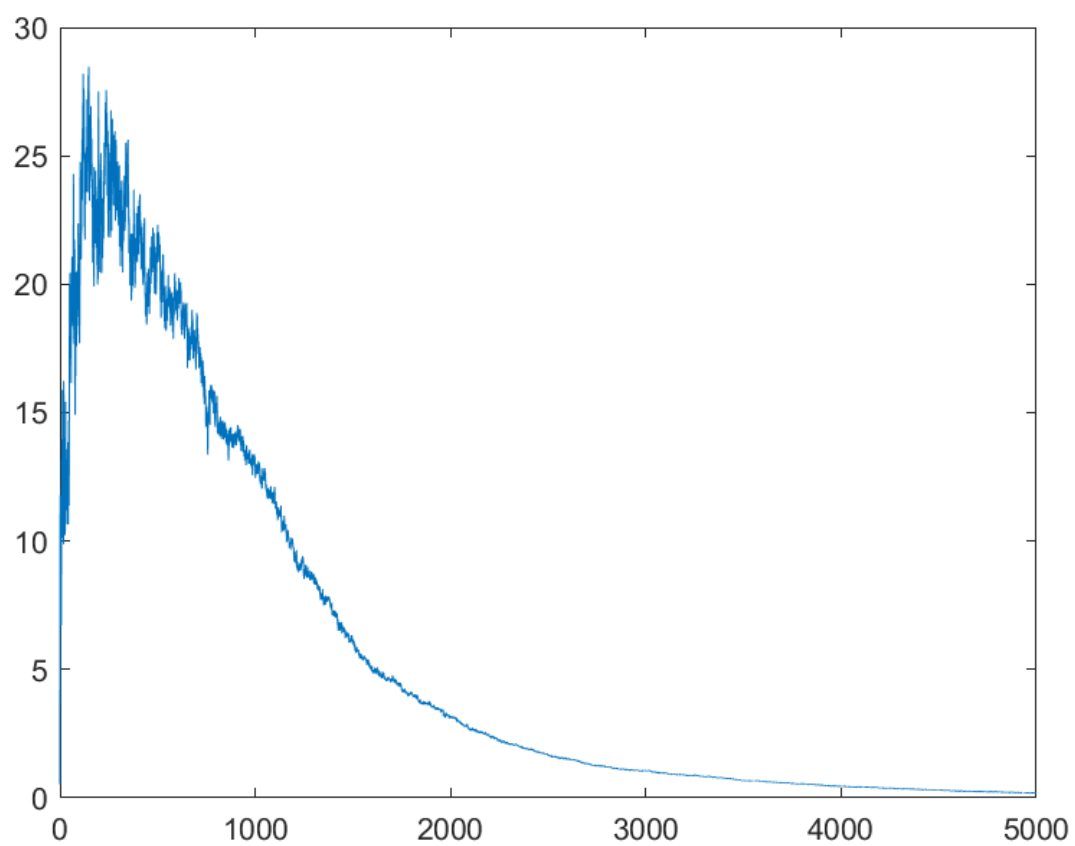


图 10. 成对连接演化结果

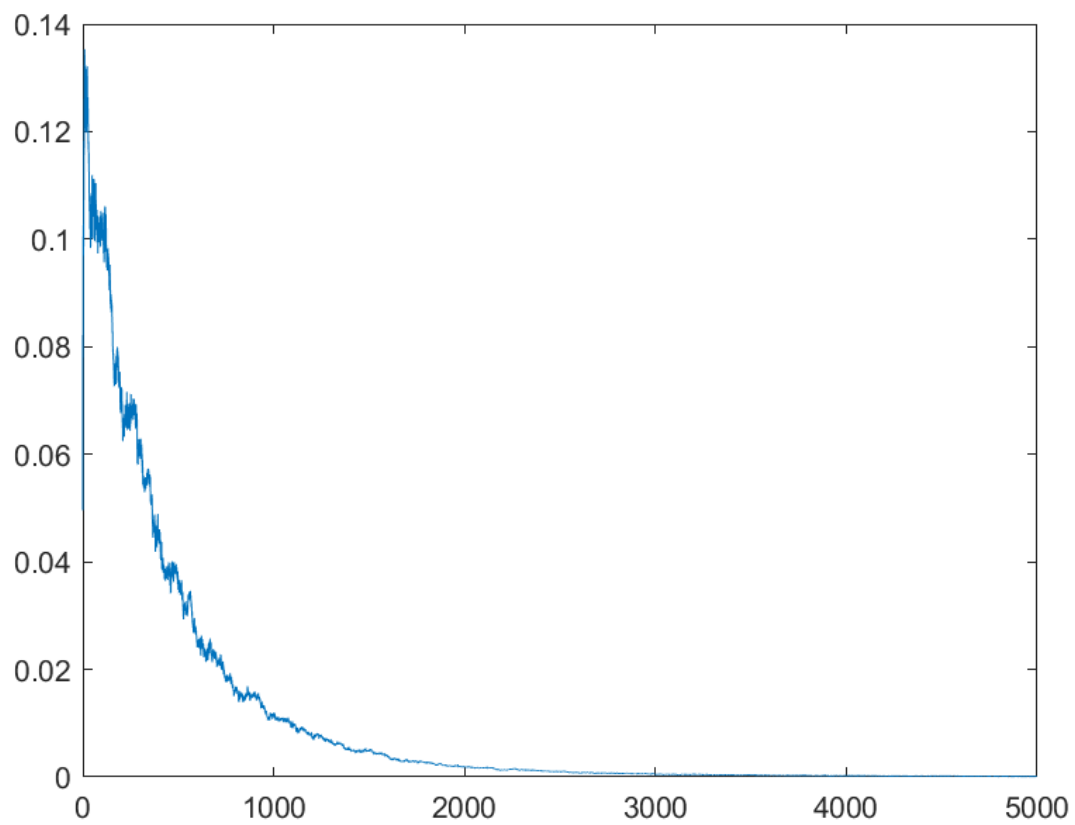


图 11. 三重交互演化结果

6 总结与展望

本文提出了一种基于自适应同步的方法来识别单纯复形的部分拓扑，能够准确重建特定节点的连接，包括成对和高阶相互作用。通过设计自适应控制器和参数估计器，有效地恢复了网络结构。数值模拟验证了所提方法的有效性，并讨论了不同参数对识别过程的影响。此外，本文的方法被应用于一个实际的社会网络数据集，进一步证实了其适用性。尽管取得了这些成果，但仍存在挑战和未来的研究方向。随着网络规模的增大，识别过程变得更加耗时，计算复杂度迅速增加，因此开发更高效的算法以降低计算成本是未来研究的一个重要方向。此外，本文的方法在网络达到同步或静止状态时可能无法满足线性独立条件，导致识别失败，因此研究在这些条件下的识别策略也是一个有价值的研究方向。最后，本文的方法可以进一步扩展到其他类型的复杂网络，如多重网络和分数阶网络，这将为理解和控制更广泛的网络动态提供新的工具。总的来说，本文的研究为单纯复形的拓扑识别提供了一个新的视角，并为未来的研究奠定了基础。

参考文献

- [1] Bing Mao, Xiaoqun Wu, Jinhua Lu, and Guanrong Chen. Predefined-time bounded consensus of multiagent systems with unknown nonlinearity via distributed adaptive fuzzy control. *IEEE TRANSACTIONS ON CYBERNETICS*, 53(4):2622–2635, APR 2023.
- [2] Xiaoqun Wu, Bing Mao, Xiuqi Wu, and Jinhua Lu. Dynamic event-triggered leader-follower consensus control for multiagent systems. *SIAM JOURNAL ON CONTROL AND OPTIMIZATION*, 60(1):189–209, 2022.
- [3] Wen-Xu Wang, Rui Yang, Ying-Cheng Lai, Vassilios Kovanis, and Celso Grebogi. Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 106(15), APR 15 2011.
- [4] D. Soriano-Panos, L. Lotero, A. Arenas, and J. Gomez-Gardenes. Spreading processes in multiplex metapopulations containing different mobility networks. *PHYSICAL REVIEW X*, 8(3), AUG 9 2018.
- [5] Wen-Xu Wang, Ying-Cheng Lai, and Celso Grebogi. Data based identification and prediction of nonlinear and complex dynamical systems. *PHYSICS REPORTS-REVIEW SECTION OF PHYSICS LETTERS*, 644:1–76, JUL 12 2016.
- [6] Guofeng Mei, Xiaoqun Wu, Yingfei Wang, Mi Hu, Jun-An Lu, and Guanrong Chen. Compressive-sensing-based structure identification for multilayer networks. *IEEE TRANSACTIONS ON CYBERNETICS*, 48(2):754–764, FEB 2018.
- [7] Xiaoqun Wu, Weihua Wang, and Wei Xing Zheng. Inferring topologies of complex networks with hidden variables. *PHYSICAL REVIEW E*, 86(4, 2), OCT 12 2012.

- [8] Chuang Ma, Han-Shuang Chen, Xiang Li, Ying-Cheng Lai, and Hai-Feng Zhang. Data based reconstruction of duplex networks. *SIAM JOURNAL ON APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS*, 19(1):124–150, 2020.
- [9] Jean-Gabriel Young, Giovanni Petri, and Tiago P. Peixoto. Hypergraph reconstruction from network data. *COMMUNICATIONS PHYSICS*, 4(1), JUN 15 2021.
- [10] Per Sebastian Skardal and Alex Arenas. Abrupt desynchronization and extensive multistability in globally coupled oscillator simplexes. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 122(24), JUN 19 2019.
- [11] L. V. Gambuzza, F. Di Patti, L. Gallo, S. Lepri, M. Romance, R. Criado, M. Frasca, V. Latora, and S. Boccaletti. Stability of synchronization in simplicial complexes. *NATURE COMMUNICATIONS*, 12(1), FEB 23 2021.
- [12] M. S. Anwar and D. Ghosh. Stability of synchronization in simplicial complexes with multiple interaction layers. 2022.
- [13] Iacopo Iacopini, Giovanni Petri, Alain Barrat, and Vito Latora. Simplicial models of social contagion. *NATURE COMMUNICATIONS*, 10, JUN 6 2019.
- [14] Joan T. Matamalas, S. Gómez, and A. Arenas. Abrupt phase transition of epidemic spreading in simplicial complexes. *Physical Review Research*, 2:012049, 2020.
- [15] Joan T. Matamalas, Sergio Gomez, and Alex Arenas. Abrupt phase transition of epidemic spreading in simplicial complexes. *PHYSICAL REVIEW RESEARCH*, 2(1), FEB 27 2020.
- [16] Huan Wang, Chuang Ma, Han-Shuang Chen, Ying-Cheng Lai, and Hai-Feng Zhang. Full reconstruction of simplicial complexes from binary contagion and ising data. *NATURE COMMUNICATIONS*, 13(1), JUN 1 2022.
- [17] G. Petri, P. Expert, F. Turkheimer, R. Carhart-Harris, D. Nutt, P. J. Hellyer, and F. Vaccarino. Homological scaffolds of brain functional networks. *JOURNAL OF THE ROYAL SOCIETY INTERFACE*, 11(101), DEC 6 2014.
- [18] Francesco Paolo Ulloa Severino, Jelena Ban, Qin Song, Mingliang Tang, Ginestra Bianconi, Guosheng Cheng, and Vincent Torre. The role of dimensionality in neuronal network dynamics. *SCIENTIFIC REPORTS*, 6, JUL 11 2016.
- [19] M. W. Reimann, M. Nolte, M. Scolamiero, K. Turner, R. Perin, G. Chindemi, P. Dlotko, R. Levi, K. Hess, and H. Markram. The role of dimensionality in neuronal network dynamics. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 11:48, 2017.
- [20] Alice Patania, Giovanni Petri, and Francesco Vaccarino. The shape of collaborations. *EPJ DATA SCIENCE*, 6, AUG 24 2017.

- [21] E OTT, C GREBOGI, and JA YORKE. Controlling chaos. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 64(11):1196–1199, MAR 12 1990.
- [22] LM PECORA and TL CARROLL. Synchronization in chaotic systems. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 64(8):821–824, FEB 19 1990.
- [23] U Parlitz. Estimating model parameters from time series by autosynchronization. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 76(8):1232–1235, FEB 19 1996.
- [24] DB Huang. Synchronization-based estimation of all parameters of chaotic systems from time series. *PHYSICAL REVIEW E*, 69(6, 2), JUN 2004.
- [25] Xiaoqun Wu, Xueyi Zhao, Jinhua Lu, Longkun Tang, and Jun-an Lu. Identifying topologies of complex dynamical networks with stochastic perturbations. *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL OF NETWORK SYSTEMS*, 3(4):379–389, DEC 2016.
- [26] Xueyi Zhao, Jin Zhou, Shuaibing Zhu, Cun Ma, and Jun-An Lu. Topology identification of multiplex delayed networks. *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS II-EXPRESS BRIEFS*, 67(2):290–294, FEB 2020.
- [27] Y. Zheng, X. Q. Wu, Z. Y. Fan, and W. Wang. Identifying topology and system parameters of fractional-order complex dynamical networks. *Applied Mathematics and Computation*, 414:126666, 2021.
- [28] Jin Zhou and Jun-an Lu. Topology identification of weighted complex dynamical networks. *PHYSICA A-STATISTICAL MECHANICS AND ITS APPLICATIONS*, 386(1):481–491, DEC 1 2007.
- [29] Xiaoqun Wu. Synchronization-based topology identification of weighted general complex dynamical networks with time-varying coupling delay. *PHYSICA A-STATISTICAL MECHANICS AND ITS APPLICATIONS*, 387(4):997–1008, FEB 1 2008.
- [30] Wenwu Yu, Guanrong Chen, Jinde Cao, Jinhua Lu, and Ulrich Parlitz. Parameter identification of dynamical systems from time series. *PHYSICAL REVIEW E*, 75(6, 2), JUN 2007.