数据结构

树与二叉树

2021年10月

深圳大学电子与信息工程学院 周飞

第五章 树与二叉树

第一节 树的概念与基本术语

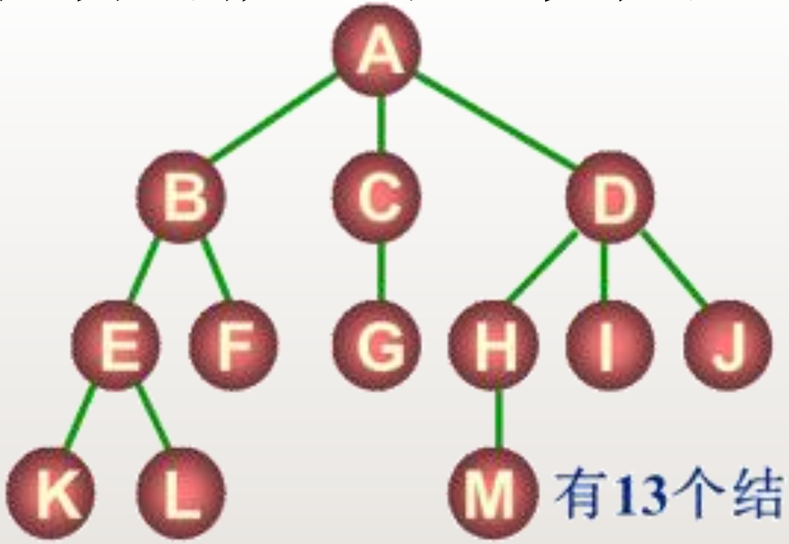
- 一、树(Tree)的定义
  - 树是一个有n个(n≥0)结点的有限集合。
  - 如果n=0，称为空树；
  - 如果n＞0，称为非空树，有且仅有一个特定的称为根（Root）的结点（无直接前驱）
  - 如果n＞1，除了根结点外，其他结点划分为m个互不相交的有限集合（记为T1、T2…Tm），每个集合本身又是一棵树，称为根的子树（Sub-tree）。
  - 每个结点肯定有唯一的前驱（除根结点外），但是可能有多个后继。

第五章 树与二叉树

第一节 树的概念与基本术语

- 一、树的定义（举例）

只有根结点的树



有13个结点的树

A是根；其余结点分成了3个互不相关的子集；

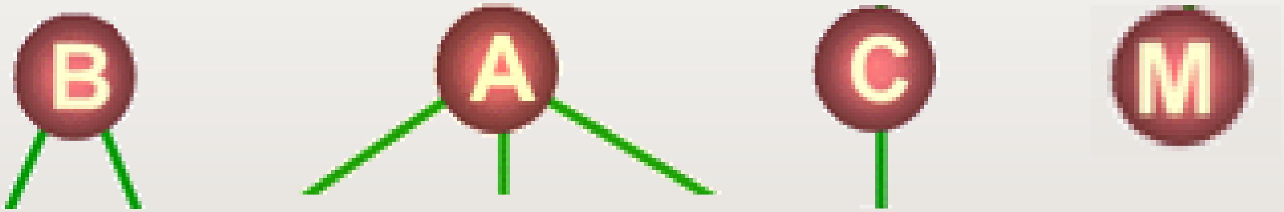
T1={B,E,F,K,L}　　T2={C,G}　　T3={D, H, I, J, M}

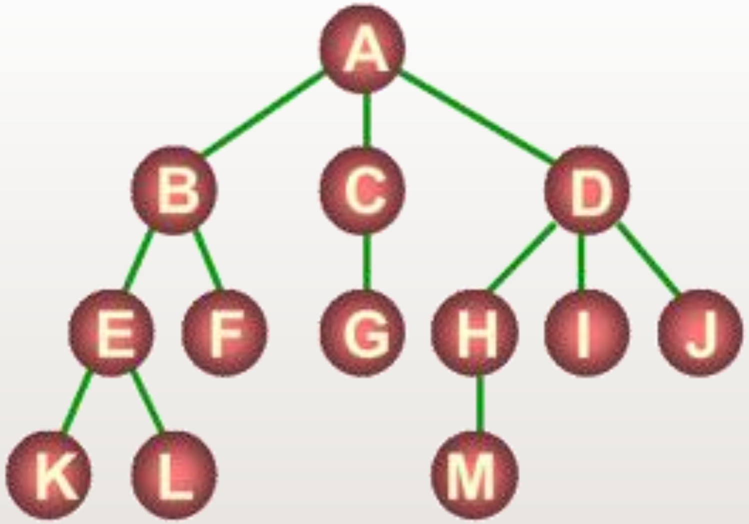
T1, T2, T3也都是一颗树，称为A的子树。

第五章 树与二叉树

第一节 树的概念与基本术语

- 二、树的术语
  - 结点
    - 包含一个数据元素及若干指向其子树的分支



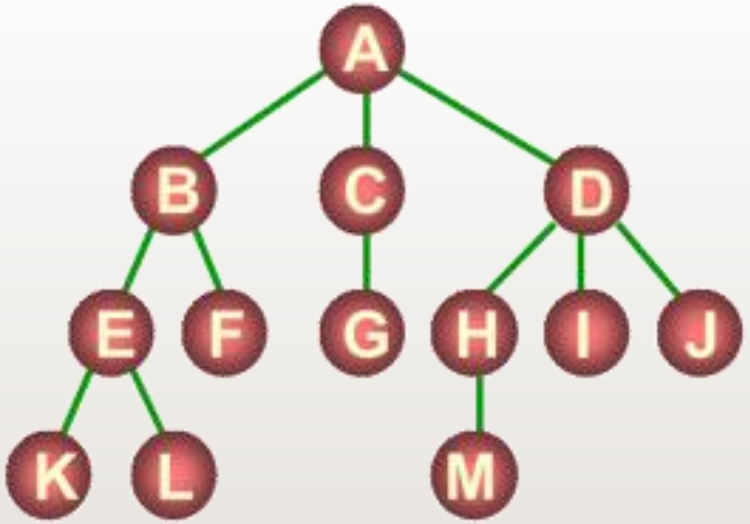


  - 结点的度
    - 结点拥有的子树个数，也即结点包含的分支个数

第五章 树与二叉树

第一节 树的概念与基本术语

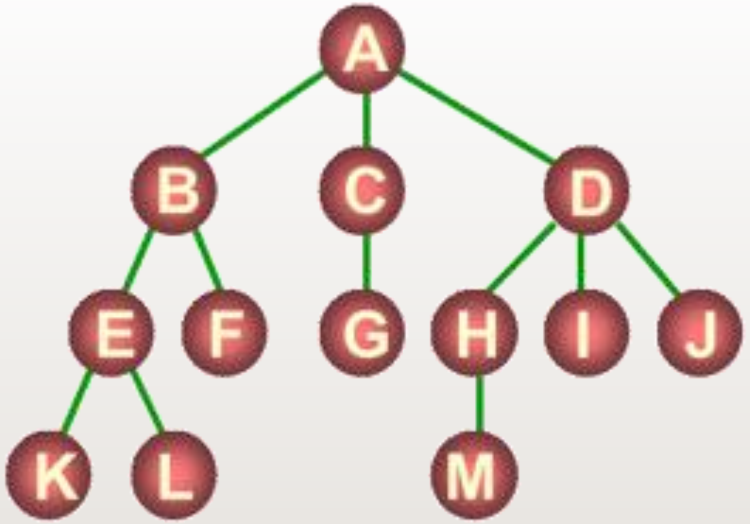
- 二、树的术语
  - 叶子结点（终端结点）
    - 度为0的结点　　{K,L,F,G,M,I,J}
  - 分支结点（非终端结点）
    - 度不为0的结点　　{A,B,C,D,E,H}
    - 包含根结点
  - 内部结点：除根之外的分支结点　　{B,C,D,E,H}



第五章 树与二叉树

第一节 树的概念与基本术语

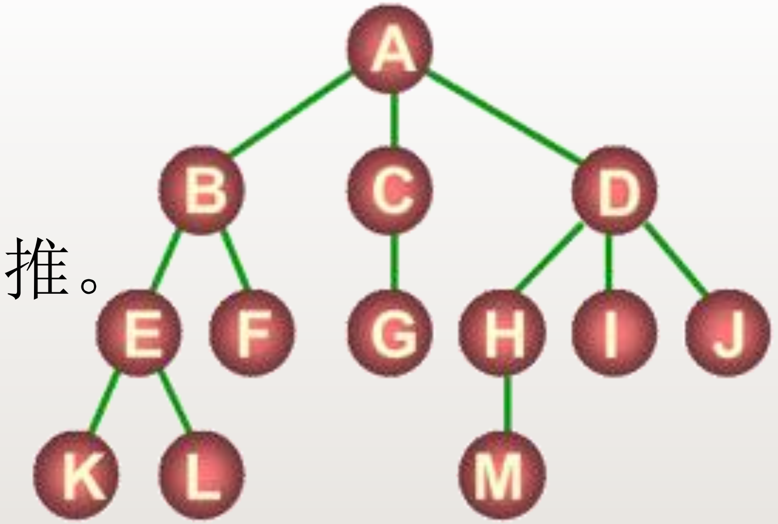
- 二、树的术语
  - 孩子：结点的子树的根（直接后继，可能有多个）
  - 双亲：孩子的直接前驱（最多只能一个）
  - 兄弟：同一个双亲的其他孩子
  - 子孙：以某结点为根的树中所有的结点
  - 祖先：从该结点到根结点，经过的所有分支结点



第五章 树与二叉树

第一节 树的概念与基本术语

- 二、树的术语
  - 树的层次
    - 根结点为第一层，根的孩子为第二层，依次类推。
  - 深度
    - 树中最大的层次。
  - 森林
    - 互不相交的树的集合。对于树中每个结点而已，其子树的集合就是森林。

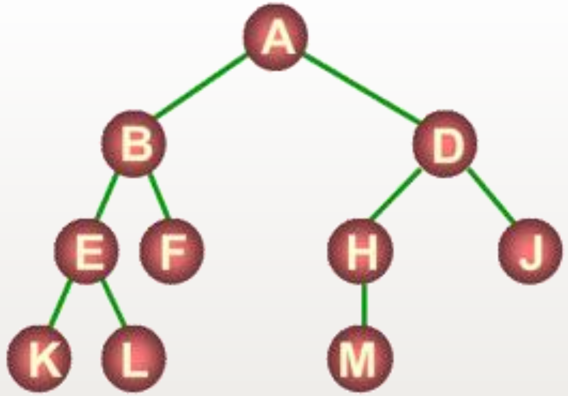


第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 一、二叉树（Binary Tree）
  - 每个结点最多只有2颗子树（最多2个孩子）
  - 二叉树的子树可以分成左右两个部分

  称为左子树和右子树

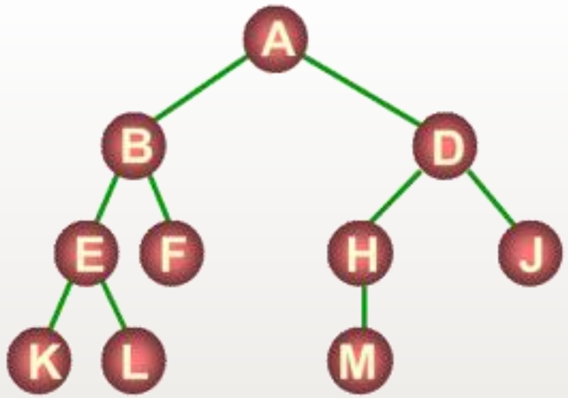


二叉树的左右子树交换之后是不同的树

二叉树的5种基本形态

第五章 树与二叉树

第二节 二叉树



- 二、二叉树的性质1

在二叉树的第i层上至多有2^{i-1}个结点

证明思路（归纳法）：

1）第1层至多只有根结点，即$1=2^{1-1}$个结点

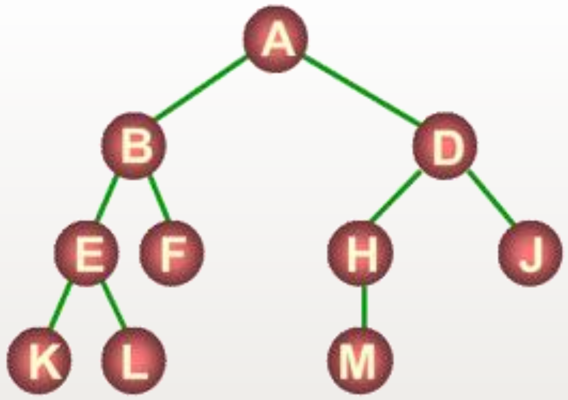
2）设第i-1层有$2^{(i-1)-1}$个结点，那么根据二叉树的定义知，每个结点最多两个孩子，所以第i层最多有$2\times2^{(i-1)-1}=2^{i-1}$个结点

第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 三、二叉树的性质2

深度为k的二叉树至多有2^k-1个结点



证明思路（求和）：

由性质 1，已知第i层上结点数最多为2^{i-1}

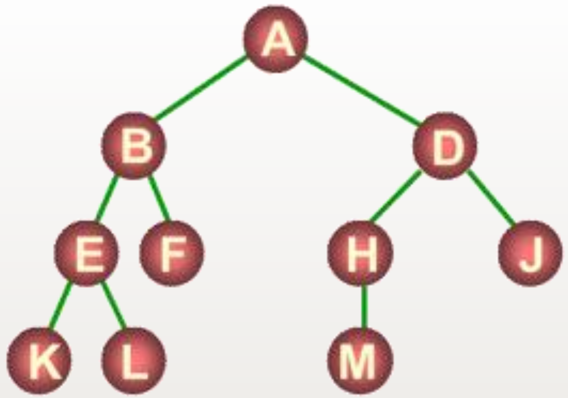
$$\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^k-1$$

第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 四、二叉树的性质3

如果二叉树终端结点数为n_0，度为2的结点数为n_2，则$n_0=n_2+1$



证明思路：　**总结点数$n= n_0+n_1+n_2$**

考察分支数 B：除了根之外，所有的结点都有且只有一个分支指向它

$$n=B+1$$

不同度的结点产生不同个数的分支 $B=n_1+2n_2$

$n=B+1=(n_1+2n_2)+1 = n_0+n_1+n_2$，因此 $n_0=n_2+1$

第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 四、二叉树的性质3
  - 例：
  - 一个二叉树的叶子结点有6个，度为1的结点有2个
  - 请问这颗树的总结点有多少个？分支数是多少？

结点数：6+2+5 = 13个
分支数：13 -1 =12个

第五章 树与二叉树

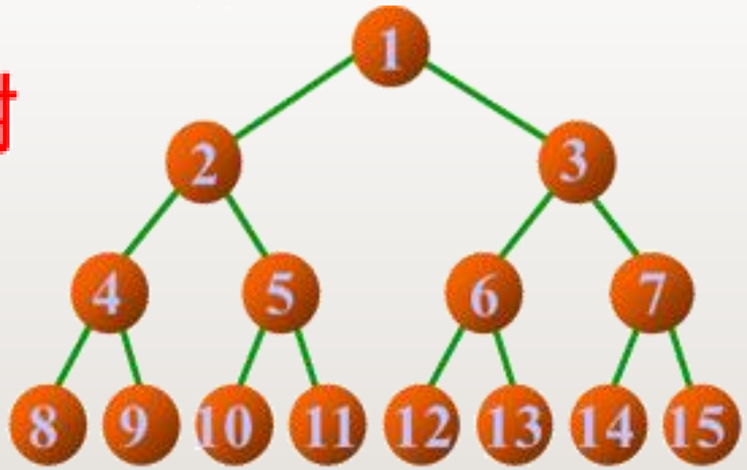
第二节 二叉树

- 五、满二叉树

一个深度为k且有2^k–1个结点的二叉树

每层上的结点数都是最大数

可以自上而下、自左至右连续编号



第五章 树与二叉树

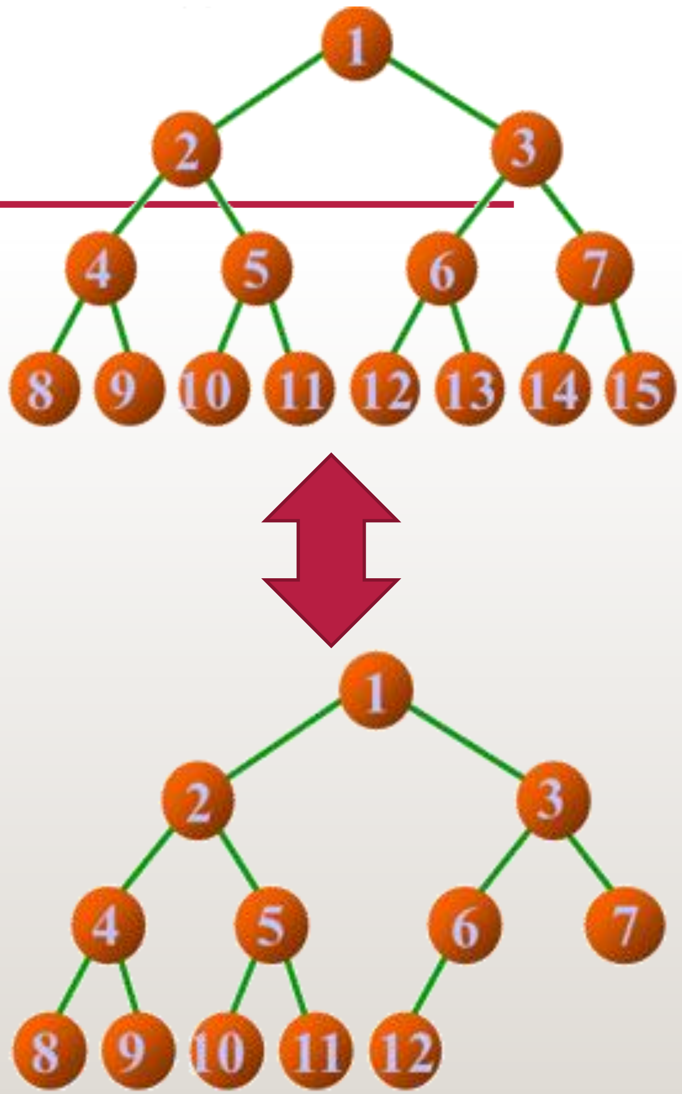
第二节 二叉树

- 五、完全二叉树

当且仅当每一个结点都与深度相同的满二叉树中编号从1到n的结点一一对应的二叉树

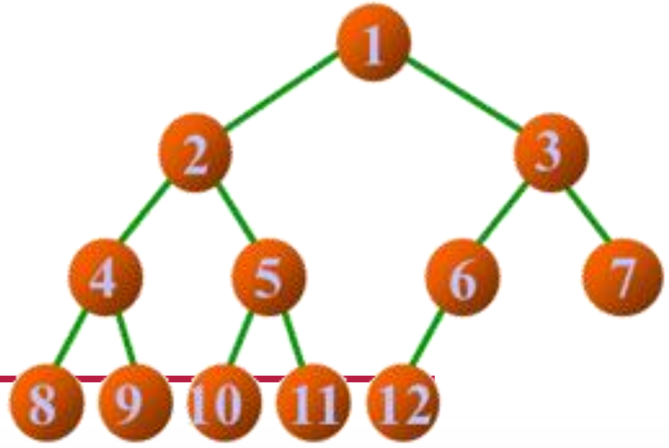
叶子结点只在最大两层上出现

以任何一个结点为根结点，其左子树深度与右子树深度相等或大 1



k层的完全二叉树，k-1层肯定是满的

第五章 树与二叉树



第二节 二叉树

- 五、完全二叉树（性质4）

具有n个结点的完全二叉树，其深度为$\lfloor \log_2 n \rfloor +1$

证明： 设k为深度

由二叉树性质2，$n \leqslant 2^k-1$ 又因为是完全二叉树，$2^{k-1}-1 < n$

$$2^{k-1}-1 < n \leqslant 2^k-1 \Longrightarrow 2^{k-1} \leqslant n < 2^k$$

$$\Longrightarrow k-1 \leqslant \log_2 n < k$$

$$\Longrightarrow k = \lfloor \log_2 n \rfloor +1$$

第五章 树与二叉树

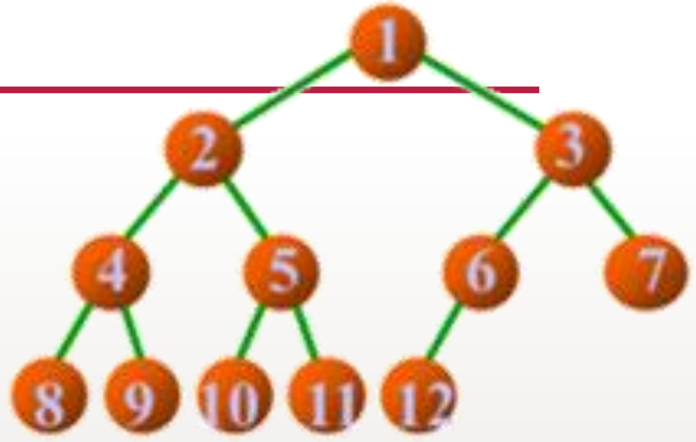
第二节 二叉树

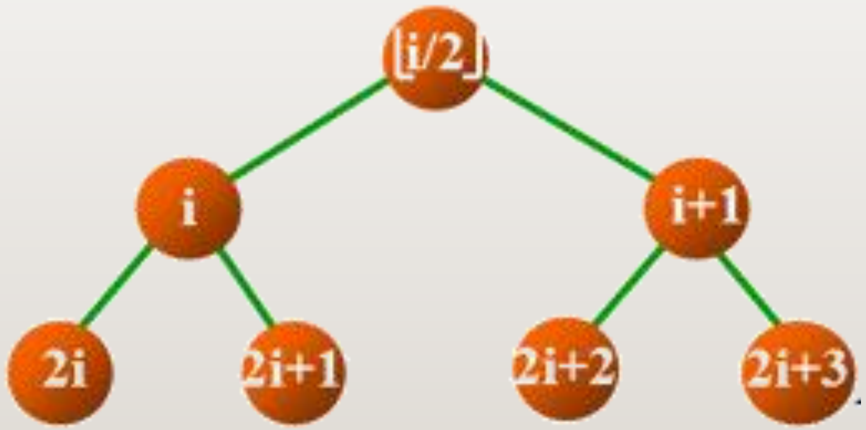
- 六、完全二叉树（性质5）

在完全二叉树中，结点i的双亲为⌊i/2⌋

结点i的左孩子LCHILD(i)=2i

结点i的右孩子RCHILD(i)=2i+1





17

4、一棵完全二叉树上有 1001 个结点，其中叶子结点的个数是（ D ）。

A、250　B、500　C、254　D、501

第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 七、二叉树的存储结构 ： 顺序存储

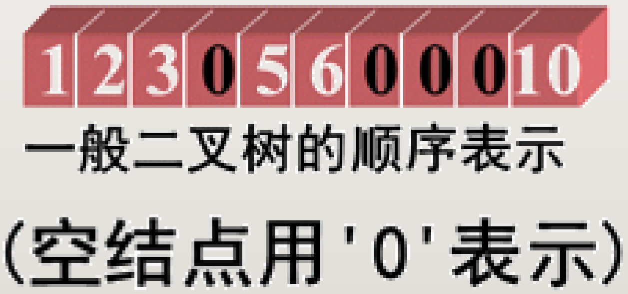
用一组连续的存储单元依次自上而下，自左至右存储结点

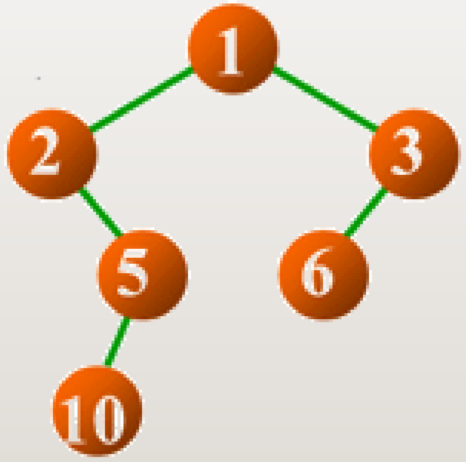
第五章 树与二叉树

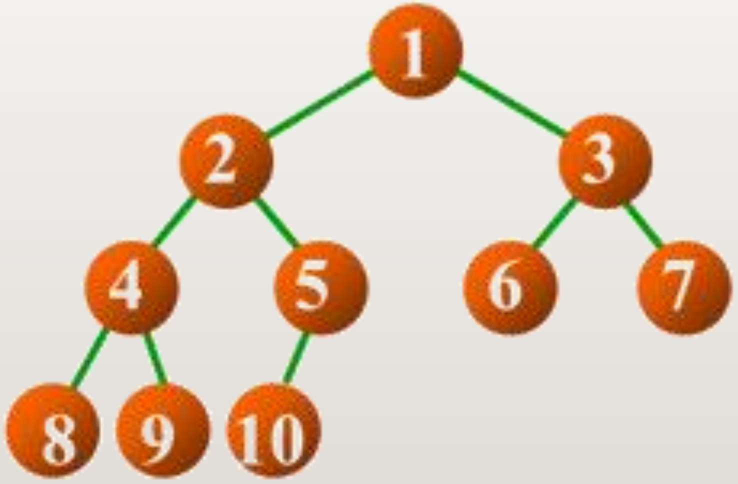
第二节 二叉树

- 七、二叉树的顺序存储结构

对于一般二叉树，空结点的位置也要按照完全二叉树编号。







对于非完全二叉树，浪费大量的空间

第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 八、二叉树的链式存储结构
  - 1、二叉链表
  - 采用数据域加上左右孩子的指针

第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 八、二叉树的链式存储结构
  - 2、二叉链表的定义

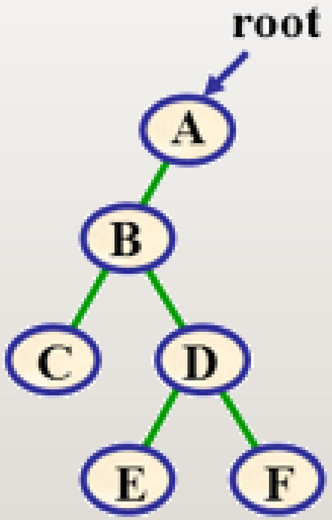
二叉链表的一个结点的可以用一个结构体表示，里面包含的成员有一个数据域，两个指针域

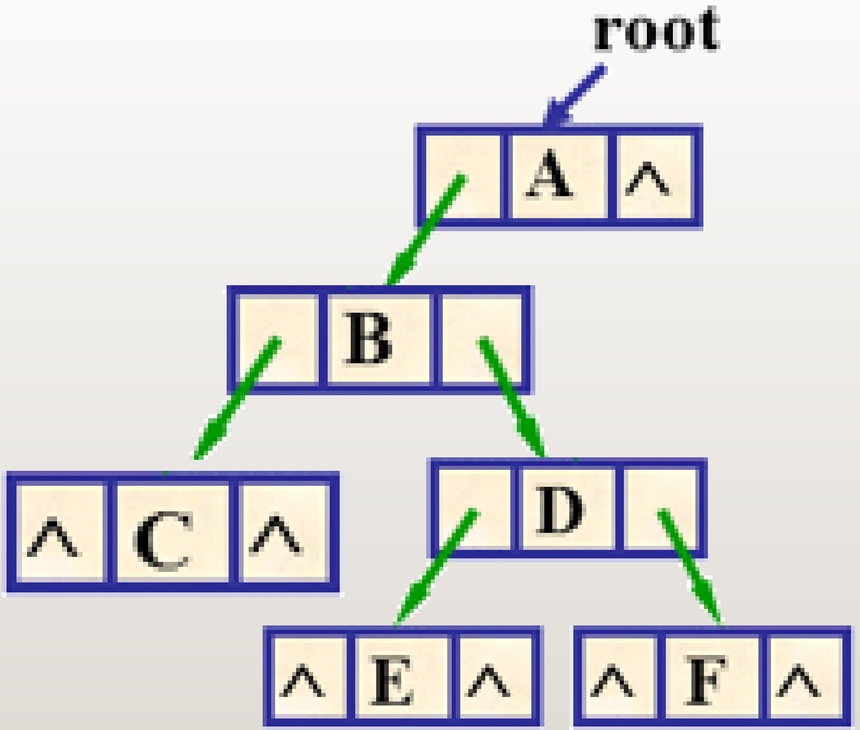
```
struct BiNode{
  char      data;
  BiNode  *lchild, *rchild;
};
BiNode *BiTree;
```

第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 八、二叉树的链式存储结构
  - 3、二叉链表的举例





只能双亲找孩子，孩子难以找到双亲！

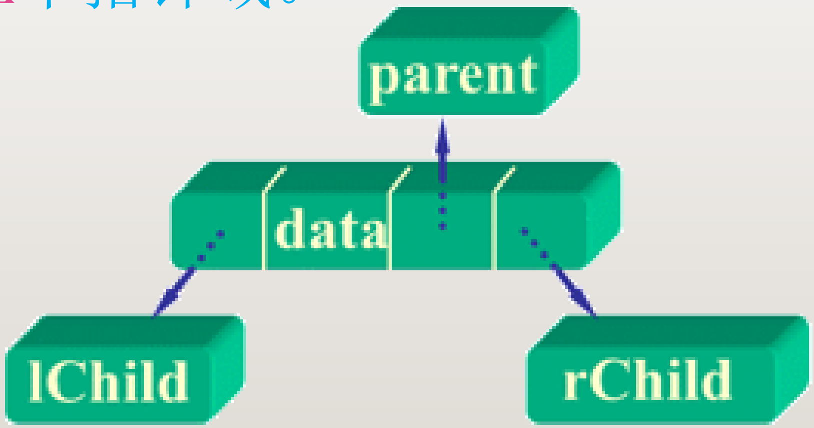
第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 八、二叉树的链式存储结构
  - 4、三叉链表

三叉链表的一个结点包含的成员有一个数据域，三个指针域。

这三个指针域分别存储左、右孩子和双亲的地址。



第五章 树与二叉树

第二节 二叉树

- 八、二叉树的链式存储结构
    - 5、三叉链表的举例