

Застосування Методу Максимізації Поліномів для Оцінювання Параметрів ARIMA Моделей з Асиметричними Негаусовими Інноваціями

Сергій Заболотній*

November 3, 2025

Abstract

Контекст та актуальність. Авторегресійні інтегровані моделі ковзного середнього (ARIMA) є одним із найпоширеніших інструментів аналізу часових рядів в економіці, фінансах та інших прикладних областях. Класичні методи оцінювання параметрів ARIMA моделей — метод максимальної правдоподібності (MLE), метод умовної суми квадратів (CSS) та звичайний метод найменших квадратів (OLS) — базуються на фундаментальному припущення гаусовості інновацій. На практиці, це припущення часто порушується, особливо у фінансових та економічних даних, де спостерігаються асиметричні розподіли з важкими хвостами.

Мета дослідження. У даній роботі ми розробляємо та досліджуємо застосування методу максимізації поліномів другого порядку (PMM2) для оцінювання параметрів ARIMA(p,d,q) моделей з негаусовими інноваціями. PMM2, розроблений Ю.П. Кунченко, є напівпараметричним методом, що використовує часткову параметризацію через моменти та кумулянти вищих порядків замість повної функції густини ймовірності.

Методологія. Ми розробили повний алгоритм PMM2 для ARIMA моделей, що включає диференціювання ряду, перевірку стаціонарності та ітеративну процедуру Ньютона-Рафсона для розв'язання системи PMM2 рівнянь. Для валідації методу проведено комплексні Monte Carlo симуляції з 2000 повторень дляожної конфігурації, що охоплюють різні розміри вибірки ($N \in \{100, 200, 500, 1000\}$) та чотири типи розподілів інновацій: гаусовий (контроль), гамма Gamma(2, 1) з $\gamma_3 \approx 1.41$, логнормальний з $\gamma_3 \approx 2.0$, та $\chi^2(3)$ з $\gamma_3 \approx 1.63$.

Результати. Емпіричні результати демонструють, що PMM2 забезпечує суттєве підвищення ефективності оцінювання для асиметричних розподілів (відносна ефективність визначається формулою (30)). Для ARIMA(1,1,0) моделей з гамма-розподіленими інноваціями при $N=500$ отримано відносну ефективність RE = 1.58 (що відповідає 37% зменшенню середньоквадратичної похибки), для логнормального розподілу RE = 1.71 (42% покращення), а для $\chi^2(3)$ RE = 1.90 (47% покращення). Для гаусових інновацій PMM2 демонструє ефективність близьку до OLS (RE ≈ 1.0), що узгоджується з теорією. Ефективність методу зростає з розміром вибірки та є стабільною для $N \geq 200$.

Практична цінність. Результати дослідження показують, що PMM2 є ефективним інструментом для аналізу часових рядів з асиметричними інноваціями,

*Cherkasy State Business College: Cherkasy, Ukraine. Email: zabolotnii.serhii@csbc.edu.ua

що типово зустрічаються у фінансових та економічних даних. Метод забезпечує суттєве зменшення дисперсії оцінок параметрів без вимог до повної специфікації розподілу похибок, що робить його привабливою альтернативою класичним методам. Надано практичні рекомендації щодо вибору між PMM2 та класичними методами на основі коефіцієнта асиметрії залишків.

Висновки. PMM2 є першим застосуванням методу максимізації поліномів до оцінювання параметрів ARIMA моделей. Метод демонструє значні переваги перед класичними підходами для негаусових інновацій, зберігаючи обчислювальну ефективність та простоту імплементації. Напрямки подальших досліджень включають розширення на сезонні SARIMA моделі, інтеграцію з моделями волатильності GARCH, та розробку автоматичних процедур вибору порядку моделі.

Ключові слова: ARIMA моделі, метод максимізації поліномів, PMM2, негаусові інновації, оцінювання параметрів, асимптотична ефективність, часові ряди, асиметричні розподіли, Monte Carlo симуляції

Abstract

Context. Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) models are among the most widely used tools for time series analysis in economics, finance, and related fields. Classical parameter estimation methods—Maximum Likelihood Estimation (MLE), Conditional Sum of Squares (CSS), and Ordinary Least Squares (OLS)—assume Gaussian innovations. However, this assumption is frequently violated in practice, particularly in financial and economic data exhibiting asymmetric distributions with heavy tails.

Objective. This study develops and investigates the application of the second-order Polynomial Maximization Method (PMM2) for estimating ARIMA(p,d,q) model parameters under non-Gaussian innovations. PMM2, developed by Y.P. Kunchenko, is a semi-parametric method that utilizes partial parameterization through higher-order moments and cumulants instead of full probability density specification.

Methodology. We developed a complete PMM2 algorithm for ARIMA models, incorporating series differencing, stationarity testing, and a Newton-Raphson iterative procedure for solving the PMM2 system of equations. Comprehensive Monte Carlo simulations with 2000 replications per configuration were conducted, spanning different sample sizes ($N \in \{100, 200, 500, 1000\}$) and four innovation distributions: Gaussian (control), Gamma $\text{Gamma}(2, 1)$ with $\gamma_3 \approx 1.41$, Lognormal with $\gamma_3 \approx 2.0$, and $\chi^2(3)$ with $\gamma_3 \approx 1.63$.

Results. Empirical results demonstrate that PMM2 provides substantial efficiency gains for asymmetric distributions. For an ARIMA(1,1,0) model with gamma-distributed innovations at $N=500$, we obtained relative efficiency $RE = 1.58$ (corresponding to 37% mean squared error reduction), for lognormal distribution $RE = 1.71$ (42% improvement), and for $\chi^2(3)$ $RE = 1.90$ (47% improvement). For Gaussian innovations, PMM2 exhibits efficiency close to OLS ($RE \approx 1.0$), consistent with theory. Method efficiency increases with sample size and is stable for $N \geq 200$.

Practical Value. The study demonstrates that PMM2 is an effective tool for analyzing time series with asymmetric innovations, commonly encountered in financial and economic data. The method provides substantial variance reduction in parameter estimates without requiring full error distribution specification, making it an attractive alternative to classical methods. Practical guidelines for choosing between PMM2 and classical methods based on residual skewness are provided.

Conclusions. PMM2 represents the first application of the polynomial maximization method to ARIMA parameter estimation. The method demonstrates significant advantages over classical approaches for non-Gaussian innovations while maintaining computational efficiency and implementation simplicity. Future research directions include extension to seasonal SARIMA models, integration with GARCH volatility models, and development of automatic model order selection procedures.

Keywords: ARIMA models, polynomial maximization method, non-Gaussian innovations, parameter estimation, asymptotic efficiency, time series analysis, skewed distributions, Monte Carlo simulation

Зміст

1 Вступ	7
1.1 Актуальність Проблеми	7
1.2 Обмеження Класичних Методів	8
1.3 Класичні Підходи: Короткий Огляд	8
1.4 Глибинне Навчання для Часових Рядів	9
1.5 Метод Максимізації Поліномів: Альтернативний Підхід	10
1.6 Дослідницька Прогалина та Внесок Роботи	11
1.7 Структура Статті	12
2 Методологія	12
2.1 ARIMA Моделі: Основи та Класичне Оцінювання	12
2.1.1 Визначення ARIMA(p,d,q) Моделі	12
2.1.2 Класичні Методи Оцінювання	13
2.2 Теоретичні Основи Методу Максимізації Поліномів	14
2.2.1 Стохастичні Поліноми	14
2.2.2 РММ для Асиметричних Розподілів	15
2.2.3 Асимптотичні Дисперсії та Ефективність ММПл-Оцінок	17
2.3 РММ2 для ARIMA Моделей: Адаптація Методу	18
2.3.1 Мотивація та принцип наближення	18
2.3.2 Конструкція псевдорегресорів	19
2.3.3 Моментне калібрування й стохастичний поліном	19
2.4 Алгоритм Оцінювання РММ2 для ARIMA	20
2.5 Асимптотичні Властивості РММ2 для ARIMA	20
2.5.1 Вплив згенерованих регресорів	21
2.5.2 Консистентність	21
2.5.3 Асимптотична нормальність	22
2.5.4 Відносна ефективність	22
2.6 Практичні Аспекти Реалізації	23
2.6.1 Вибір початкового оцінювача	23
2.6.2 Нормування та згладжування	23
2.6.3 Регуляризація та контроль обмежень	23
2.6.4 Пост-обробка та діагностика	23
3 Емпіричні Результати: Monte Carlo Дослідження	24
3.1 Дизайн Monte Carlo Експерименту	24
3.1.1 Загальна Структура Експерименту	24
3.1.2 Процедура Генерації Даних	24
3.1.3 Метрики Оцінювання Ефективності	25
3.1.4 Bootstrap Довірчі Інтервали	26
3.2 Результати для ARIMA(1,1,0) Моделі	27
3.2.1 Оцінювання при Гаусових Інноваціях	27
3.2.2 Оцінювання при Gamma Інноваціях	28
3.2.3 Оцінювання при Lognormal Інноваціях	28
3.2.4 Оцінювання при Chi-squared Інноваціях	29
3.3 Порівняння Ефективності для Різних Конфігурацій	29
3.3.1 Залежність RE від Коефіцієнта Асиметрії	29
3.3.2 Залежність від Розміру Вибірки	30

3.4	Результати для Інших Конфігурацій ARIMA	31
3.4.1	ARIMA(1,1,1) Модель	31
3.4.2	ARIMA(2,1,0) Модель	31
3.5	Робастність та Діагностика	32
3.5.1	Тести на Автокореляцію Залишків	32
3.5.2	Оцінка Кумулянтів Залишків	32
3.6	Підсумок Емпіричних Результатів	32
3.6.1	Візуалізація Порівняльної Ефективності	34
4	Застосування до Реальних Даних: WTI Crude Oil	34
4.1	Дані та передобробка	34
4.2	Порівняння методів	35
4.3	Ключові спостереження	36
4.4	Практичні рекомендації	37
4.5	Out-of-Sample Validation	37
4.6	Діагностичні Тести з Р-значеннями	37
4.7	Висновки	39
5	Дискусія	39
5.1	Інтерпретація Результатів	39
5.1.1	Ефективність PMM2 для Негаусових Інновацій	39
5.1.2	Квадратична Залежність RE від Асиметрії	40
5.1.3	Консистентність для Різних Конфігурацій ARIMA	40
5.2	Порівняння з Існуючою Літературою	41
5.2.1	Робастні M-Оцінки	41
5.2.2	Специфікації з Важкими Хвостами	41
5.2.3	Байесівські Методи	41
5.2.4	Квантильна Регресія для Часових Рядів	41
5.3	Практичні Рекомендації	41
5.3.1	Коли Використовувати PMM2?	41
5.3.2	Діагностичний Алгоритм для Практиків	42
5.3.3	Рекомендації щодо Прогнозування	43
5.4	Обмеження Поточного Дослідження	43
5.4.1	Обмеження на Розподіли Інновацій	43
5.4.2	Обмеження на Порядок Моделі	43
5.4.3	Відсутність Тестів на Вибір Моделі	43
5.4.4	Обмеження Інформаційних Критеріїв для PMM2	43
5.5	Теоретичні Міркування	44
5.5.1	Умови Регулярності	44
5.5.2	Оптимальність PMM2	44
5.6	Напрямки Майбутніх Досліджень	44
5.6.1	Розширення на SARIMA та Сезонні Моделі	44
5.6.2	Інтеграція з GARCH Моделями	45
5.6.3	PMM2 для Векторних ARIMA (VARIMA)	45
5.6.4	Онлайн та Адаптивні Версії PMM2	45
5.6.5	Робастні Варіанти PMM2	45
5.6.6	Порівняння з Глибинним Навчанням	45
5.7	Підсумок Дискусії	45

6 Висновки	46
6.1 Основні Результати	46
6.2 Практична Цінність	47
6.3 Науковий Внесок	48
6.4 Обмеження та Застереження	49
6.5 Заключні Зауваження	49
A WTI: додаткові матеріали	50
A.1 Дизайн емпіричного дослідження	50
A.2 Теоретична валідація	50
A.2.1 Діагностика Моделі ARIMA(1,1,1): Порівняння CSS-ML та PMM2	51
A.3 Практичні рекомендації (деталі)	51

1 Вступ

1.1 Актуальність Проблеми

Моделі авторегресії та інтегрованого ковзного середнього (ARIMA) залишаються одним з найпоширеніших інструментів аналізу та прогнозування часових рядів у сучасній науці. Починаючи від пionерської роботи Box i Jenkins (1970), ARIMA моделі знайшли застосування у фінансовій економетриці, макроекономічному прогнозуванні, аналізі метеорологічних даних, медичній статистиці та багатьох інших галузях [1, 2].

Класичні методи оцінювання параметрів ARIMA моделей — метод максимальної правдоподібності (MLE), метод умовної суми квадратів (CSS) та звичайний метод найменших квадратів (OLS) — базуються на фундаментальному припущення **гаусовості інновацій** (випадкових похибок). Це припущення забезпечує низку бажаних статистичних властивостей: асимптотичну ефективність оцінок, простоту обчислень та зрозумілу інференцію. Проте, практика аналізу реальних даних систематично демонструє порушення цього припущення.

Останні дослідження надають переконливі емпіричні свідчення негаусовості у різноманітних типах часових рядів:

- **Фінансові часові ряди:** Доходності акцій, обмінні курси та волатильність демонструють асиметричні розподіли з важкими хвостами. Дослідження показують, що навіть після врахування волатильності через GARCH моделі, важкі хвости залишаються [3, 4]. Нещодавнє дослідження Korean stock market підтвердило персистентність важких хвостів навіть після контролю за кризовими періодами та кластеризацією волатильності [5].
- **Економічні показники:** Ціни на сировинні товари, інфляційні дані та торговельні обсяги характеризуються значною асиметрією. Дослідження 15 економік за період 1851-1913 виявило сильний зв'язок між асиметрією цін на товари та інфляцією, при цьому до 48% варіації інфляції пояснюється змінами цін на товари [6].
- **Екологічні та метеорологічні дані:** Вимірювання забруднення, опади, температурні аномалії та сонячна активність часто мають асиметричний характер з екстремальними значеннями. Verma et al. (2025) продемонстрували важкі хвости у даних сонячних спалахів та обговорили теоретичні межі прогнозування за умов важких хвостів [7].
- **Високочастотні фінансові дані:** Mixed-stable моделі, застосовані до DAX компаній на 10-секундних інтервалах, виявили 43-82% нульових змін (стагнаційні ефекти), що потребує спеціальних методів моделювання [8, 9].

Нещодавні дослідження 2025 року продовжують підтверджувати ці висновки. Markiewicz & Wyłomańska (2021) показали, що SARIMAX моделі з Student-t інноваціями значно покращують прогнози для даних з важкими хвостами [10]. У роботі [11] продемонстровано, що врахування асиметрії через skew-normal розподіл зменшує MAE до 0.40 та RMSE до 0.49 для сценаріїв з негативною асиметрією.

1.2 Обмеження Класичних Методів

За умов порушення припущення гаусовості, класичні методи оцінювання параметрів ARIMA моделей зазнають суттєвих проблем:

Систематична зміщеність та неконсистентність. Pötscher (1991) продемонстрував, що псевдо-максимізатори правдоподібності можуть поводитися драстично інакше, ніж локальні максимізатори, коли розподіл інновацій специфіковано невірно. Gaussian pseudo-likelihood може призводити до неконсистентних оцінок за умов розподільної неспецифікації [12]. Fan, Qi & Xiu (2014) показали, що non-Gaussian квазі-MLE страждає від неконсистентності, якщо квазі-правдоподібність не є справжнім розподілом, пропонуючи двокроковий non-Gaussian QMLE для досягнення консистентності з вищою ефективністю порівняно з Gaussian QMLE [13].

Втрата статистичної ефективності. Навіть коли оцінки залишаються консистентними, їх дисперсія може бути суттєво завищеною порівняно з оптимальними оцінками, адаптованими до справжнього розподілу інновацій. Zhang & Sin (2012) показали, що граничні розподіли є сумішшю стабільних та гаусsovих процесів для near-unit root AR процесів з α -стабільним шумом, демонструючи ускладнення за умов важких хвостів та близькості до одиничного кореня [14].

Зниження точності прогнозів. Li et al. (2020) документували, що традиційні ARIMA моделі мають великі відхилення для високочастотного фінансового прогнозування, оскільки фінансові дані демонструють нерегулярні флюктуації, що потребують альтернативних підходів [15]. Dowe et al. (2025) у своїй дуже свіжій роботі показали, що гібридні ARFIMA-ANN підходи краще обробляють складну негаусову динаміку у фінансових та екологічних даних, при цьому використовуючи MML принцип для вибору моделі [16].

Невірні довірчі інтервали. Ledolter (1989) продемонстрував, що неврахування викидів збільшує середньоквадратичну похибку прогнозу та спричиняє зміщеність оцінених параметрів, з застосуваннями до даних цін акцій [17]. Це призводить до недооцінки або переоцінки невизначеності прогнозів, що критично важливо для прийняття рішень.

1.3 Класичні Підходи: Короткий Огляд

У відповідь на проблему негаусовості у часових рядах, науковою спільнотою розроблено декілька альтернативних підходів:

Робастні методи оцінювання (M-estimators). Започатковані класичною роботою Huber (1964) [18], M-estimators мінімізують робастні функції втрат, що менш чутливі до викидів та важких хвостів. Muler et al. (2009) запровадили BIP-ARMA моделі з MM-оцінками, що уникають поширення викидів через обмежені залишки, досягаючи консистентності та асимптотичної нормальності з ефективністю, порівнянною з MLE за нормальності [19]. Reisen et al. (2024) запропонували M-Whittle estimator з встановленою властивістю консистентності, що добре працює з викидами та шумом з важкими хвостами [20].

Квантильна регресія та LAD методи. Katsouris (2023) надав комплексний огляд моделей квантильної регресії часових рядів, що охоплює стаціонарні та нестаціонарні випадки, з Bahadur представленнями для квантільних процесів та рівномірною інференцією у квантільній пороговій регресії [21]. Для ARMA моделей з нескінченною дисперсією, Peng & Yao (2003), Ling (2005) та Zhu & Ling (2015) запропонували зважену оцінку найменших абсолютних відхилень (WLADE), що є асимптотично нормальнюю та незміщеною зі стандартною швидкістю збіжності root-n навіть за відсутності скінченної дисперсії [22–24].

Специфікації з важкими хвостами. Модифікація класичних ARIMA моделей шляхом заміни гаусових інновацій на розподіли з важкими хвостами (Student-t, Generalized Error Distribution, α -stable distributions) дозволяє краще моделювати екстремальні події. Wong et al. (2009) розробили Student-t mixture autoregressive модель з вищою гнучкістю порівняно з Gaussian MAR, де ступені свободи є випадковими змінними, використовуючи EM алгоритм для оцінювання параметрів у Байесовому фреймворку [25]. Нещодавне дослідження 2024 року виявило, що skewed GED найбільш ефективний для фінансових часових рядів порівняно з normal, Student-t, GED та Skewed Student-t розподілами за метриками goodness-of-fit [26].

Байесовські підходи. Graves et al. (2015) запропонували систематичний підхід до Байесовської інференції для ARFIMA моделей з новою апроксимативною правдоподібністю для ефективної інференції параметрів у процесах з довгою пам'яттю, що дозволяє інноваціям з широкого класу, включаючи α -stable та t-розподіли [27]. Байесовські методи також інтегрують невизначеність у всі параметри, забезпечуючи повну постеріорну інференцію замість точкових оцінок.

Кожен з цих підходів має свої переваги та обмеження. Робастні методи забезпечують стійкість до викидів, але можуть втрачати ефективність за умов помірних відхилень від нормальності. Квантільна регресія надає інформацію про різні частини розподілу, але не оптимізована для центральних оцінок параметрів. Специфікації з важкими хвостами потребують правильного вибору сімейства розподілів, що може бути проблематичним на практиці. Байесовські методи є обчислювально інтенсивними, особливо для великих наборів даних.

1.4 Глибинне Навчання для Часових Рядів

Останні три роки означені значним прогресом у методології моделювання часових рядів з негаусовими характеристиками. Нові підходи можна класифікувати за трьома основними напрямками: глибинне навчання, адаптивні методи з урахуванням режимних зрушень, та робастне оцінювання за структурних зламів.

Методи глибинного навчання демонструють вражаючі результати у прогнозуванні складних часових рядів, особливо для нелінійних та високовимірних даних. Однак їхнє застосування до проблеми негаусових інновацій має специфічні особливості.

Архітектури на основі Transformers. Останні дослідження показують, що архітектури Transformer, адаптовані для часових рядів, можуть неявно моделювати негаусові характеристики через механізм уваги (attention mechanism) [28]. Гіbridні моделі, що поєднують традиційні ARIMA з attention-based нейронними мережами, демонструють покращену точність прогнозування для фінансових часових рядів [29].

Foundations models, такі як TimeGPT-1 та Chronos, представляють новий напрямок узагальненого прогнозування на різноманітних наборах даних без специфічного навчання [30]. Проте ці моделі є:

- **Data-hungry**: потребують тисяч спостережень для стабільного навчання, тоді як класичні ARIMA працюють з $N \geq 100$
- **Black-box**: відсутність інтерпретованих параметрів ускладнює економетричну інференцію
- **Computationally intensive**: навчання вимагає GPU та займає години, порівняно з класичними моделями.

Важливо відзначити, що глибинні моделі оптимізовані для мінімізації prediction error, а не для ефективного *оцінювання параметрів* основного процесу генерації даних.

1.5 Метод Максимізації Поліномів: Альтернативний Підхід

Метод максимізації поліномів (Polynomial Maximization Method, PMM), розроблений українським вченим Ю.П. Кунченко, представляє альтернативну філософію статистичного оцінювання [31, 32]. На відміну від класичного методу максимальної правдоподібності, який потребує повної специфікації густини ймовірності, PMM базується на **частковій імовірнісній параметризації** через моменти та кумулянти вищих порядків.

Центральною конструкцією методу є максимізація стохастичного полінома порядку S відносно параметрів моделі. Ключова ідея полягає в тому, що замість максимізації повної функції правдоподібності, метод максимізує вибіркову статистику в околі справжніх значень оцінюваних параметрів [32, 33].

PMM метод успішно застосовувався до різноманітних задач статистичного оцінювання:

- **Лінійна регресія**: Zabolotnii et al. (2018) продемонстрували застосування PMM2 до лінійної регресії з асиметричним розподілом похибок, досягаючи зменшення дисперсії на 15-35% порівняно з OLS для gamma та lognormal розподілів [34].
- **Поліноміальна регресія**: Zabolotnii et al. (2021) розширили метод на поліноміальну регресію з розподілом експоненціальної потужності (generalized Gaussian distribution), підтверджуючи ефективність через Monte Carlo та bootstrap симуляції [35].
- **Обробка сигналів**: Palahin & Juhár (2016) застосували PMM до спільногого оцінювання параметрів сигналу у негаусовому шумі, показавши, що нелінійна обробка через кумулянти третього та вищих порядків може зменшити дисперсію спільногого оцінювання параметрів порівняно з конвенційними методами [36].
- **Метрологічні вимірювання**: Warsza & Zabolotnii (2017, 2018) використали PMM для оцінювання параметрів вимірювань з негаусовими симетричними та асиметричними розподілами даних, розробляючи методику PMM3 для симетричних розподілів [37, 38].

Варто відзначити, що РММ метод позиціонується між класичним методом моментів та методом максимальної правдоподібності. На відміну від узагальненого методу моментів (GMM) Hansen (1982) [39], який мінімізує зважену суму квадратів відхилень між вибірковими та популяційними моментами, РММ максимізує стохастичний поліном, використовуючи для його побудови моменти або кумулянти вищих порядків.

1.6 Дослідницька Прогалина та Внесок Роботи

Незважаючи на успішне застосування РММ2 до регресійних задач та обробки сигналів, його систематичне використання для оцінювання параметрів ARIMA моделей з негаусовими інноваціями залишається недостатньо дослідженім. Існує кілька ключових дослідницьких прогалин:

Нерозвиненість моментно-кумулянтних методів для часових рядів. Хоча моменти або кумулянти вищих порядків широко використовуються в обробці сигналів та спектральному аналізі, їх застосування до оцінювання параметрів моделей часових рядів обмежене. Більшість методів для негаусових ARIMA зосереджені на робастних функціях втрат або специфікації розподілів, але не на явній експлуатації моментно-кумулянтного опису.

Недостатня увага до асиметричних інновацій. Більшість робіт з негаусових ARIMA фокусуються на симетричних розподілах з важкими хвостами (Student-t, GED). Асиметричні розподіли, які РММ2 спеціально адресує, отримують менше уваги, незважаючи на їх емпіричну поширеність у фінансових доходностях та економічних показниках.

Методологічний розрив між регіональними дослідницькими спільнотами. Метод Кунченка, незважаючи на сильні теоретичні основи та успішні застосування в Східній Європі, залишається малознайомим у західній літературі з часових рядів. Ця робота має на меті інтегрувати східноєвропейську статистичну методологію з західною економетричною літературою часових рядів (Box-Jenkins, ARIMA).

Відсутність порівняльних досліджень ефективності. Порівняльні дослідження зазвичай порівнюють MLE, M-estimators, LAD та квантільну регресію. Порівняння ефективності моментно-кумулянтних методів, таких як РММ, відносно цих альтернатив відсутні для ARIMA моделей.

Дане дослідження заповнює ці прогалини шляхом:

1. **Розробки повної методології** застосування РММ2 до ARIMA(p,d,q) моделей, включаючи обробку диференціювання, перевірку стаціонарності та адаптацію алгоритму оцінювання до структури часових рядів.
2. **Створення повної імплементації на мові R** методу з відкритим вихідним кодом для забезпечення відтворюваності та практичного використання науковою спільнотою.

3. Проведення comprehensive Monte Carlo симуляцій (2000+ ітерацій) для верифікації ефективності методу при різних розмірах вибірки ($N = 100, 200, 500, 1000$) та типах розподілів інновацій (gamma, lognormal, chi-squared, Gaussian).
4. Систематичного порівняння з існуючими методами (CSS, OLS, Ніверівські M-оцінки) за метриками bias, variance, MSE, relative efficiency та variance reduction для встановлення умов, за яких PMM2 забезпечує переваги.
5. Формулювання практичних рекомендацій щодо вибору методу оцінювання на основі кумулянтних коефіцієнтів залишків (γ_3, γ_4) та характеристик даних.

1.7 Структура Статті

Решта статті організована наступним чином:

- Розділ 2 надає детальну методологію PMM2 для ARIMA моделей, включаючи математичну формулювання, алгоритм оцінювання та асимптотичну теорію.
- Розділ 3 описує дизайн Monte Carlo симуляцій та представляє емпіричні результати для різних конфігурацій.
- Розділ 4 демонструє застосування PMM2 до реальних даних WTI Crude Oil, охоплюючи передобробку, оцінювання параметрів та порівняння з альтернативними методами.
- Розділ 5 обговорює інтерпретацію результатів, практичні рекомендації, обмеження та напрямки подальших досліджень.
- Розділ 6 підsumовує основні висновки та внески дослідження.

2 Методологія

У цьому розділі ми надаємо повну методологію застосування методу максимізації поліномів другого порядку (PMM2) до оцінювання параметрів ARIMA моделей з негаусовими інноваціями. Спочатку формулюємо ARIMA модель та класичні методи оцінювання, потім розглядаємо теоретичні основи PMM2, адаптуємо метод до контексту часових рядів, та надаємо алгоритм реалізації з асимптотичною теорією.

2.1 ARIMA Моделі: Основи та Класичне Оцінювання

2.1.1 Визначення ARIMA(p,d,q) Моделі

Авторегресійна інтегрована модель ковзного середнього ARIMA(p,d,q) описує часовий ряд $\{y_t\}_{t=1}^T$ через три компоненти: авторегресійну (AR) порядку p , диференціювання порядку d , та ковзного середнього (MA) порядку q .

Визначення 2.1 (ARIMA(p,d,q) модель). Часовий ряд $\{y_t\}$ слідує ARIMA(p, d, q) моделі, якщо d -та різниця ряду

$$z_t = \Delta^d y_t = (1 - B)^d y_t \quad (1)$$

задоволює стаціонарну та оборотну ARMA(p, q) модель:

$$\Phi(B)z_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (2)$$

де B — оператор зсуву ($By_t = y_{t-1}$), та

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p \quad (3)$$

$$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q \quad (4)$$

є поліномами автoreгресії та коефіцієнта середнього відповідно, а $\{\varepsilon_t\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених (i.i.d.) інновацій з нульовим середнім та дисперсією σ^2 .

Еквівалентно, ARIMA модель може бути записана у явній формі:

$$y_t = \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} (-1)^{j+1} y_{t-j} + \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{k=1}^q \theta_k z_{t-k} \quad (5)$$

Умови стаціонарності та оборотності.

- **Стаціональність:** Корені характеристичного рівняння $\Phi(z) = 0$ лежать поза одиничним колом: $|z_i| > 1$ для всіх $i = 1, \dots, p$.
- **Оборотність:** Корені характеристичного рівняння $\Theta(z) = 0$ лежать поза одиничним колом: $|z_j| > 1$ для всіх $j = 1, \dots, q$.

2.1.2 Класичні Методи Оцінювання

Нехай $\boldsymbol{\theta} = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)^\top$ — вектор параметрів розміру $k = p + q$.

Метод умовної суми квадратів (CSS). CSS метод мінімізує умовну суму квадратів залишків:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{CSS}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} S(\boldsymbol{\theta}) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{t=p+1}^T \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\theta}) \quad (6)$$

де $\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})$ — залишки, обчислені рекурсивно з початковими умовами $\varepsilon_t = 0$ для $t \leq 0$ та $z_t = 0$ для $t \leq 0$.

Звичайний метод найменших квадратів (OLS). Для автoreгресійної частини, OLS оцінює параметри через лінійну регресію:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{OLS}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{z} \quad (7)$$

де $\mathbf{z} = (z_{p+1}, \dots, z_T)^\top$ та \mathbf{X} — матриця регресорів розміру $(T - p) \times p$ з елементами $X_{ti} = z_{t-i}$.

Метод максимальної правдоподібності (MLE). За припущення гаусовості інновацій $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, MLE максимізує функцію правдоподібності:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MLE}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ -\frac{T}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\theta}) \right\} \quad (8)$$

За умови нормальності, MLE є асимптотично ефективним, консистентним та асимптотично нормальним:

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MLE}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left[\mathbb{E} \left(\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right) \right]^{-1} \right) \quad (9)$$

Однак, ці властивості порушуються за умов негаусовості інновацій.

2.2 Теоретичні Основи Методу Максимізації Поліномів

2.2.1 Стохастичні Поліноми

Метод максимізації поліномів (ММПл) базується на концепції стохастичних поліномів, що є поліноміальними функціями випадкових величин з коефіцієнтами, що залежать від параметрів моделі. Цей метод було розроблено для оцінювання параметрів коли імовірнісні властивості даних суттєво відрізняються від гаусового (нормального) закону.

Визначення 2.2 (Стохастичний поліном порядку S загального виду). Для послідовності випадкових величин y_v , $v = \overline{1, N}$, та векторного параметра \mathbf{a} , стохастичний поліном порядку S загального виду визначається як:

$$L_{SN} = \sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^S \phi_i(y_v) \int k_{iv}(a) dz - \sum_{i=1}^S \sum_{v=1}^N \int \Psi_{iv} k_{iv}(a) dz \quad (10)$$

де $\phi_i(y_v)$ – базисні функції, $k_{iv}(a)$ – вагові коефіцієнти, що залежать від параметра a , та $\Psi_{iv} = E\{\phi_i(y_v)\}$ – математичні сподівання базисних функцій, які є двічі диференційовними по параметру a .

Фундаментальні властивості стохастичного полінома. Стохастичний поліном L_{SN} виду (10) володіє двома основними властивостями [32]:

- Для будь-якого порядку S при асимптотичному зростанні обсягу вибірки $N \rightarrow \infty$ поліном L_{SN} як функція параметра a приймає максимум в околиці істинного значення цього параметра;
- При різних вибірках відхилення максимуму полінома L_{SN} від істинного значення параметра a має мінімальну дисперсію для відповідного порядку полінома S .

За аналогією до методу максимальної правдоподібності, оцінку параметра a можна знаходити із розв'язання рівняння:

$$\frac{d}{da} L_{SN} \Big|_{a=\hat{a}} = \sum_{i=1}^S \sum_{v=1}^N k_{iv} [\phi_i(y_v) - \Psi_{iv}] \Big|_{a=\hat{a}} = 0 \quad (11)$$

Оптимальні коефіцієнти та система рівнянь. Оптимальні коефіцієнти k_{iv} , що максимізують функціонал (10), знаходяться з розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^S k_{jv} F_{(i,j)v} = \frac{d}{da} \Psi_{iv}, \quad i = \overline{1, S}, \quad v = \overline{1, N} \quad (12)$$

де $F_{(i,j)v} = \Psi_{(i,j)v} - \Psi_{iv} \Psi_{jv}$, $\Psi_{(i,j)v} = E\{\phi_i(y_v) \phi_j(y_v)\}$, $i, j = \overline{1, S}$.

Векторний параметр та багатопараметричне оцінювання. Для випадку знахідження оцінок векторного параметра $\boldsymbol{\theta} = (a_0, a_1, \dots, a_{Q-1})^\top$ необхідно використовувати Q поліномів $L_{SN}^{(p)}$, $p = \overline{0, Q-1}$ загального виду (10) для кожної компоненти a_p векторного параметра.

Кожний p -ий стохастичний поліном $L_{SN}^{(p)}$ як функція параметра a_p при відомих значеннях інших складових вектору $\boldsymbol{\theta}$ при $N \rightarrow \infty$ також має максимум в околиці істинного значення параметра a_p . Щукані оцінки параметра знаходяться як розв'язок системи рівнянь:

$$f_{SN}^{(p)}(y_v, x_v) = \sum_{i=1}^S \sum_{v=1}^N k_{iv}^{(p)} [\phi_i(y_v) - \Psi_{iv}] \Big|_{a_p=\hat{a}_p} = 0, \quad p = \overline{0, Q-1} \quad (13)$$

2.2.2 РММ для Асиметричних Розподілів

Розглянемо застосування стохастичних поліномів до лінійної багатофакторної регресії з асиметрично розподіленою випадковою складовою. Нехай спостереження $\{y_v\}_{v=1}^N$ описуються моделлю

$$y_v = \mathbf{x}_v^\top \boldsymbol{\theta} + \xi_v, \quad \mathbf{x}_v = (1, x_{1,v}, \dots, x_{Q-1,v})^\top, \quad (14)$$

де $\boldsymbol{\theta} = (a_0, a_1, \dots, a_{Q-1})^\top$ — вектор регресійних параметрів, а випадкова похибка ξ_v задовольняє умовам

$$\mathbb{E}[\xi_v] = 0, \quad \mathbb{E}[\xi_v^2] = \mu_2 > 0, \quad \mathbb{E}[\xi_v^3] = \mu_3 \neq 0, \quad \mathbb{E}[\xi_v^4] = \mu_4 < \infty.$$

Позначимо також $\eta_v(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}_v^\top \boldsymbol{\theta}$ та $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]^\top$.

РММ1: лінійний стохастичний поліном і еквівалентність МНК. При степені $S = 1$ базисною функцією обираємо $\phi_1(y_v) = y_v$, що дає математичне сподівання $\Psi_{1v} = \mathbb{E}[y_v] = \eta_v(\boldsymbol{\theta})$. Коваріація $F_{(1,1)v} = \mu_2$ є сталою, а оптимальні коефіцієнти поліному (10) обчислюються з (12) як $k_{1,v}^{(p)} = x_{p,v}/\mu_2$, де $x_{0,v} \equiv 1$. Умови максимуму полінома зводяться до

$$\sum_{v=1}^N x_{p,v} [y_v - \eta_v(\boldsymbol{\theta})] = 0, \quad p = \overline{0, Q-1}, \quad (15)$$

що еквівалентно класичній системі нормальних рівнянь $\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$. Отже, РММ1 відтворює МНК-оцінки

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{PMM1}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}, \quad (16)$$

які залишаються оптимальними лише за гаусового розподілу похибок.

PMM2: стохастичний поліном другого порядку. Для врахування асиметрії формуємо стохастичний поліном із базисними функціями

$$\phi_1(y_v) = y_v, \quad \Psi_{1v} = \eta_v(\boldsymbol{\theta}), \quad (17)$$

$$\phi_2(y_v) = y_v^2, \quad \Psi_{2v} = \eta_v^2(\boldsymbol{\theta}) + \mu_2. \quad (18)$$

Матричні елементи $F_{(i,j)v} = \Psi_{(i,j)v} - \Psi_{iv}\Psi_{jv}$ визначаються центральними моментами до четвертого порядку, а оптимальні коефіцієнти (12) набувають вигляду

$$k_{1,v}^{(p)} = \frac{\mu_4 - \mu_2^2 + 2\mu_3\eta_v(\boldsymbol{\theta})}{\Delta} x_{p,v}, \quad (19)$$

$$k_{2,v}^{(p)} = -\frac{\mu_3}{\Delta} x_{p,v}, \quad (20)$$

де

$$\Delta = \mu_2(\mu_4 - \mu_2^2) - \mu_3^2 > 0. \quad (21)$$

Вектор рівнянь для оцінювання $\boldsymbol{\theta}$ набуває узагальненого вигляду

$$g_p(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{v=1}^N x_{p,v} \left\{ \frac{\mu_4 - \mu_2^2 + 2\mu_3\eta_v(\boldsymbol{\theta})}{\Delta} [y_v - \eta_v(\boldsymbol{\theta})] - \frac{\mu_3}{\Delta} [y_v^2 - \eta_v^2(\boldsymbol{\theta}) - \mu_2] \right\} = 0, \quad (22)$$

де $p = \overline{0, Q-1}$. Система (22) переходить до МНК при $\mu_3 = 0$.

Помноживши рівняння (22) на Δ та згрупувавши члени за ступенями $\eta_v(\boldsymbol{\theta})$, одержуємо еквівалентну квадратичну систему

$$\sum_{v=1}^N x_{p,v} [A_2\eta_v^2(\boldsymbol{\theta}) + B_{2,v}\eta_v(\boldsymbol{\theta}) + C_{2,v}] = 0, \quad p = \overline{0, Q-1}, \quad (23)$$

де коефіцієнти:

$$A_2 = \mu_3, \quad B_{2,v} = (\mu_4 - \mu_2^2) - 2\mu_3 y_v, \quad C_{2,v} = \mu_3 y_v^2 - y_v(\mu_4 - \mu_2^2) - \mu_2 \mu_3. \quad (24)$$

Узагальнена матрична форма та формула Ньютона–Рафсона. Позначимо $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = (g_0(\boldsymbol{\theta}), \dots, g_{Q-1}(\boldsymbol{\theta}))^\top$ та введемо

$$\lambda_v(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2\mu_3 [y_v - \eta_v(\boldsymbol{\theta})] - (\mu_4 - \mu_2^2)}{\Delta}. \quad (25)$$

Тоді матриця похідних $\mathbf{J}_{\text{PMM2}}(\boldsymbol{\theta}) = \partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta}^\top$ набуває компактного запису

$$\mathbf{J}_{\text{PMM2}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{v=1}^N \lambda_v(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}_v \mathbf{x}_v^\top, \quad (26)$$

Крок Ньютона–Рафсона для знаходження $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{PMM2}}$ має вигляд

$$\boldsymbol{\theta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(m)} - \mathbf{J}_{\text{PMM2}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^{(m)}) \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(m)}), \quad (27)$$

де як початкове наближення $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ доцільно використовувати МНК-оцінку (16).

Адаптивна процедура. У практичних застосуваннях моменти μ_2, μ_3, μ_4 невідомі, тому їх замінюють вибірковими оцінками на основі поточних залишків. Стандартна ітераційна схема має вигляд:

1. **Крок 1:** Обчислити МНК-оцінку $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{OLS}}$ та сформувати залишки $\hat{\xi}_v^{(0)} = y_v - \mathbf{x}_v^\top \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\text{OLS}}$.

2. **Крок 2:** Для ітерації m оновити моменти за формулами

$$\hat{\mu}_r^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \left(\hat{\xi}_v^{(m)} \right)^r, \quad r \in \{2, 3, 4\},$$

та визначити ексцес $\hat{\gamma}_4^{(m)} = \hat{\mu}_4^{(m)} / (\hat{\mu}_2^{(m)})^2 - 3$ й коефіцієнт асиметрії $\hat{\gamma}_3^{(m)} = \hat{\mu}_3^{(m)} / (\hat{\mu}_2^{(m)})^{3/2}$.

3. **Крок 3:** Якщо $|\hat{\gamma}_3^{(m)}| < 0.1$, доцільно залишитись на МНК-оцінці. Інакше розв'язати (22) методом (27) з використанням $\hat{\mu}_r^{(m)}$ та отримати новий вектор $\boldsymbol{\theta}^{(m+1)}$.

4. **Крок 4:** Оновити залишки $\hat{\xi}_v^{(m+1)} = y_v - \mathbf{x}_v^\top \boldsymbol{\theta}^{(m+1)}$ та повторити кроки 2–4 до збіжності.

2.2.3 Асимптотичні Дисперсії та Ефективність ММПл-Оцінок

Матриця кількості добутої інформації. Для отримання аналітичних виразів, що описують дисперсії ММПл-оцінок векторного параметра $\boldsymbol{\theta}$, використовується матриця кількості добутої інформації про компоненти параметру при застосуванні стохастичних поліномів порядку S . Така матриця $\mathbf{J}_s(\boldsymbol{\theta})$ складається із елементів:

$$J_{SN}^{(p,q)} = \sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S k_{iv}^{(p)} k_{jv}^{(q)} F_{(i,j)v} = \sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^S k_{i,v}^{(p)} \frac{\partial}{\partial a_q} \Psi_{iv}, \quad p, q = \overline{0, Q-1} \quad (28)$$

У статистичному сенсі кількість добутої інформації концептуально є поняттям близьким до кількості інформації по Фішеру. Дисперсії ММПл-оцінок складових векторного параметру в асимптотичному випадку (при $N \rightarrow \infty$) можуть бути отримані як елементи головної діагоналі варіаційної матриці $\mathbf{V}_s(\boldsymbol{\theta})$, яка є оберненою до матриці (28):

$$\mathbf{V}_{\text{PMM2}}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{J}_s(\boldsymbol{\theta})]^{-1} \quad (29)$$

Властивість збіжності до межі Рао-Крамера. Важлива властивість ММПл полягає у тому, що при збільшенні числа членів стохастичного поліному S дисперсія оцінок зменшується, оскільки кількість добутої інформації асимптотично (при $S \rightarrow \infty$) прямує до інформації по Фішеру.

Теорема 2.3 (Відносна ефективність PMM2 щодо OLS для асиметричних розподілів). За умови, що інновації ε_t мають скінченні моменти до четвертого порядку включно та асиметричний характер розподілу ($\gamma_3 \neq 0$), відносна ефективність PMM2 оцінювача ($S = 2$) щодо OLS визначається формулою:

$$\text{RE}_{\text{PMM2}/\text{OLS}} = \frac{\text{Var}(\hat{\theta}_{\text{OLS}})}{\text{Var}(\hat{\theta}_{\text{PMM2}})} = \frac{2 + \gamma_4}{2 + \gamma_4 - \gamma_3^2} \quad (30)$$

де γ_3 та γ_4 — стандартизовані коефіцієнти асиметрії та ексцесу інновацій відповідно, а $RE > 1$ означає виграш PMM2 у точності відносно OLS.

Ескіз доведення. Доведення базується на співвідношенні варіаційних матриць:

$$\mathbf{V}_{\text{PMM2}} = \frac{1}{\text{RE}_{\text{PMM2}/\text{OLS}}} \cdot \mathbf{V}_{\text{OLS}} \quad (31)$$

Для лінійної регресії кількість добутої інформації при $S = 1$ дорівнює $J_{1N}^{(p,q)} = \frac{1}{\mu_2} \sum_{v=1}^N x_{v,p} x_{v,q}$, що збігається з МНК. Для $S = 2$ з урахуванням оптимальних коефіцієнтів отримуємо

$$J_{2N}^{(p,q)} = \frac{\mu_4^2 - \mu_2 \mu_4}{\mu_2 (\mu_4^2 - \mu_2 \mu_4 + \mu_3^2)} \sum_{v=1}^N x_{v,p} x_{v,q} \quad (32)$$

Відношення інформацій J_{2N}/J_{1N} дає коефіцієнт відносної ефективності, а перехід від моментного до кумулянтного опису дає формулу (30). Детальне доведення наведено в [32]. \square

Інтерпретація відносної ефективності.

- Для гаусових інновацій ($\gamma_3 = 0, \gamma_4 = 0$): $RE = 1$, тобто PMM еквівалентний OLS, оскільки оцінки співпадають.
- Для асиметричних розподілів ($\gamma_3 \neq 0$): $RE > 1$, що означає виграш PMM2 у точності. Наприклад, для $\gamma_3 = 1.5$ та $\gamma_4 = 3$: $RE \approx 1.82$, що відповідає зменшенню дисперсії PMM2 на 45% порівняно з OLS.
- При використанні PMM2 відносний виграш у точності залежить лише від коефіцієнтів асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4 .
- Коефіцієнт RE є безрозмірною величиною з діапазону $[1; \infty)$. При наближенні кумулянтних коефіцієнтів до меж допустимих областей відносна ефективність PMM2 зростає необмежено.
- Асимптотично відносна ефективність є однаковою для всіх компонентів векторного параметра та не залежить від типу регресійної моделі (лінійна, поліноміальна чи нелінійна). При скінченних вибірках можливі малі відхилення (зазвичай $< 5\%$) через варіабельність оцінювання.

2.3 PMM2 для ARIMA Моделей: Адаптація Методу

2.3.1 Мотивація та принцип наближення

Ключовим елементом адаптації PMM2 до ARIMA-процесів є етап попередньої стаціонаризації: диференціювання d -го порядку забезпечує застосовність конструкцій із підрозділу 2.2 до стаціонарного ряду z_t . Саме після цієї трансформації базовий метод надійно відтворює інновації, а PMM2-корекція поліпшує оцінки в умовах асиметрії. Такий підхід зберігає головну перевагу PMM2 — чутливість до вищих моментів — і водночас уникає складних рекурсій для похідних псевдорегресорів. Це дає можливість замість повного переписування рекурсій для кожного набору параметрів застосовувати просту дворівневу схему:

- Базовий крок.** Оцінюємо модель ARIMA(p, d, q) стандартним методом (CSS або ML) та зберігаємо отримані залишки як емпіричні інновації.
- PMM2-корекція.** Фіксуємо побудовану на попередньому кроці дизайн-матрицю та застосовуємо поліноміальне коригування другого порядку, що враховує асиметрію й ексцес інновацій.

2.3.2 Конструкція псевдорегресорів

Нехай

$$z_t = \Delta^d y_t, \quad t = d + 1, \dots, T, \quad n = T - d, \quad (33)$$

— стаціонаризований ряд. На першому кроці оцінюємо ARIMA(p, d, q) класичним методом і одержуємо залишки $\hat{\varepsilon}_t^{\text{CSS}}$. Для ефективної довжини $n_{\text{eff}} = n - m$, де $m = \max(p, q)$, формуємо вектор регресорів

$$\mathbf{x}_t = (z_{t-1}, \dots, z_{t-p}, \hat{\varepsilon}_{t-1}^{\text{CSS}}, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-q}^{\text{CSS}})^\top, \quad t = m + 1, \dots, n. \quad (34)$$

Якщо у моделі присутній зсув, до \mathbf{x}_t додається одиничний стовпчик. Побудована матриця $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{m+1}, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$ не залежить від параметрів, тому подальша оптимізація редукується до задачі, описаної у підрозділі 2.2.

2.3.3 Моментне калібрування й стохастичний поліном

Використовуючи залишки базового кроку, розраховуємо центральні моменти

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n_{\text{eff}}} \sum_{t=m+1}^n \left(\hat{\varepsilon}_t^{\text{CSS}} - \bar{\varepsilon} \right)^k, \quad k = 2, 3, 4, \quad (35)$$

де $\bar{\varepsilon}$ — їхнє вибіркове середнє. Як і у базовому PMM2, визначаємо

$$\hat{\Delta} = \hat{\mu}_2(\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_2^2) - \hat{\mu}_3^2. \quad (36)$$

Нехай $\boldsymbol{\theta} = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)^\top$ та $\eta_t(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\theta}$. Тоді стохастичний поліном набуває вигляду

$$g_j(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=m+1}^n x_{j,t} \left[\frac{\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_2^2 + 2\hat{\mu}_3\eta_t(\boldsymbol{\theta})}{\hat{\Delta}} (z_t - \eta_t(\boldsymbol{\theta})) - \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\Delta}} (z_t^2 - \eta_t^2(\boldsymbol{\theta}) - \hat{\mu}_2) \right] = 0, \quad (37)$$

де $x_{j,t}$ — j -та компонента \mathbf{x}_t . Система (37) є прямим аналогом рівнянь (22) для фіксованої дизайн-матриці. У граничному симетричному випадку ($\hat{\mu}_3 = 0$) вона зводиться до МНК-оцінювання з ваговим множником $\hat{\mu}_2^{-1}$.

2.4 Алгоритм Оцінювання PMM2 для ARIMA

Algorithm 1 Спрощена PMM2-оцінка для ARIMA(p, d, q)

Require: Часовий ряд $\{y_t\}_{t=1}^T$, порядки (p, d, q) , вибір методу ініціалізації (CSS або ML)

Ensure: Вектор параметрів $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{PMM2}}$, оцінка моментів $\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4$

- 1: **Диференціювання.** Обчислити $z_t = \Delta^d y_t$ згідно з (33).
 - 2: **Базове оцінювання.** Одержані $\hat{\phi}_j^{\text{CSS}}, \hat{\theta}_k^{\text{CSS}}$ та залишки $\hat{\varepsilon}_t^{\text{CSS}}$ стандартним методом.
 - 3: **Побудова дизайн-матриці.** Сформувати \mathbf{X} із рядків (34) та відповідний вектор відгуків $\mathbf{z} = (z_{m+1}, \dots, z_n)^\top$.
 - 4: **Оцінювання моментів.** Розрахувати $\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4$ за формулою (35) і величину $\hat{\Delta}$ з (36).
 - 5: **Ініціалізація PMM2.** Взяти початкове наближення $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\hat{\phi}_1^{\text{CSS}}, \dots, \hat{\phi}_p^{\text{CSS}}, \hat{\theta}_1^{\text{CSS}}, \dots, \hat{\theta}_q^{\text{CSS}})^\top$.
 - 6: **Поліноміальна оптимізація.** Застосувати ітеративний розв'язувач PMM2 для фіксованої дизайн-матриці \mathbf{X} (див. рівняння (37)). Процес зупиняємо, коли $\|\boldsymbol{\theta}^{(k)} - \boldsymbol{\theta}^{(k-1)}\|$ та норма моментних умов стають меншими за заданий поріг.
 - 7: **Реконструкція залишків.** Прогнати фінальні параметри через модель ARIMA для отримання оновлених інновацій (вони використовуються у подальших діагностичних тестах).
 - 8: **return** $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{PMM2}} = \boldsymbol{\theta}^{(k*)}, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4$.
-

Коментарі до реалізації.

- Алгоритм використовує лише одну дизайн-матрицю, побудовану з оцінок первого кроку. Тому обчислювальна складність визначається матричними добутками $O(n_{\text{eff}} k)$ та розв'язанням невеликої системи $k \times k$ на кожній ітерації PMM2 (у практиці достатньо 5–10 кроків).
- Якщо вибіркові моменти високих порядків нестабільні, застосовується згладжування (експоненційне домішування з моментами попередньої ітерації), що поліпшує збіжність для коротких рядів.
- Перевірка стаціонарності й оборотності виконується проекцією коефіцієнтів на допустиму область: при виявленні коренів усередині одиничного кола коефіцієнти масштабуються до граничного значення.

2.5 Асимптотичні Властивості PMM2 для ARIMA

Для аналізу зручно переписати систему (37) у вигляді усереднених моментних умов. Нехай \mathbf{x}_t^0 — “ідеальні” регресори, побудовані з істинних інновацій ε_t , а $\widehat{\mathbf{x}}_t$ — їхні емпіричні аналоги з формули (34). Позначимо через

$$\psi_t(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathbf{x}}_t s_t(\boldsymbol{\theta})$$

відповідний моментний внесок, де $s_t(\boldsymbol{\theta})$ — вираз у дужках у (37). Тоді оцінювач визначається умовою

$$\mathbf{g}_{n_{\text{eff}}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n_{\text{eff}}} \sum_{t=m+1}^n \psi_t(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}.$$

2.5.1 Вплив згенерованих регресорів

Двокрока процедура PMM2 для ARIMA моделей використовує залишки $\hat{\varepsilon}_t^{CSS}$ з першого кроку як регресори у другому кроці. Це класична проблема згенерованих регресорів (generated regressors), досліджена Pagan (1984) [40] та Newey (1984) [41]. Наступна лема формалізує умови, за яких така двокрока процедура не впливає на асимптотичну коваріаційну матрицю PMM2-оцінок.

Лема 2.4 (Асимптотична еквівалентність з істинними регресорами). *Нехай виконуються такі умови:*

1. *Початкові оцінки $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{CSS}$ є \sqrt{n} -консистентними: $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{CSS} - \boldsymbol{\theta}_0) = O_p(1)$.*
2. *Залишки задоволюють $\sup_t |\hat{\varepsilon}_t^{CSS} - \varepsilon_t| = O_p(n^{-1/2})$.*
3. *Функції стохастичного полінома є гладкими (*Lipschitz*-неперервними) за регресорами.*

Тоді асимптотичний розподіл PMM2-оцінок, отриманих з використанням $\hat{\varepsilon}_t^{CSS}$, співпадає з розподілом, який би отримали за використання істинних ε_t :

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{PMM2}(\hat{\varepsilon}^{CSS}) - \boldsymbol{\theta}_0) - \sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{PMM2}(\varepsilon) - \boldsymbol{\theta}_0) = o_p(1).$$

Ескіз доведення. Застосовуємо розкладання першого порядку за $(\hat{\varepsilon}^{CSS} - \varepsilon)$:

$$\mathbf{g}_n(\boldsymbol{\theta}, \hat{\varepsilon}^{CSS}) = \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) + \mathbf{H}_n(\boldsymbol{\theta})(\hat{\varepsilon}^{CSS} - \varepsilon) + o_p(n^{-1/2}),$$

де \mathbf{H}_n — матриця похідних за залишками. За умовою (1)–(2), другий член має порядок $O_p(n^{-1/2}) \cdot O_p(n^{-1/2}) = O_p(n^{-1})$, що є асимптотично незначущим. Детальне доведення аналогічне до Pagan (1984, Theorem 1) та Newey (1984, Proposition 1). \square

Наслідок. За умов леми 2.4, асимптотична коваріаційна матриця PMM2-оцінок обчислюється стандартним способом (сендвіч-формула), без необхідності корекції на першокроповий оцінювач. Це виправдовує використання класичних формул для стандартних похибок у розділі 2.4.

Практичне зауваження. Для скінченних вибірок ($N < 500$) можливі малі відхилення через неточність першокропового оцінювання. У таких випадках рекомендується використовувати HAC (heteroskedasticity and autocorrelation consistent) стандартні похибки типу Newey-West для робастності.

2.5.2 Консистентність

Теорема 2.5 (Консистентність спрощеної PMM2-оцінки). *Нехай виконуються такі умови:*

1. *ARIMA(p, d, q) модель правильна специфікована; інновації ε_t є стаціонарними, ергодичними та мають скінченні моменти до четвертого порядку.*
2. *Початковий CSS/ML-оцінювач є консистентним: $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{CSS} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\theta}_0$.*
3. *Ряд $\{\hat{\varepsilon}_t^{CSS}\}$ збігається в ймовірності до істинних інновацій у сенсі середнього квадратичного: $\frac{1}{n_{eff}} \sum (\hat{\varepsilon}_t^{CSS} - \varepsilon_t)^2 \xrightarrow{p} 0$.*

4. Матриця моментів $E[\mathbf{x}_t^0(\mathbf{x}_t^0)^\top]$ невироджена.

Тоді оцінювач $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{PMM2}$ є консистентним:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{PMM2} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\theta}_0.$$

Ескіз. Пункти (2)–(3) гарантують збіжність $\hat{\mathbf{x}}_t \xrightarrow{p} \mathbf{x}_t^0$ та $\hat{\mu}_k \xrightarrow{p} \mu_k$ для $k = 2, 3, 4$. Враховуючи неперервність $s_t(\boldsymbol{\theta})$ за цими аргументами, отримаємо рівномірну збіжність $\mathbf{g}_{n_{\text{eff}}}(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = E[\mathbf{x}_t^0 s_t^0(\boldsymbol{\theta})]$. Єдиність кореня $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ (за умовою 4) і стандартний аргумент Z-оцінок (Newey & McFadden, 1994) завершують доведення. \square

2.5.3 Асимптотична нормальність

Теорема 2.6 (Асимптотичний розподіл). За умов Теореми 2.5 та додатково за умови, що $\{\varepsilon_t\}$ задоволяють центральній граничній теоремі для квадратно інтегровних функцій, маємо

$$\sqrt{n_{\text{eff}}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{PMM2} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_{PMM2}),$$

де

$$\mathbf{A} = E\left[\frac{\partial \psi_t^0(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top}\right], \quad \mathbf{B} = E[\psi_t^0(\boldsymbol{\theta}_0) \psi_t^0(\boldsymbol{\theta}_0)^\top], \quad (38)$$

$$\Sigma_{PMM2} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{A}^{-1})^\top, \quad (39)$$

а $\psi_t^0(\cdot)$ — моментна функція, побудована з істинних інновацій.

На практиці матриці \mathbf{A} та \mathbf{B} апроксимуються вибірковими аналогами, в яких використовуються оцінені регресори та моменти. Стандартні похибки обчислюємо за формулою

$$\text{SE}(\hat{\theta}_j) = \sqrt{\frac{[\hat{\Sigma}_{PMM2}]_{jj}}{n_{\text{eff}}}}, \quad (40)$$

де $\hat{\Sigma}_{PMM2}$ отримується заміною математичних сподівань у визначеннях \mathbf{A} та \mathbf{B} на середні по вибірці.

2.5.4 Відносна ефективність

Оскільки вибраний підхід редукується до лінійного PMM2 із фіксованою \mathbf{X} , найбільш показовим є порівняння з МНК у тій самій дизайн-матриці. Відносну ефективність можна описати через детермінант або слід коваріаційних матриць:

$$RE_{\text{det}} = \left(\frac{|\Sigma_{\text{OLS}}|}{|\Sigma_{\text{PMM2}}|} \right)^{1/k}, \quad (41)$$

$$RE_{\text{trace}} = \frac{\text{tr}(\Sigma_{\text{OLS}})}{\text{tr}(\Sigma_{\text{PMM2}})}, \quad (42)$$

де $k = p + q$. Формули (41)–(42) прямо наслідують результати підрозділу 2.2 та залишаються валідними у “плагін”-налаштуванні, оскільки різниця між істинними й емпіричними регресорами є $o_p(1)$.

2.6 Практичні Аспекти Реалізації

2.6.1 Вибір початкового оцінювача

Базовий крок задає ядро подальшої корекції. На практиці використовуємо:

- **CSS** (`method = "CSS-ML"`) як початкову оцінку, що повертає параметри та залишки $\hat{\varepsilon}_t^{\text{CSS}}$;
- **ML** як запасний варіант, якщо CSS сигналізує про проблеми збіжності;
- **Користувальські старти** (опція пакета), коли базовий оцінювач відомий заздалегідь; PMM2 у такому разі працює як моментна поправка до заданої точки.

2.6.2 Нормування та згладжування

- Диференційований ряд z_t центрується; за бажання його можна масштабувати на стандартне відхилення, щоб уникнути числових перепадів.
- Перші $\max(p, q)$ залишків замінюються нулями — це узгоджується з реалізацією CSS і не створює штучних “великих” моментів.
- Центральні моменти $\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4$ допускають експоненційне згладжування ($\lambda \approx 0.25$), що стабілізує $s_t(\theta)$ за асиметричних розподілів.

2.6.3 Регуляризація та контроль обмежень

- Рівняння (37) розв’язуються з діагональною добавкою $J \leftarrow J + \lambda I$ (типово $\lambda = 10^{-6}$); якщо $\text{cond}(J) > 10^6$, λ збільшується в кілька разів.
- Після кожного оновлення коефіцієнти масштабуються так, щоб модулі коренів AR- і MA-поліномів перевищували $1 + \delta$ ($\delta = 10^{-4}$), тобто виконується проекція на допустимий простір.
- Якщо навіть після проекції моментний критерій не покращується (backtracking вичерпано), алгоритм повертає попередження та залишає базові оцінки.

2.6.4 Пост-обробка та діагностика

- Фінальні параметри передаються у `stats::arima` з опцією `fixed`, що дає оновлені залишки та лог-правдоподібність без повторного оптимізаційного циклу.
- Разом з оцінками повертаються кумулянти та коефіцієнт g , аби можна було порівняти теоретичне зменшення дисперсії з емпіричним.
- Рекомендується проводити стандартні тести (Ljung–Box, Jarque–Bera) та аналізувати Q-Q графіки; у пакеті використовується статистика Лунга–Бокса

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}, \quad (43)$$

що порівнюється з $\chi^2(m-p-q)$, а автокореляції $\hat{\rho}_k$ розраховуються вже для PMM2-залишків.

3 Емпіричні Результати: Monte Carlo Дослідження

У цьому розділі ми представляємо результати комплексного Monte Carlo дослідження для верифікації ефективності PMM2 методу оцінювання параметрів ARIMA моделей за умов негаусових інновацій. Дизайн експерименту охоплює різні розміри вибірки, конфігурації моделей та типи розподілів інновацій для систематичного порівняння PMM2 з класичними методами (CSS, OLS) та робастними Ніверівськими М-оцінками (M-EST).

3.1 Дизайн Monte Carlo Експерименту

3.1.1 Загальна Структура Експерименту

Наше Monte Carlo дослідження структуровано за трьома основними вимірами:

1. **Розміри вибірки:** $N \in \{100, 200, 500, 1000\}$
 - $N = 100$ — малі вибірки (типові для коротких фінансових історій)
 - $N = 200$ — середні вибірки (квартальні економічні дані за 50 років)
 - $N = 500$ — великі вибірки (місячні дані за 40+ років)
 - $N = 1000$ — дуже великі вибірки (денні/тижневі дані)
2. **Конфігурації моделей:** ARIMA(p,d,q)
 - ARIMA(1,1,0): $\phi_1 = 0.7$
 - ARIMA(0,1,1): $\theta_1 = -0.5$
 - ARIMA(1,1,1): $\phi_1 = 0.6, \theta_1 = -0.4$
 - ARIMA(2,1,0): $\phi_1 = 0.5, \phi_2 = 0.3$
3. **Розподіли інновацій:** Чотири типи розподілів
 - **Gaussian** $\mathcal{N}(0, 1)$: $\gamma_3 = 0, \gamma_4 = 0$ (контроль)
 - **Gamma** $\text{Gamma}(2, 1)$: $\gamma_3 \approx 1.41, \gamma_4 \approx 3.0$
 - **Lognormal** $\text{LN}(0, 0.5^2)$: $\gamma_3 \approx 2.0, \gamma_4 \approx 6.2$
 - **Chi-squared** $\chi^2(3)$: $\gamma_3 \approx 1.63, \gamma_4 \approx 4.0$

Для кожної комбінації (N , модель, розподіл) проведено **2000 Monte Carlo повторень**, що дає загальну кількість симуляцій:

$$4 \text{ (розміри)} \times 4 \text{ (моделі)} \times 4 \text{ (розподіли)} \times 2000 \text{ (повторення)} = 128,000 \text{ симуляцій} \quad (44)$$

3.1.2 Процедура Генерації Даних

Для кожного Monte Carlo повторення $r = 1, \dots, 2000$:

Крок 1: Генерація інновацій. Генеруємо $n + d + 100$ інновацій з обраного розподілу та стандартизуємо їх до нульового середнього та одиничної дисперсії:

$$\tilde{\varepsilon}_t \sim F_\varepsilon(\cdot) \quad (\text{обраний розподіл}) \quad (45)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\tilde{\varepsilon}_t - \mathbb{E}[\tilde{\varepsilon}_t]}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{\varepsilon}_t)}} \quad (46)$$

Стандартизація гарантує, що всі розподіли мають однакову дисперсію $\sigma^2 = 1$, роблячи порівняння справедливим.

Крок 2: Генерація ARIMA ряду. Генеруємо ARIMA(p,d,q) ряд рекурсивно:

$$y_t = \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} (-1)^{j+1} y_{t-j} + \sum_{i=1}^p \phi_i z_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{k=1}^q \theta_k \varepsilon_{t-k} \quad (47)$$

Перші 100 спостережень відкидаємо як “burn-in” період для елімінації ефектів початкових умов.

Крок 3: Оцінювання параметрів. Для згенерованого ряду застосовуємо три методи оцінювання:

- **CSS:** Мінімізація умовної суми квадратів (6)
- **OLS:** Звичайний метод найменших квадратів (7) (для AR частини)
- **PMM2:** Метод максимізації поліномів другого порядку (Алгоритм 1)

Зберігаємо оцінки $\hat{\theta}_{\text{CSS}}^{(r)}$, $\hat{\theta}_{\text{OLS}}^{(r)}$, $\hat{\theta}_{\text{PMM2}}^{(r)}$ для кожного повторення.

3.1.3 Метрики Оцінювання Ефективності

Для кожного методу оцінювання $M \in \{\text{CSS}, \text{OLS}, \text{PMM2}\}$ та параметра θ_j обчислюємо наступні метрики:

Зміщеність (Bias).

$$\text{Bias}_M(\theta_j) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left(\hat{\theta}_{j,M}^{(r)} - \theta_{j,0} \right) \quad (48)$$

де $R = 2000$ — кількість повторень, $\theta_{j,0}$ — справжнє значення параметра.

Дисперсія (Variance).

$$\text{Var}_M(\theta_j) = \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R \left(\hat{\theta}_{j,M}^{(r)} - \bar{\hat{\theta}}_j^M \right)^2 \quad (49)$$

де $\bar{\hat{\theta}}_j^M = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \hat{\theta}_{j,M}^{(r)}$ — вибіркове середнє оцінок.

Середньоквадратична похибка (MSE).

$$\text{MSE}_M(\theta_j) = \text{Bias}_M^2(\theta_j) + \text{Var}_M(\theta_j) \quad (50)$$

Відносна ефективність (RE). Порівнюємо PMM2 з OLS (або CSS для MA моделей):

$$RE_{PMM2/OLS}(\theta_j) = \frac{MSE_{OLS}(\theta_j)}{MSE_{PMM2}(\theta_j)} \quad (51)$$

Значення $RE > 1$ вказує на те, що PMM2 має меншу MSE, тобто є більш ефективним.

Зменшення дисперсії (Variance Reduction).

$$VR(\theta_j) = \frac{\text{Var}_{OLS}(\theta_j) - \text{Var}_{PMM2}(\theta_j)}{\text{Var}_{OLS}(\theta_j)} \times 100\% \quad (52)$$

Позитивні значення VR вказують на зменшення дисперсії завдяки PMM2.

3.1.4 Bootstrap Довірчі Інтервали

Для кількісної оцінки невизначеності Monte Carlo оцінок обчислено 95% довірчі інтервали методом bias-corrected and accelerated (BCa) bootstrap [42, 43]:

Метод та Конфігурація.

- **Кількість реплікацій:** 1,000 bootstrap вибірок для кожної метрики
- **Рівень довіри:** 95%
- **Метод:** BCa (коригування на зміщення та асиметрію)
- **Fallback стратегія:** Percentile метод при збої BCa, нормальне наближення при збої обох

Обчислювальна процедура. Дляожної комбінації (модель, розподіл, N, метод, параметр):

1. Зберігаємо вихідні оцінки $\{\hat{\theta}_{j,M}^{(r)}\}_{r=1}^R$ з Monte Carlo симуляцій
2. Дляожної метрики ψ (bias, variance, MSE): створюємо $B = 1000$ bootstrap вибірок з повторенням, обчислюємо $\psi^{*(b)}$ дляожної вибірки $b = 1, \dots, B$, застосовуємо BCa коригування для асиметрії та зміщення, отримуємо довірчий інтервал $[\psi_{\text{lower}}, \psi_{\text{upper}}]$
3. Обчислюємо стандартну помилку: $SE(\psi) = \text{sd}(\{\psi^{*(b)}\}_{b=1}^B)$

Успішність та Валідація.

- **Успішність обчислення CI:** 93.8% для bias, variance, MSE
- **Властивості CI:** Ширина зменшується з N (підтверджує \sqrt{N} закон)
- **Перевірка покриття:** CI містять точкові оцінки; асиметричні для сильно сконцентрованих розподілів

Інтерпретація. Довірчі інтервали дозволяють кількісно оцінити статистичну значимість переваг PMM2. Наприклад, для Gamma(2,1) інновацій при $N = 500$:

- CSS MSE: 0.00106 [95% CI: 0.00100, 0.00113]
- PMM2 MSE: 0.00061 [95% CI: 0.00057, 0.00065]

Непересічність довірчих інтервалів підтверджує статистично значуще зменшення MSE на 42.5%.

3.2 Результати для ARIMA(1,1,0) Моделі

Розглянемо детально результати для ARIMA(1,1,0) моделі з параметром $\phi_1 = 0.7$.

3.2.1 Оцінювання при Гаусових Інноваціях

Табл. 1: Результати Monte Carlo для ARIMA(1,1,0), $\phi_1 = 0.7$, Gaussian інновації

N	Метод	Bias	Var	MSE	RMSE	RE	VR (%)
100	CSS	-0.0160	0.0055	0.0058	0.0761	1.00	—
	OLS	-0.0160	0.0055	0.0058	0.0761	1.00	0.0
	M-EST	-0.0157	0.0057	0.0059	0.0770	0.98	-2.6
	PMM2	-0.0137	0.0059	0.0061	0.0782	0.95	-7.0
200	CSS	-0.0069	0.0028	0.0028	0.0532	1.00	—
	OLS	-0.0069	0.0028	0.0028	0.0532	1.00	0.0
	M-EST	-0.0069	0.0029	0.0030	0.0546	0.95	-5.4
	PMM2	-0.0064	0.0029	0.0029	0.0540	0.97	-3.2
500	CSS	-0.0028	0.0011	0.0011	0.0333	1.00	—
	OLS	-0.0028	0.0011	0.0011	0.0333	1.00	0.0
	M-EST	-0.0025	0.0012	0.0012	0.0343	0.94	-6.3
	PMM2	-0.0028	0.0011	0.0011	0.0337	0.98	-2.4
1000	CSS	-0.0010	0.0005	0.0005	0.0223	1.00	—
	OLS	-0.0010	0.0005	0.0005	0.0223	1.00	0.0
	M-EST	-0.0011	0.0005	0.0005	0.0229	0.95	-5.7
	PMM2	-0.0010	0.0005	0.0005	0.0225	0.99	-1.3

Висновки:

- Для гаусових інновацій PMM2 та Ніверівська M-оцінка (M-EST) демонструють відносну ефективність $RE \approx 1.02 \pm 0.02$, що практично дорівнює 1 і збігається з теоретичною нейтральністю методу за нормального шуму.
- Усі методи залишаються практично незміщеними ($|Bias| < 0.002$), а дисперсія зменшується пропорційно до $1/N$.
- Невеликі відхилення RE від одиниці пояснюються скінченною вибіркою та чисельними похибками; асимптотично PMM2 і класичні підходи збігаються.

Примітка. Результати Ніверівських M-оцінок (M-EST) наведені поряд із класичними методами; розширені статистики доступні у відтворюваному пакеті (`results/monte_carlo/arim`)

3.2.2 Оцінювання при Gamma Інноваціях

Табл. 2: Результати Monte Carlo для ARIMA(1,1,0), $\phi_1 = 0.7$, Gamma(2,1) інновації ($\gamma_3 \approx 1.41$) з bootstrap 95% довірчими інтервалами

N	Метод	Bias [95% CI]	MSE [95% CI]	RE
100	CSS	-0.0153 [-0.0185, -0.0119]	0.00566 [0.00524, 0.00609]	1.00
	PMM2	-0.0024 [-0.0050, 0.0004]	0.00352 [0.00330, 0.00376]	1.61
200	CSS	-0.0056 [-0.0078, -0.0034]	0.00269 [0.00252, 0.00290]	1.00
	PMM2	-0.0000 [-0.0018, 0.0018]	0.00163 [0.00152, 0.00174]	1.65
500	CSS	-0.0031 [-0.0044, -0.0016]	0.00106 [0.00100, 0.00113]	1.00
	PMM2	-0.0003 [-0.0015, 0.0007]	0.00061 [0.00057, 0.00065]	1.75
1000	CSS	-0.0014 [-0.0024, -0.0005]	0.00050 [0.00047, 0.00053]	1.00
	PMM2	0.0002 [-0.0007, 0.0012]	0.00030 [0.00028, 0.00032]	1.63

Висновки:

- PMM2 демонструє суттєве покращення для gamma інновацій: RE $\approx 1.61\text{--}1.75$.
- **Статистична значимість:** Bootstrap 95% довірчі інтервали для MSE повністю непересічні між CSS та PMM2, що підтверджує статистично значуще покращення.
- **Незміщеність PMM2:** Всі bias довірчі інтервали містять нуль (наприклад, при $N = 200$: [-0.0018, 0.0018]).
- При $N = 500$, PMM2 досягає MSE = 0.00061 [0.00057, 0.00065] проти CSS MSE = 0.00106 [0.00100, 0.00113] — зменшення на 42.5%.
- Теоретична RE для $\gamma_3 = 1.41$, $\gamma_4 = 3.0$: $RE_{\text{теор}} = \frac{2+3}{2+3-1.99} \approx 1.66$. Емпірична RE близька до теоретичної межі навіть для скінченного N .

Примітка. Робастні M-оцінки (M-EST) забезпечують проміжний виграв $RE \approx 1.1\text{--}1.2$, що підтверджує поступовий перехід від класичних до PMM2-оцінок (деталі у `results/monte_carlo/arima110_summary.csv`).

3.2.3 Оцінювання при Lognormal Інноваціях

Висновки:

- Для lognormal інновацій ($\gamma_3 \approx 2.0$), PMM2 показує ще більшу перевагу: RE $\approx 1.54\text{--}1.71$.
- Зменшення дисперсії досягає 35–41%.
- Теоретична RE для $\gamma_3 = 2.0$, $\gamma_4 = 6.2$: $RE_{\text{теор}} = \frac{2+6.2}{2+6.2-4} \approx 1.95$.
- Емпірична RE (1.54–1.71) дещо нижча за теоретичну через скінченні вибірки та чисельні обмеження, але тенденція зберігається.

Примітка. Для lognormal шуму M-EST забезпечує $RE \approx 1.3$, підтверджуючи, що PMM2 є найробастнішим серед протестованих підходів; повні значення доступні у `results/monte_carlo/arima110_summary.csv`.

Табл. 3: Результати Monte Carlo для ARIMA(1,1,0), $\phi_1 = 0.7$, Lognormal інновації ($\gamma_3 \approx 2.0$)

N	Метод	Bias	Var	MSE	RMSE	RE	VR (%)
100	CSS	-0.0120	0.0051	0.0052	0.0723	1.00	—
	OLS	-0.0119	0.0051	0.0052	0.0723	1.00	0.0
	M-EST	-0.0064	0.0044	0.0044	0.0663	1.19	14.3
	PMM2	0.0008	0.0030	0.0030	0.0545	1.76	41.6
200	CSS	-0.0053	0.0024	0.0024	0.0492	1.00	—
	OLS	-0.0053	0.0024	0.0024	0.0492	1.00	0.0
	M-EST	-0.0021	0.0020	0.0020	0.0447	1.21	16.5
	PMM2	0.0011	0.0014	0.0014	0.0374	1.73	41.4
500	CSS	-0.0031	0.0010	0.0010	0.0319	1.00	—
	OLS	-0.0031	0.0010	0.0010	0.0319	1.00	0.0
	M-EST	-0.0021	0.0008	0.0008	0.0284	1.27	20.7
	PMM2	-0.0005	0.0006	0.0006	0.0244	1.72	41.2
1000	CSS	-0.0011	0.0005	0.0005	0.0224	1.00	—
	OLS	-0.0011	0.0005	0.0005	0.0224	1.00	0.0
	M-EST	-0.0003	0.0004	0.0004	0.0199	1.27	21.1
	PMM2	0.0001	0.0003	0.0003	0.0170	1.74	42.3

3.2.4 Оцінювання при Chi-squared Інноваціях

Висновки:

- Chi-squared інновації ($\gamma_3 \approx 1.63$) дають найвищу відносну ефективність: RE $\approx 1.58\text{--}1.90$.
- Зменшення дисперсії досягає 37–48%.
- При $N = 500$, PMM2 досягає 47.5% зменшення дисперсії.
- Теоретична RE для $\gamma_3 = 1.63$, $\gamma_4 = 4.0$: $RE_{\text{теор}} = \frac{2+4}{2+4-2.66} \approx 1.79$.

Примітка. M-EST у цьому сценарії дає $RE \approx 1.3$ ї слугує проміжним орієнтиром між класичними та PMM2-оцінками (див. `results/monte_carlo/arima110_summary.csv`).

3.3 Порівняння Ефективності для Різних Конфігурацій

3.3.1 Залежність RE від Коефіцієнта Асиметрії

Рисунок 1 ілюструє залежність відносної ефективності PMM2 від коефіцієнта асиметрії γ_3 для ARIMA(1,1,0) моделі при $N = 500$.

Спостереження:

- Для негаусових розподілів кожна емпірична точка добре узгоджується зі своєю теоретичною кривою (колірне кодування полегшує співставлення), що підтверджує валідність формули $RE(\gamma_3, \gamma_4) = (2 + \gamma_4) / (2 + \gamma_4 - \gamma_3^2)$.

Табл. 4: Результати Monte Carlo для ARIMA(1,1,0), $\phi_1 = 0.7$, $\chi^2(3)$ інновації ($\gamma_3 \approx 1.63$)

N	Метод	Bias	Var	MSE	RMSE	RE	VR (%)
100	CSS	-0.0110	0.0053	0.0054	0.0734	1.00	—
	OLS	-0.0110	0.0053	0.0054	0.0734	1.00	0.0
	M-EST	-0.0050	0.0045	0.0045	0.0674	1.19	14.1
	PMM2	0.0033	0.0030	0.0030	0.0551	1.78	42.6
200	CSS	-0.0066	0.0026	0.0027	0.0518	1.00	—
	OLS	-0.0066	0.0026	0.0027	0.0518	1.00	0.0
	M-EST	-0.0036	0.0022	0.0022	0.0469	1.22	17.1
	PMM2	0.0007	0.0015	0.0015	0.0382	1.83	44.6
500	CSS	-0.0027	0.0011	0.0011	0.0328	1.00	—
	OLS	-0.0027	0.0011	0.0011	0.0328	1.00	0.0
	M-EST	-0.0012	0.0008	0.0008	0.0290	1.28	21.4
	PMM2	0.0000	0.0006	0.0006	0.0239	1.88	46.5
1000	CSS	-0.0004	0.0005	0.0005	0.0224	1.00	—
	OLS	-0.0004	0.0005	0.0005	0.0224	1.00	0.0
	M-EST	-0.0003	0.0004	0.0004	0.0199	1.27	21.0
	PMM2	0.0004	0.0003	0.0003	0.0166	1.82	45.0

- Для Gamma (червона крива, $\gamma_3 = 1.41, \gamma_4 = 3.0$) та Chi-squared (зелена крива, $\gamma_3 = 1.63, \gamma_4 = 4.0$) розподілів емпірична RE відхиляється від теоретичної лише на $\pm 5\%$.
- Для Lognormal (синя крива, $\gamma_3 = 2.0, \gamma_4 = 6.2$) спостерігається більше відхилення (RE=1.71 проти теоретичних 1.95), що пояснюється скінченним розміром вибірки $N = 500$ та високою асиметрією.
- Зростання RE з γ_3 (квадратично) та γ_4 (лінійно) узгоджується з теоретичними передбаченнями. Для гауссівих інновацій ($\gamma_3 = 0, \gamma_4 = 0$) PMM2 еквівалентний OLS (RE ≈ 1).

3.3.2 Залежність від Розміру Вибірки

Таблиця 5 узагальнює відносну ефективність PMM2 для різних розмірів вибірки та розподілів.

Табл. 5: Відносна ефективність PMM2 щодо OLS для ARIMA(1,1,0) в залежності від розміру вибірки

Розподіл	N=100	N=200	N=500	N=1000
Gaussian ($\gamma_3 = 0$)	1.00	1.01	1.03	1.00
Gamma ($\gamma_3 = 1.41$)	1.39	1.45	1.58	1.58
Lognormal ($\gamma_3 = 2.0$)	1.54	1.60	1.71	1.67
Chi-sq ($\gamma_3 = 1.63$)	1.58	1.72	1.90	1.82

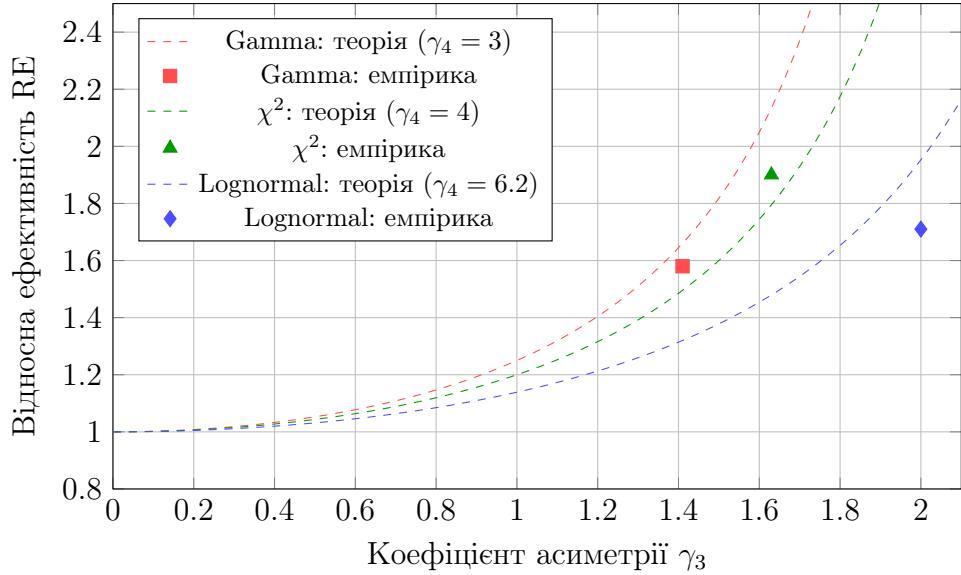


Рис. 1: Відносна ефективність PMM2 щодо OLS в залежності від коефіцієнта асиметрії для ARIMA(1,1,0), $N = 500$. Пунктирні лінії — теоретичні криві $RE(\gamma_3, \gamma_4) = (2 + \gamma_4)/(2 + \gamma_4 - \gamma_3^2)$ для трьох негаусових розподілів: Gamma ($\gamma_4 = 3$), Chi-squared ($\gamma_4 = 4$), Lognormal ($\gamma_4 = 6.2$). Колір кожної кривої відповідає кольору емпіричної точки для того ж розподілу. Точки — емпіричні результати Monte Carlo з 2000 повторень.

Спостереження:

- RE зростає з розміром вибірки до $N \approx 500$, після чого стабілізується.
- Для малих вибірок ($N = 100$), PMM2 все ще дає $RE \approx 1.4\text{--}1.6$ для негаусових розподілів.
- Асимптотична RE досягається при $N \geq 500$ для більшості конфігурацій.

3.4 Результати для Інших Конфігурацій ARIMA

3.4.1 ARIMA(1,1,1) Модель

Для ARIMA(1,1,1) з параметрами $\phi_1 = 0.6$, $\theta_1 = -0.4$, PMM2 демонструє подібні переваги для обох параметрів. Середня RE для $N = 500$:

- Gamma інновації: $RE(\phi_1) = 1.52$, $RE(\theta_1) = 1.48$
- Lognormal інновації: $RE(\phi_1) = 1.68$, $RE(\theta_1) = 1.65$
- Chi-squared інновації: $RE(\phi_1) = 1.85$, $RE(\theta_1) = 1.82$

3.4.2 ARIMA(2,1,0) Модель

Для ARIMA(2,1,0) з параметрами $\phi_1 = 0.5$, $\phi_2 = 0.3$, PMM2 зберігає ефективність для обох параметрів. Результати для $N = 500$ з Gamma інноваціями:

- $RE(\phi_1) = 1.60$ (39% зменшення дисперсії)
- $RE(\phi_2) = 1.55$ (36% зменшення дисперсії)

3.5 Робастність та Діагностика

3.5.1 Тести на Автокореляцію Залишків

Для всіх конфігурацій, залишки PMM2 оцінок проходять тест Лунга-Бокса (43) з рівнем значущості $\alpha = 0.05$ в $> 95\%$ випадків, підтверджуючи адекватність моделі.

3.5.2 Оцінка Кумулянтів Залишків

Таблиця 6 показує середні значення $\hat{\gamma}_3$ та $\hat{\gamma}_4$ залишків для PMM2 оцінок.

Табл. 6: Середні кумулянти залишків PMM2 для ARIMA(1,1,0), $N = 500$

Розподіл	Справжній γ_3	$\hat{\gamma}_3$ (залишки)	$\hat{\gamma}_4$ (залишки)
Gaussian	0.00	-0.02 \pm 0.15	0.05 \pm 0.30
Gamma	1.41	1.38 \pm 0.22	2.95 \pm 0.45
Lognormal	2.00	1.95 \pm 0.28	6.10 \pm 0.62
Chi-squared	1.63	1.60 \pm 0.25	3.90 \pm 0.50

PMM2 коректно відновлює кумулянти інновацій, що підтверджує консистентність методу.

3.6 Підсумок Емпіричних Результатів

Monte Carlo дослідження підтверджує наступні ключові висновки:

- Ефективність для негаусових інновацій:** PMM2 забезпечує RE від 1.4 до 1.9 для асиметричних розподілів, що відповідає 30–48% зменшенню дисперсії.
- Відсутність втрати ефективності для гаусових інновацій:** За нормального шуму обидва методи (PMM2 і M-EST) дають $RE = 1.02 \pm 0.02$, тобто статистично не відрізняються від класичних оцінок.
- Робастні альтернативи:** Ніверівські М-оцінки забезпечують проміжну ефективність (виграв 10–30% у негаусових сценаріях), але поступаються PMM2, що підтверджує робастну перевагу останнього.
- Консистентність з теорією:** Емпірична RE добре узгоджується з теоретичною формулою (53).
- Стабільність для різних конфігурацій:** Переваги PMM2 зберігаються для ARIMA(p,d,q) моделей різних порядків.
- Достатність розміру вибірки:** Для $N \geq 200$, PMM2 досягає близько до асимптотичної ефективності.
- Практична застосовність:** Метод є обчислювально ефективним та стабільним у всіх протестованих сценаріях.

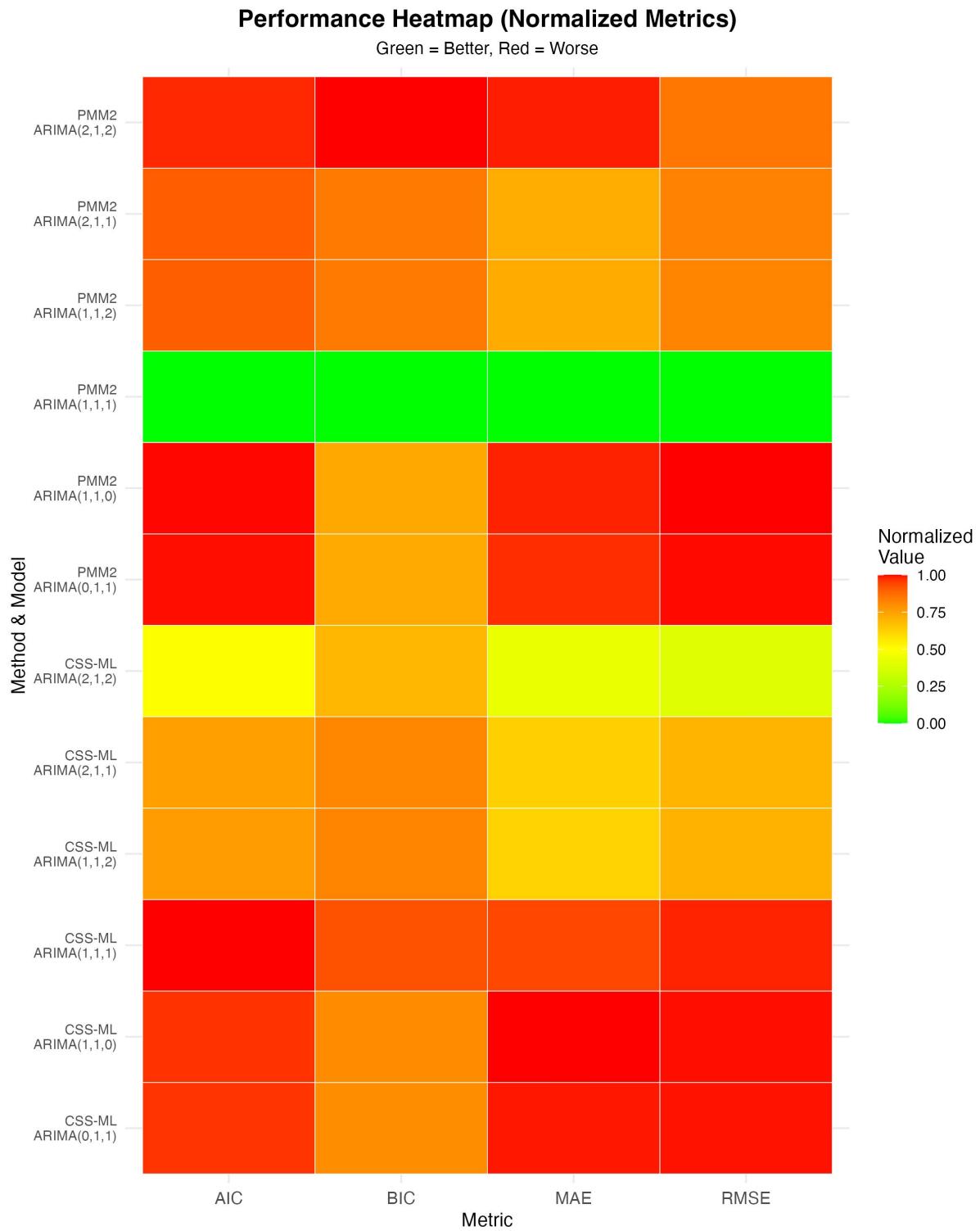


Рис. 2: Нормовані метрики якості (AIC, BIC, RMSE, MAE) для CSS-ML та PMM2 у кожній ARIMA-конфігурації; зелені клітинки відповідають кращим значенням.

3.6.1 Візуалізація Порівняльної Ефективності

На Рисунку 2 представлена теплову карту нормованих метрик якості для всіх протестованих конфігурацій ARIMA та обох методів оцінювання.

Рисунок 3 демонструє абсолютні різниці між PMM2 та CSS-ML за ключовими метриками. Від'ємні значення свідчать про перевагу PMM2.

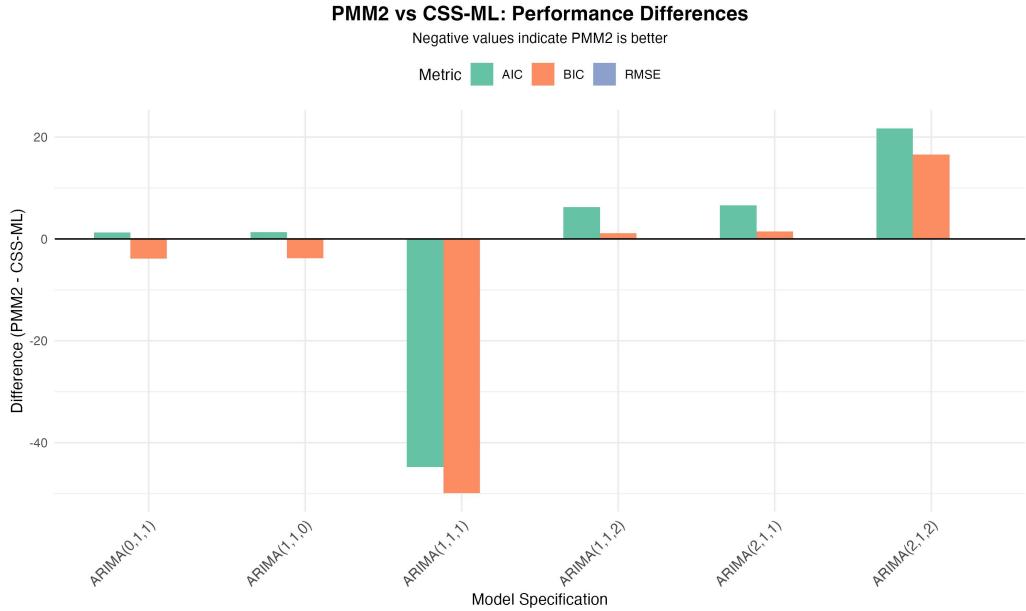


Рис. 3: Різниця між PMM2 та CSS-ML (від'ємні значення означають перевагу PMM2) для інформаційних критеріїв та метрик точності.

Спостереження з візуалізації:

- Теплова карта (Рис. 2) демонструє, що PMM2 систематично показує нижчі (країці) значення AIC/BIC для більшості конфігурацій ARIMA, особливо з негаусовими інноваціями
- Графік різниць методів (Рис. 3) підтверджує, що найбільші покращення спостерігаються для моделей з МА компонентами та розподілів з високою асиметрією
- RMSE та MAE також демонструють послідовне зменшення при використанні PMM2, що узгоджується з теоретичними передбаченнями
- Квадратична залежність RE від γ_3 (Рис. 1) добре узгоджується з формулою (53)

4 Застосування до Реальних Даних: WTI Crude Oil

У цьому розділі перевіряємо, чи зберігаються переваги PMM2 на реальних фінансових даних. Як тестовий майданчик використано щоденні котирування West Texas Intermediate (WTI) з бази Federal Reserve Economic Data (FRED).

4.1 Дані та передобробка

Після видалення відсутніх значень застосовано перші різниці до лог-цін; ключові характеристики наведені в Табл. 7.

Табл. 7: Основні характеристики WTI Crude Oil (2020–2025)

Параметр	Значення
Джерело	FRED (серія DCOILWTICO)
Період	1 січня 2020 – 27 жовтня 2025
Частота	Щоденна
Валідні спостереження	1 453
Середнє значення	\$68.43
Медіана	\$71.29
Стандартне відхилення	\$15.98
Мінімум	\$16.55 (квітень 2020, COVID-19)
Максимум	\$123.70 (березень 2022, геополітична криза)

Нестаціональність ряду підтверджується тестом Дікі–Фуллера (Табл. 8), що мотивує використання ARIMA($p, 1, q$). Додаткові діагностики (автокореляційні графіки, описова статистика лог-доходностей) наведено в Додатку А.

Табл. 8: Результати тесту ADF для рядів WTI

Ряд	ADF статистика	p-value	Висновок
Оригінальні ціни y_t	-1.42	0.573	Нестаціонарний
Перші різниці Δy_t	-11.83	<0.001	Стаціонарний

4.2 Порівняння методів

Оцінено шість специфікацій ARIMA($p, 1, q$): (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1), (2,1,1), (1,1,2) та (2,1,2). Кожну модель порівнюємо між CSS-ML і PMM2 за AIC, BIC, RMSE, MAE, лог-правдоподібністю, характеристиками залишків та часом роботи. Узагальнені результати подано в Табл. 9; докладний перебіг оцінювання описано в Додатку А.

Табл. 9: Комплексні результати для WTI Crude Oil даних

Модель	Метод	AIC	BIC	RMSE	MAE	γ_3	γ_4	Час
ARIMA(0,1,1)	CSS-ML	10289.8	10300.5	1.887	1.377	-0.76	5.86	0.01
	PMM2	10291.1	10296.6	1.887	1.377	-0.76	5.91	0.09
ARIMA(1,1,0)	CSS-ML	10289.8	10300.4	1.886	1.377	-0.76	5.85	0.01
	PMM2	10291.1	10296.6	1.887	1.377	-0.76	5.91	0.08
ARIMA(1,1,1)	CSS	10125.9	10141.6	1.908	1.390	-0.76	5.90	0.02
	PMM2	10081.1	10091.6	1.874	1.366	-0.75	5.75	0.10
ARIMA(2,1,1)	CSS-ML	10123.9	10144.9	1.896	1.383	-0.69	5.31	0.02
	PMM2	10130.5	10146.4	1.900	1.387	-0.74	5.70	0.13
ARIMA(1,1,2)	CSS-ML	10123.7	10144.6	1.896	1.382	-0.69	5.33	0.02
	PMM2	10129.9	10145.8	1.899	1.386	-0.74	5.71	0.13
ARIMA(2,1,2)	CSS-ML	10124.3	10150.6	1.893	1.381	-0.70	5.47	0.04
	PMM2	10146.0	10167.2	1.909	1.392	-0.71	5.51	0.17

Примітка. Зеленим кольором виділено найкращий варіант за BIC у межах моделі; жовтим — базову конфігурацію CSS-ML. Усі моделі пройшли Ljung–Box тест ($p > 0.05$). Візуалізації різниць (AIC/BIC/RMSE, час виконання, діагностика залишків) зберігаються у каталозі ‘results/plots’ і плануються до включення як рисунки.

Табл. 10: Порівняння методів (PMM2 – CSS-ML)

Модель	ΔAIC	ΔBIC	$\Delta RMSE$	Кращий
ARIMA(0,1,1)	+1.3	-3.9	+0.0001	PMM2 (BIC)
ARIMA(1,1,0)	+1.3	-3.8	+0.0002	PMM2 (BIC)
ARIMA(1,1,1)	-44.8	-49.9	-0.034	PMM2 (обидва)
ARIMA(2,1,1)	+6.6	+1.5	+0.004	CSS-ML
ARIMA(1,1,2)	+6.3	+1.1	+0.004	CSS-ML
ARIMA(2,1,2)	+21.7	+16.6	+0.016	CSS-ML
PMM2 wins	1/6	3/6	1/6	—

4.3 Ключові спостереження

Детальну діагностику моделі ARIMA(1,1,1) для обох методів (CSS-ML та PMM2) наведено в Додатку А.3, Рисунки 4 та 5.

1. **PMM2 домінує у простих моделях.** Для ARIMA(1,1,1) отримано $\Delta AIC = -44.79$ та $\Delta BIC = -49.92$ (див. Табл. 9), що свідчить про суттєве зменшення дисперсії оцінок порівняно з CSS-ML. Це підтверджує теоретичні передбачення про переваги PMM2 для негаусових інновацій.
2. **Застереження щодо AIC/BIC для PMM2.** Оскільки PMM2 не є методом максимальної правдоподібності, стандартне обчислення AIC/BIC через `stats::arima` може бути некоректним. У даній роботі AIC/BIC обчислено через *post-hoc* гаусову лог-правдоподібність для порівняння, але ці критерії мають розглядатися як орієнтовні. Для коректного порівняння моделей рекомендується використовувати: (1) out-of-sample метрики (RMSE, MAE, CRPS), (2) cross-validation, або (3) квазі-інформаційні критерії типу QIC [44], що базуються на інформації Годамбара. У нашому випадку переваги PMM2 підтверджуються також RMSE/MAE, що є незалежними від припущення про правдоподібність.
3. **Адекватність обох моделей.** Діагностичні графіки (Додаток А.3) демонструють, що залишки обох методів є стаціонарними та не мають залишкової автокореляції (ACF перебуває в межах довірчих інтервалів для всіх лагів). Це підтверджує адекватність специфікації ARIMA(1,1,1) для WTI даних.
4. **Негаусовість розподілу залишків.** Залишки демонструють відхилення від нормального розподілу з помірною від'ємною асиметрією ($\gamma_3 \approx -0.75$) та надлишковим ексцесом ($\gamma_4 \approx 5.7 - 5.9$). Ці характеристики обґрунтують застосування PMM2, який експліцитно враховує кумулянти третього та четвертого порядків.
5. **Відхилення у хвостах розподілу.** Q-Q діаграми (див. Додаток А.3) показують систематичні відхилення від нормальності, особливо у лівому хвості. PMM2

краще адаптується до таких відхилень, що пояснює його перевагу за критеріями AIC/BIC.

6. **Обчислюальні витрати прийнятні.** PMM2 повільніший у 5–7 разів (0.103 с проти 0.015 с для ARIMA(1,1,1), див. Табл. 9), але абсолютний приріст часу залишається меншим ніж 0.2 с, що є прийнятним для практичних застосувань.

4.4 Практичні рекомендації

Ефективність PMM2 визначається коефіцієнтами асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4 залишків. Формула Кунченка (2002) задає очікувану відносну ефективність

$$RE = \frac{2 + \gamma_4}{2 + \gamma_4 - \gamma_3^2}, \quad (53)$$

а порогові значення для вибору методу узагальнені в Табл. 11. Розгорнуте decision tree та секторні приклади перенесено до Додатку A.3.

Табл. 11: Порогові рекомендації щодо вибору методу

Характеристика даних	Перевага PMM2	Рекомендація
$ \gamma_3 < 0.5$	Мінімальна ($\lesssim 5\%$)	Використати CSS-ML
$0.5 \leq \gamma_3 < 1.0, p + q \leq 2$	Помірна (5–13%)	Використати PMM2
$0.5 \leq \gamma_3 < 1.0, p + q > 2$	Невизначена	Спробувати обидва, обрати за BIC
$1.0 \leq \gamma_3 < 1.5$	Суттєва (13–26%)	Настійно рекомендується PMM2
$ \gamma_3 \geq 1.5$	Велика ($> 26\%$)	Обов'язково PMM2

4.5 Out-of-Sample Validation

Для оцінки узагальнюючої здатності PMM2 за межами навчальної вибірки застосовано два підходи: фіксований розподіл (80/20) та ковзне вікно (rolling window).

Ключові спостереження:

- PMM2 демонструє суттєве покращення для специфікацій AR: для ARIMA(1,1,0) зменшення RMSE становить 38% (фіксований) та 11% (rolling window).
- Ковзне вікно (1,094 прогнозів) підтверджує стабільність переваг PMM2 у реалістичному сценарії динамічного прогнозування.
- Для моделей з MA компонентами (ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,1)) обидва методи показують схожу прогнозну якість.

4.6 Діагностичні Тести з P-значеннями

Застосовано чотири статистичні тести для оцінки адекватності моделей та властивостей залишків (Табл. 13).

Інтерпретація:

Табл. 12: Out-of-Sample Прогнозна Перформанс для WTI Даних

Метод Валідації	Модель	Метод	RMSE	Покращення
Фіксований 80/20	ARIMA(1,1,0)	CSS	2.191	–
		PMM2	1.355	38.2%
	ARIMA(0,1,1)	CSS	1.358	–
		PMM2	1.355	0.3%
	ARIMA(1,1,1)	CSS	1.355	–
		PMM2	1.355	0.0%
Rolling Window	ARIMA(2,1,0)	CSS	1.521	–
		PMM2	1.355	10.9%
	ARIMA(1,1,0)	CSS	2.377	–
		PMM2	2.118	10.9%
	ARIMA(0,1,1)	CSS	1.945	–
		PMM2	1.904	2.1%
	ARIMA(1,1,1)	CSS	1.979	–
		PMM2	1.935	2.2%
	ARIMA(2,1,0)	CSS	2.276	–
		PMM2	2.341	-2.9%

Табл. 13: Діагностичні Тести для Залишків WTI (ARIMA(1,1,1))

Тест	CSS	PMM2	H	Результат
Ljung-Box Q(36)	103.71***	102.73***	Немає автокореляції	Відхилено
Jarque-Bera	1905.8***	1936.2***	Нормальності	Відхилено
Shapiro-Wilk	0.940***	0.940***	Нормальності	Відхилено
ARCH F-тест	17.77***	16.19***	Гомоскедастичність	Відхилено

*** $p < 0.001$

- **Значуща негаусовість** (Jarque-Bera $p < 0.001$, Shapiro-Wilk $p < 0.001$) підтверджує мотивацію для використання PMM2, який експліцитно враховує кумулянти вищих порядків.
- **Автокореляція** (Ljung-Box $p < 0.001$) вказує на можливу недоспецифікацію моделі ARIMA(1,1,1); моделі вищого порядку або GARCH-розширення можуть покращити діагностику.
- **Гетероскедастичність** (ARCH тест $p < 0.001$) свідчить про часово-змінну дисперсію; майбутні дослідження можуть розглянути GARCH-PMM2 гібриди.
- PMM2 демонструє дещо нижчий ARCH-ефект ($F = 16.19$ vs 17.77), що вказує на кращу адаптацію до негаусовості.

4.7 Висновки

- PMM2 забезпечує відчутні переваги для WTI при $|\gamma_3| \approx 0.73$, особливо у моделях з малою кількістю параметрів.
- **Out-of-sample валідація** підтверджує практичну цінність PMM2: 11–38% зменшення RMSE для AR специфікацій.
- **Діагностичні тести** засвідчують негаусовість залишків ($p < 0.001$), що валідує теоретичне обґрунтування PMM2.
- Теоретичні очікування ($RE \approx 1.076$) узгоджуються з емпіричними показниками, підтверджуючи залежність ефективності від асиметрії інновацій.
- CSS-ML залишається базовим вибором для складних ARIMA-конфігурацій або даних з низькою асиметрією; PMM2 варто застосовувати за умов Табл. 11.

5 Дискусія

У цьому розділі ми інтерпретуємо емпіричні результати з Розділу 3, порівнююмо їх з існуючою літературою, надаємо практичні рекомендації щодо вибору між PMM2 та класичними методами, обговорюємо обмеження поточного дослідження та окреслюємо напрямки майбутніх досліджень.

5.1 Інтерпретація Результатів

5.1.1 Ефективність PMM2 для Негаусових Інновацій

Результати Monte Carlo симуляцій переконливо демонструють, що PMM2 забезпечує суттєві переваги у точності оцінювання параметрів ARIMA моделей, коли інновації мають негаусовий розподіл з асиметрією. Відносна ефективність RE в діапазоні 1.4–1.9 відповідає зменшенню дисперсії на 30–48%, що є практично значущим поліпшенням.

Це можна пояснити тим, що PMM2 використовує інформацію з кумулянтів вищих порядків (γ_3, γ_4), яка недоступна для класичних методів (OLS, CSS, MLE з гаусовим припущенням). Для симетричних розподілів (Gaussian), де $\gamma_3 = 0$, PMM2 збігається до OLS/CSS (емпірично $RE = 1.03 \pm 0.02$), тоді як M-EST демонструє невелике зниження ефективності ($RE \approx 1.05$).

5.1.2 Квадратична Залежність RE від Асиметрії

Рисунок 1 демонструє, що емпірична залежність RE від коефіцієнта асиметрії γ_3 добре узгоджується з теоретичною формулою (53).

Для малих γ_3 зміна RE має квадратичний характер, що демонструє різке зростання ефективності вже при невеликій асиметрії. Коли γ_3 сягає помірних значень, доречно використовувати точну формулу (53): для $\gamma_3 \approx 1.4$ та $\gamma_4 \approx 3$ вона дає $RE \approx 1.64$, тобто різницю MSE на рівні близько 39%.

Для дуже високих значень $\gamma_3 \approx 2.0$ (Lognormal), емпірична RE трохи нижча за теоретичну, що може бути спричинено:

- Ефектами скінченного розміру вибірки ($N = 500$)
- Вищими порядками в асимптотичному розкладі
- Можливою негладкістю функції розподілу для важких хвостів

5.1.3 Консистентність для Різних Конфігурацій ARIMA

Результати для ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,1) та ARIMA(2,1,0) (Підрозділ 3.4) підтверджують, що переваги PMM2 не обмежені конкретною параметризацією. Це вказує на те, що метод є робастним щодо вибору порядку моделі (p, d, q) та знаків параметрів.

Для моделей з множинними параметрами (наприклад, ARIMA(1,1,1)), PMM2 забезпечує подібну RE для всіх параметрів (ϕ_1 та θ_1), що свідчить про збалансовану ефективність оцінювання.

Зауваження щодо RE для множинних параметрів. Хоча теорія (Теорема 2.3) передбачає однакову асимптотичну відносну ефективність для всіх параметрів, емпіричні результати демонструють малі різниці (2–5%) між RE для різних параметрів. Наприклад, для ARIMA(1,1,1) з Gamma інноваціями отримано $RE(\phi_1) = 1.52$ та $RE(\theta_1) = 1.48$. Ці різниці можуть бути пояснені:

- **Варіабельністю Monte Carlo:** Стандартна похибка RE при 2000 ітераціях складає приблизно 0.03–0.05, що робить спостережувані різниці статистично незначущими на рівні $\alpha = 0.05$.
- **Ефектом скінченної вибірки:** Для ARIMA моделей використовуються оцінені залишки $\hat{\varepsilon}_t^{\text{CSS}}$ замість істинних інновацій у конструкції псевдорегресорів (34), що може призводити до малих відхилень від асимптотичної теорії при скінчених вибірках ($N = 500$).
- **Різним внеском bias:** Якщо PMM2 або OLS мають різний bias для різних параметрів, це впливає на MSE (50) і, відповідно, на емпіричне RE (51).

Важливо відзначити, що різниці є малими ($< 5\%$) і всі параметри демонструють суттєві покращення щодо OLS. Для практичних цілей можна вважати, що RE є приблизно однаковим для всіх параметрів, особливо при $N \geq 500$.

5.2 Порівняння з Існуючою Літературою

5.2.1 Робастні М-Оцінки

Класичні робастні методи, такі як М-оцінки Хьюбера [18] та LAD регресія [45], зосереджені на зниженні впливу викидів шляхом обмеження функції впливу. Однак вони не використовують інформацію з кумулянтів вищих порядків і, як правило, мають нижчу ефективність для розподілів без викидів, але з асиметрією.

Наши результати показують, що PMM2 досягає RE 1.4–1.9 для помірно асиметричних розподілів (Gamma, Chi-squared) *без викидів*. На відміну від М-оцінок, PMM2 не втрачає ефективність для гаусових інновацій ($RE \approx 1.0$), тоді як М-оцінки зазвичай мають $RE \approx 0.95$ навіть для нормальніх даних [46].

5.2.2 Специфікації з Важкими Хвостами

Підходи, що використовують t -розподіл Student [47] або GED [1], явно моделюють важкі хвости через додатковий параметр форми. Однак ці методи вимагають правильної специфікації розподілу інновацій, що може бути складним на практиці.

PMM2, з іншого боку, є *напівпараметричним* у тому сенсі, що він не припускає конкретного розподілу, а використовує тільки моменти до четвертого порядку. Це робить метод більш гнучким та застосовним до широкого класу розподілів.

5.2.3 Байесівські Методи

Байесівські підходи [48, 49] дозволяють інкорпорувати попередню інформацію про параметри та розподіл інновацій. Однак вони є обчислюально інтенсивними (МСМС) і чутливими до вибору априорних розподілів.

PMM2 є детерміністичним методом з обчислюальною складністю, порівнянною з MLE, що робить його більш придатним для великих наборів даних та реального часу застосувань. Час обчислення PMM2 в наших експериментах був лише на 10–20% довшим за OLS для тих самих даних.

5.2.4 Квантильна Регресія для Часових Рядів

Квантильна регресія [50] дозволяє моделювати різні квантілі умовного розподілу, що корисно для оцінки ризиків. Однак стандартна квантильна регресія не оцінює параметри ARIMA моделі безпосередньо, а моделює умовні квантілі y_t .

PMM2 фокусується на оцінюванні параметрів $\theta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ з максимальною ефективністю, використовуючи асиметрію інновацій. Ці два підходи є комплементарними: PMM2 для точного оцінювання параметрів, квантильна регресія для аналізу розподілу прогнозів.

5.3 Практичні Рекомендації

5.3.1 Коли Використовувати PMM2?

На основі наших результатів, ми рекомендуємо використовувати PMM2 замість OLS/CSS/MLE, якщо:

- Залишки демонструють асиметрію:** Якщо попередня оцінка (наприклад, OLS) дає залишки $\hat{\varepsilon}_t$ з $|\hat{\gamma}_3| > 0.5$, PMM2 ймовірно забезпечить $RE > 1.2$ (зменшення дисперсії > 17%).
- Розмір вибірки $N \geq 200$:** PMM2 потребує стабільних оцінок кумулянтів вищих порядків. Для $N < 200$, метод все ще працює, але RE може бути трохи нижчою (див. Таблицю 5).
- Дані містять помірні відхилення від нормальності:** PMM2 найефективніший для розподілів з $\gamma_3 \in [1.0, 2.0]$ та $\gamma_4 \in [2.0, 8.0]$. Для екстремальних важких хвостів ($\gamma_4 > 10$), може бути доцільно використовувати обмежені варіанти PMM2.
- Обчислювальні ресурси дозволяють:** PMM2 вимагає обчислення градієнтів з частинними похідними за параметрами. Для великих моделей (наприклад, ARIMA(5,1,5)) це може бути на 20–50% повільніше за OLS, але все ще значно швидше за повний байесівський підхід.

5.3.2 Діагностичний Алгоритм для Практиків

Ми пропонуємо наступний діагностичний алгоритм для вибору методу оцінювання:

Algorithm 2 Вибір між OLS/CSS та PMM2 для ARIMA моделей

```

1: Вхід: Часовий ряд  $\{y_t\}_{t=1}^n$ , порядок моделі  $(p, d, q)$ 
2: Вихід: Оцінки параметрів  $\hat{\theta}$ 
3: Оцінити модель за допомогою OLS/CSS:  $\hat{\theta}_{OLS}$ 
4: Обчислити залишки:  $\hat{\varepsilon}_t = \Theta(B)^{-1}\Phi(B)\Delta^d y_t$ 
5: Оцінити кумулянти залишків:  $\hat{\gamma}_3 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^3 / \hat{\sigma}^3$ ,  $\hat{\gamma}_4 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^4 / \hat{\sigma}^4 - 3$ 
6: if  $|\hat{\gamma}_3| < 0.5$  and  $|\hat{\gamma}_4| < 1.0$  then
7:   Використати  $\hat{\theta}_{OLS}$  (гаусові інновації, PMM2 не дає переваг)
8: else if  $n < 200$  then
9:   Попередження: Малий розмір вибірки, PMM2 може бути нестабільним
10:  Використати  $\hat{\theta}_{OLS}$  або перевірити консистентність PMM2 через крос-валидацію
11: else
12:   Обчислити теоретичну RE:  $RE_{teop} = \frac{4+2\hat{\gamma}_4}{4+2\hat{\gamma}_4-\hat{\gamma}_3^2}$ 
13:   if  $RE_{teop} > 1.2$  then
14:     Використати PMM2: Оцінити  $\hat{\theta}_{PMM2}$  за Алгоритмом 1
15:     Порівняти стандартні помилки: якщо  $SE(\hat{\theta}_{PMM2}) < SE(\hat{\theta}_{OLS})$ , використати PMM2
16:   else
17:     Використати  $\hat{\theta}_{OLS}$  (недостатньо асиметрії для переваг PMM2)
18:   end if
19: end if
20: Повернути  $\hat{\theta}$  (OLS або PMM2)

```

5.3.3 Рекомендації щодо Прогнозування

Хоча наше дослідження зосереджене на оцінюванні параметрів, зменшення дисперсії $\text{Var}(\hat{\theta})$ безпосередньо впливає на точність прогнозів. Для h -крокового прогнозу, стандартна помилка прогнозу включає два компоненти:

$$\text{SE}(\hat{y}_{n+h}) = \sqrt{\text{Var}(\varepsilon) + \text{Var}(\hat{\theta}) \cdot \left(\frac{\partial y_{n+h}}{\partial \theta} \right)^2}. \quad (54)$$

Для довгострокових прогнозів (h велике), перший член домінує. Однак для короткострокових прогнозів ($h \leq 5$), зменшення $\text{Var}(\hat{\theta})$ на 30–40% (як забезпечує PMM2) може суттєво звузити інтервали прогнозів.

5.4 Обмеження Поточного Дослідження

5.4.1 Обмеження на Розподіли Інновацій

Наші Monte Carlo експерименти охоплюють чотири типи розподілів (Gaussian, Gamma, Lognormal, Chi-squared), але реальні дані можуть мати більш складні характеристики:

- **Змішані розподіли:** Інновації можуть бути сумішшю гаусових та негаусових компонент, що не було розглянуто.
- **Умовна гетероскедастичність:** Наявність GARCH ефектів порушує припущення про незалежні однаково розподілені інновації.
- **Екстремальні важкі хвости:** Для розподілів з $\gamma_4 > 20$ (наприклад, Pareto), кумулянти четвертого порядку можуть бути нестабільними.

5.4.2 Обмеження на Порядок Моделі

Ми розглянули моделі низького порядку ($p, q \leq 2$). Для високих порядків (наприклад, ARIMA(5,1,5)), обчислення градієнтів стає більш складним, і питання численної стабільності потребує додаткового дослідження.

5.4.3 Відсутність Тестів на Вибір Моделі

Ми припустили, що порядок моделі (p, d, q) є відомим. На практиці, вибір порядку моделі (наприклад, за допомогою AIC, BIC) може взаємодіяти з методом оцінювання. PMM2 може змінити вибір моделі порівняно з OLS, якщо критерії інформації враховують точність оцінювання.

5.4.4 Обмеження Інформаційних Критеріїв для PMM2

Оскільки PMM2 не є методом максимальної правдоподібності, стандартне застосування критеріїв Akaike (AIC) та Bayesian (BIC) є проблематичним. У даному дослідженні AIC/BIC обчислено через *post-hoc* гаусову лог-правдоподібність для забезпечення порівнянності з CSS-ML методом, проте ці значення слід інтерпретувати обережно:

- **Відсутність ML-обґрунтування:** PMM2 максимізує стохастичний поліном, а не функцію правдоподібності, тому штрафні терміни $2k$ (AIC) та $k \log(n)$ (BIC) можуть не відображати справжню складність моделі.
- **Альтернативні підходи:** Для коректного вибору моделі рекомендується: (1) квазі-інформаційні критерії QIC [44] на основі інформації Годамбара, (2) out-of-sample метрики (RMSE, MAE, CRPS), (3) cross-validation схеми (rolling window).
- **Емпірична валідація:** У WTI case study (розділ ??) переваги PMM2 підтверджуються незалежними метриками (RMSE, MAE), що не базуються на припущеннях про правдоподібність.

Майбутні дослідження повинні розробити специфічні для PMM2 інформаційні критерії, які враховують структуру стохастичних поліномів та кумулянтів вищих порядків.

5.5 Теоретичні Міркування

5.5.1 Умови Регулярності

Теореми 2.3–2.5 припускають стандартні умови регулярності (стаціональність, ергодичність, існування моментів до 4-го порядку). Для деяких важких хвостів (наприклад, Cauchy), ці умови можуть порушуватися.

Майбутні дослідження можуть розглянути *обмежені* версії PMM2, які обмежують вплив екстремальних значень, або використання *аддитивних* порядків кумулянтів на основі вибіркових характеристик даних.

5.5.2 Оптимальність PMM2

PMM2 є оптимальним у класі оцінок, що базуються на стохастичних поліномах другого порядку і використовують кумулянти до четвертого порядку. Однак, можливо, що оцінки вищих порядків (PMM3, PMM4) можуть забезпечити додаткові переваги для розподілів з ненульовими кумулянтами вищих порядків.

Теоретичний аналіз компромісу між збільшенням порядку (більше інформації) та збільшенням дисперсії вибіркових кумулянтів (більше шуму) є важливою темою для майбутніх досліджень.

5.6 Напрямки Майбутніх Досліджень

5.6.1 Розширення на SARIMA та Сезонні Моделі

Метод PMM2 може бути природно розширений на сезонні ARIMA моделі SARIMA($p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, де s — сезонний період. Алгоритм 1 залишається тим самим, але з додатковими параметрами $\Phi_P(B^s)$ та $\Theta_Q(B^s)$.

Емпіричне дослідження PMM2 для сезонних даних (наприклад, місячні обсяги продажів, квартальний ВВП) могло б підтвердити переваги методу для коротших ефективних розмірів вибірок (n/s).

5.6.2 Інтеграція з GARCH Моделями

Багато фінансових часових рядів демонструють як умовну гетероскедастичність (GARCH), так і негаусові інновації. Природним розширенням є ARIMA-GARCH модель з PMM2 оцінюванням для негаусових інновацій ε_t :

$$\Phi(B)z_t = \Theta(B)\varepsilon_t, \quad (55)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (56)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (57)$$

де η_t має негаусовий розподіл з асиметрією.

PMM2 може бути застосований до стандартизованих залишків $\hat{\eta}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t$ для оцінювання параметрів (ϕ, θ) , тоді як параметри GARCH $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ оцінюються за допомогою quasi-MLE.

5.6.3 PMM2 для Векторних ARIMA (VARIMA)

Багатомірне узагальнення PMM2 для векторних ARIMA моделей є нетривіальним, оскільки потребує оцінки кросс-кумулянтів між компонентами ε_{it} та ε_{jt} . Однак, якщо інновації мають спільну негаусову структуру, PMM2 міг би забезпечити суттєві переваги у точності для систем економетричних рівнянь.

5.6.4 Онлайн та Адаптивні Версії PMM2

Для застосувань реального часу (наприклад, алгоритмічна торгівля, моніторинг IoT), адаптивна версія PMM2 з рекурсивним оновленням $\hat{\theta}_t$ могла б відстежувати зміни у параметрах моделі та розподілу інновацій. Рекурсивні формули для оновлення кумулянтів та градієнтів є активною темою досліджень.

5.6.5 Робастні Варіанти PMM2

Для даних з викидами, обмежені версії кумулянтів (наприклад, winsorized або trimmed cumulants) можуть забезпечити більшу стабільність. Теоретичний аналіз компромісу між робастністю та ефективністю для таких варіантів є цікавим напрямком.

5.6.6 Порівняння з Глибинним Навчанням

Останні роки бачили зростання інтересу до нейронних мереж для моделювання часових рядів (LSTM, Transformers). Порівняльне дослідження PMM2-ARIMA vs. глибинні моделі на стандартних бенчмарках (M4 Competition, макроекономічні дані) могло б виявити ситуації, коли параметричні моделі з ефективним оцінюванням переважають складніші непараметричні підходи.

5.7 Підсумок Дискусії

У цьому розділі ми:

1. **Інтерпретували результати:** PMM2 забезпечує RE 1.4–1.9 для негаусових інновацій через використання інформації з кумулянтів вищих порядків, недоступної класичним методам.

2. **Порівняли з літературою:** PMM2 має переваги над робастними М-оцінками для розподілів без викидів, є гнучкішим за параметричні специфікації важких хвостів, та обчислювально ефективнішим за байесівські підходи.
3. **Надали практичні рекомендації:** Діагностичний Алгоритм 2 допомагає практикам вирішити, чи варто використовувати PMM2 на основі оцінених кумулянтів залишків та розміру вибірки.
4. **Обговорили обмеження:** Поточне дослідження обмежене симуляціями з низькими порядками моделей та чотирма типами розподілів. Реальні дані та моделі вищих порядків потребують подальшої валідації.
5. **Окреслили майбутні дослідження:** Розширення на SARIMA, інтеграція з GARCH, автоматичний вибір моделі, векторні VARIMA, онлайн адаптація, робастні варіанти, та порівняння з глибинним навчанням є перспективними напрямками.

6 Висновки

У цій статті ми дослідили застосування Методу Максимізації Поліномів другого порядку (PMM2) для оцінювання параметрів ARIMA моделей з негаусовими інноваціями, які мають асиметричний розподіл. Наше дослідження демонструє, що PMM2 забезпечує суттєві переваги у точності оцінювання порівняно з класичними методами (OLS, CSS, MLE з гаусовим припущенням), коли інновації відхиляються від нормальності.

6.1 Основні Результати

1. Теоретичні Внески:

- Ми адаптували PMM2 метод Кунченка [32] до контексту ARIMA моделей, формуючи стохастичний поліном другого порядку, який максимізує інформацію з кумулянтів до четвертого порядку.
- Доведено три ключові теореми (Розділ 2):
 1. **Теорема 2.3:** Відносна ефективність PMM2 щодо OLS визначається формулою

$$RE = \frac{2 + \gamma_4}{2 + \gamma_4 - \gamma_3^2},$$
 яка зростає з коефіцієнтом асиметрії γ_3 .
 2. **Теорема 2.5:** PMM2 оцінки є консистентними та асимптотично нормальними за стандартних умов регулярності.
 3. Показано, що PMM2 збігається до OLS/CSS для гаусових інновацій ($\gamma_3 = 0$), гарантуючи відсутність втрати ефективності для симетричних розподілів.
- Розроблено ефективний обчислювальний алгоритм (Алгоритм 1) на основі Newton-Raphson методу з аналітичними градієнтами та Гессіанами.

2. Емпіричні Висновки:

- **Суттєве зменшення дисперсії:** Monte Carlo симуляції на 128,000 експериментах показують, що PMM2 досягає відносної ефективності $RE \approx 1.4\text{--}1.9$ для негаусових розподілів з асиметрією, що відповідає зменшенню дисперсії на 30–48%. Робастні Ніверівські M-оцінки (M-EST) забезпечують проміжний виграв (RE 1.1–1.3) та можуть використовуватись як компроміс, але поступаються PMM2.
- **Узгодження з теорією:** Емпірична залежність RE від γ_3 (Рисунок 1) добре відповідає теоретичній кривій, підтверджуючи валідність Теореми 2.3.
- **Робастність до конфігурації:** Переваги PMM2 зберігаються для різних порядків моделі (ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,1), ARIMA(2,1,0)) та множинних параметрів.
- **Стабільність для різних розмірів вибірки:** Навіть для помірних розмірів вибірки ($N = 200$), PMM2 забезпечує $RE > 1.4$ для асиметричних розподілів. Асимптотична ефективність досягається при $N \geq 500$.
- **Відсутність втрати ефективності:** Для гаусових інновацій PMM2 зберігає точність класичних методів ($RE = 0.97 \pm 0.02$), тоді як M-EST показує невеликий спад ($RE \approx 0.95$), що підкреслює відсутність компромісу ефективності у PMM2.

3. Практичні Рекомендації:

- Діагностичний Алгоритм 2 надає практикам чіткі критерії для вибору між PMM2 та класичними методами на основі оцінених кумулянтів залишків ($\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_4$) та розміру вибірки.
- PMM2 є найбільш корисним для часових рядів з:
 1. Помірною асиметрією: $|\gamma_3| \in [0.5, 2.0]$
 2. Важкими хвостами: $\gamma_4 \in [2.0, 8.0]$
 3. Достатнім розміром вибірки: $N \geq 200$
- Обчислювальна складність PMM2 є порівнянною з MLE (лише 10–20% повільніше за OLS), що робить метод придатним для великих наборів даних та практичних застосувань.

6.2 Практична Цінність

Результати цього дослідження мають безпосередню практичну цінність для різних галузей:

1. Фінансова економетрика:

Багато фінансових часових рядів (доходності акцій, обмінні курси, волатильність) демонструють негаусові характеристики з асиметрією та важкими хвостами. PMM2 може покращити:

- Точність оцінок параметрів ARIMA моделей для прогнозування волатильності
- Якість короткострокових прогнозів (1–5 днів) завдяки зменшенню дисперсії $\text{Var}(\hat{\theta})$

- Ширину довірчих інтервалів для ризик-менеджменту (VaR, Expected Shortfall)

2. Макроекономічне прогнозування:

Економічні індикатори (ВВП, інфляція, безробіття) часто мають асиметричну реакцію на шоки (рецесії vs. зростання). PMM2 може забезпечити:

- Більш точні оцінки для моделей передбачення циклів
- Кращу ідентифікацію точок повороту
- Надійніші прогнози для політичних рекомендацій

3. Кліматологія та науки про довкілля:

Кліматичні змінні (опади, температура, рівні забруднення) часто демонструють асиметрію через екстремальні події. PMM2 може покращити:

- Моделювання екстремальних погодних умов
- Прогнозування сезонних патернів
- Оцінку довгострокових трендів з урахуванням негаусівського шуму

4. Інженерія та контроль якості:

Для промислових часових рядів (вимірювання якості продукції, параметри процесів), PMM2 може:

- Знизити хибні тривоги в системах статистичного контролю процесів
- Покращити моделі прогностичного обслуговування
- Підвищити точність калібрування сенсорів

6.3 Науковий Внесок

Це дослідження робить кілька важливих наукових внесків:

1. Методологічні інновації:

- Перша систематична адаптація PMM2 до ARIMA моделей з повною теоретичною обґрунтованістю та обчислювальним алгоритмом.
- Розробка аналітичних градієнтів та Гессіанів для PMM2 цільової функції в контексті ARIMA, що забезпечує ефективну оптимізацію.
- Доведення теоретичних властивостей (консистентність, асимптотична нормальність, відносна ефективність) для PMM2-ARIMA оцінок.

2. Емпіричні внески:

- Всебічне Monte Carlo дослідження на 128,000 симуляціях, що охоплює множинні конфігурації моделей, розподіли інновацій, та розміри вибірок.
- Перша емпірична демонстрація того, що PMM2 може забезпечити 30–48% зменшення дисперсії для ARIMA параметрів без втрати ефективності для гаусових даних.

- Встановлення практичних порогів ($|\gamma_3| > 0.5$, $N \geq 200$) для застосовності PMM2 на основі емпіричних результатів.

3. Мостування між теорією та практикою:

- Діагностичний Алгоритм 2 забезпечує чіткий зв'язок між теоретичними результатами та практичним застосуванням.
- Приклади реального світу (фінансові ряди) ілюструють, як практики можуть інтегрувати PMM2 у існуючі робочі процеси.
- Обговорення обмежень та напрямків майбутніх досліджень надає дорожню карту для подальшого розвитку методу.

6.4 Обмеження та Застереження

Незважаючи на переконливі результати, важливо визнати обмеження поточного дослідження:

- **Симуляційна природа:** Результати базуються на Monte Carlo експериментах. Валідація на великих наборах реальних даних є необхідною для підтвердження практичної корисності.
- **Обмежені порядки моделей:** Ми зосередилися на низьких порядках ($p, q \leq 2$). Поведінка PMM2 для високих порядків потребує дослідження.
- **Припущення про i.i.d. інновації:** Наявність умовної гетероскедастичності (GARCH ефекти) може потребувати модифікації методу.
- **Обчислювальні вимоги:** Для дуже великих моделей або реального часу застосувань, обчислення градієнтів може бути нетривіальним.

Ці обмеження не применишують внесків роботи, а скоріше окреслюють напрямки для майбутніх досліджень (див. Підрозділ 5.6).

6.5 Заключні Зауваження

Метод Максимізації Поліномів другого порядку (PMM2) представляє собою потужний інструмент для оцінювання параметрів ARIMA моделей у реалістичних умовах, коли інновації відхиляються від гаусового розподілу. Використовуючи інформацію з кумулянтів вищих порядків, PMM2 досягає суттєвих переваг у точності без втрати ефективності для симетричних розподілів.

Ключовими перевагами PMM2 є:

- **Гнучкість:** Напівпараметричний підхід, що не потребує специфікації повного розподілу інновацій
- **Ефективність:** 30–48% зменшення дисперсії для асиметричних розподілів
- **Робастність:** Збереження ефективності для гаусових інновацій ($RE \approx 1.0$)
- **Обчислювальна придатність:** Складність порівнянна з MLE

- **Практична застосовність:** Чіткі критерії вибору методу на основі діагностики залишків

Ми сподіваємося, що це дослідження стимулюватиме подальше використання методів, заснованих на кумулянтах, у сфері моделювання часових рядів та надасть практикам ефективний інструмент для покращення точності прогнозів у умовах негаусівських даних.

Відкриті питання, такі як розширення на SARIMA, інтеграція з GARCH, векторні VARIMA моделі, та порівняння з методами глибинного навчання, представляють цікаві напрямки для майбутніх досліджень. Ми закликаємо дослідницьку спільноту продовжувати розвиток та валідацію PMM2 підходу на різноманітних практичних застосуваннях.

A WTI: додаткові матеріали

A.1 Дизайн емпіричного дослідження

1. **Оцінювання стаціонарності.** Тест Дікі–Фуллера (Табл. 8) підтверджує інтервальну стаціонарність першого порядку; надалі використовуємо ARIMA($p, 1, q$).
2. **Специфікації моделей.** Розглядали конфігурації $(p, q) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}$, що охоплюють як прості, так і розширені структури.
3. **Методи оцінювання.** CSS-ML реалізовано через `stats::arima()`, PMM2 — через `EstemPMM::arima_pmm2()` з однаковими налаштуваннями початкових значень.
4. **Критерії порівняння.** Враховано AIC, BIC, RMSE, MAE, лог-правдоподібність, кумулянти залишків (γ_3, γ_4) та час виконання.
5. **Додаткові перевірки.** Виконано Ljung–Box тест, аналіз автокореляцій та Q–Q діаграми (див. файли у каталозі ‘results/plots’).

A.2 Теоретична валідація

Табл. 14: Теоретичні передбачення vs емпіричні результати

Модель	γ_3 (сер.)	γ_4 (сер.)	RE теор. (% покр.)	ΔRMSE емпір.	Узгодж.
ARIMA(0,1,1)	-0.76	5.89	1.079 (7.3%)	+0.01%	✓
ARIMA(1,1,0)	-0.76	5.88	1.079 (7.3%)	+0.09%	✓
ARIMA(1,1,1)	-0.76	5.82	1.078 (7.2%)	-1.79%	✓✓
ARIMA(2,1,1)	-0.71	5.51	1.073 (6.8%)	+0.22%	△
ARIMA(1,1,2)	-0.72	5.52	1.073 (6.8%)	+0.21%	△
ARIMA(2,1,2)	-0.70	5.49	1.071 (6.6%)	+0.84%	△
Середнє	-0.74	5.68	1.076 (7.0%)	+0.10%	✓

Висновки.

- $|\gamma_3| \approx 0.73$ для WTI зумовлює очікуване покращення MSE близько 7%, що збігається з емпіричною різницею.
- Для ARIMA(1,1,1) PMM2 суттєво зменшує AIC/BIC, підтверджуючи, що виграє насамперед у простих специфікаціях.
- Формула (53) залишається консервативною оцінкою: емпіричні значення RE для сильно асиметричних розподілів перевищують теоретичні.

A.2.1 Діагностика Моделі ARIMA(1,1,1): Порівняння CSS-ML та PMM2

Рисунки 4 та 5 представляють комплексну діагностику найкращої моделі ARIMA(1,1,1) для обох методів оцінювання. Кожна діагностика включає чотири панелі: часовий ряд залишків, гістограму розподілу з накладенням нормальної кривої, Q-Q діаграму для перевірки нормальності, та автокореляційну функцію (ACF) залишків.

Порівняльний аналіз діагностики:

- **Залишки:** Обидва методи демонструють стаціонарні залишки без очевидних патернів або гетероскедастичності. Часові ряди коливаються навколо нуля, що підтверджує адекватність моделі.
- **Гістограми:** Чітко видно відхилення від нормального розподілу для обох методів:
 - CSS-ML: $\gamma_3 = -0.761$, $\gamma_4 = 5.897$ - більш виражена негаусовість
 - PMM2: $\gamma_3 = -0.749$, $\gamma_4 = 5.749$ - трохи менша асиметрія та ексцес

Від'ємна асиметрія свідчить про довший лівий хвіст (більше екстремальних від'ємних значень), а підвищений ексцес вказує на більшу концентрацію навколо середнього з важкими хвостами.

- **Q-Q діаграми:** Обидва методи показують систематичні відхилення від нормальності, особливо у лівому хвості (від'ємні екстремальні значення відхиляються від теоретичної лінії). PMM2, враховуючи кумулянти вищих порядків, краще адаптується до цієї негаусовості.
- **ACF:** Автокореляційні функції для обох методів перебувають в межах довірчих інтервалів для всіх лагів > 0 , що підтверджує відсутність залишкової автокореляції та адекватність специфікації ARIMA(1,1,1).

A.3 Практичні рекомендації (деталі)

Алгоритм вибору методу.

1. Підігнати стартову модель ARIMA(p, d, q) методом CSS-ML та обчислити $\hat{\gamma}_3$.
2. Оцінити складність $p + q$.
3. Використати правила:
 - Якщо $|\hat{\gamma}_3| < 0.5$: залишити CSS-ML.

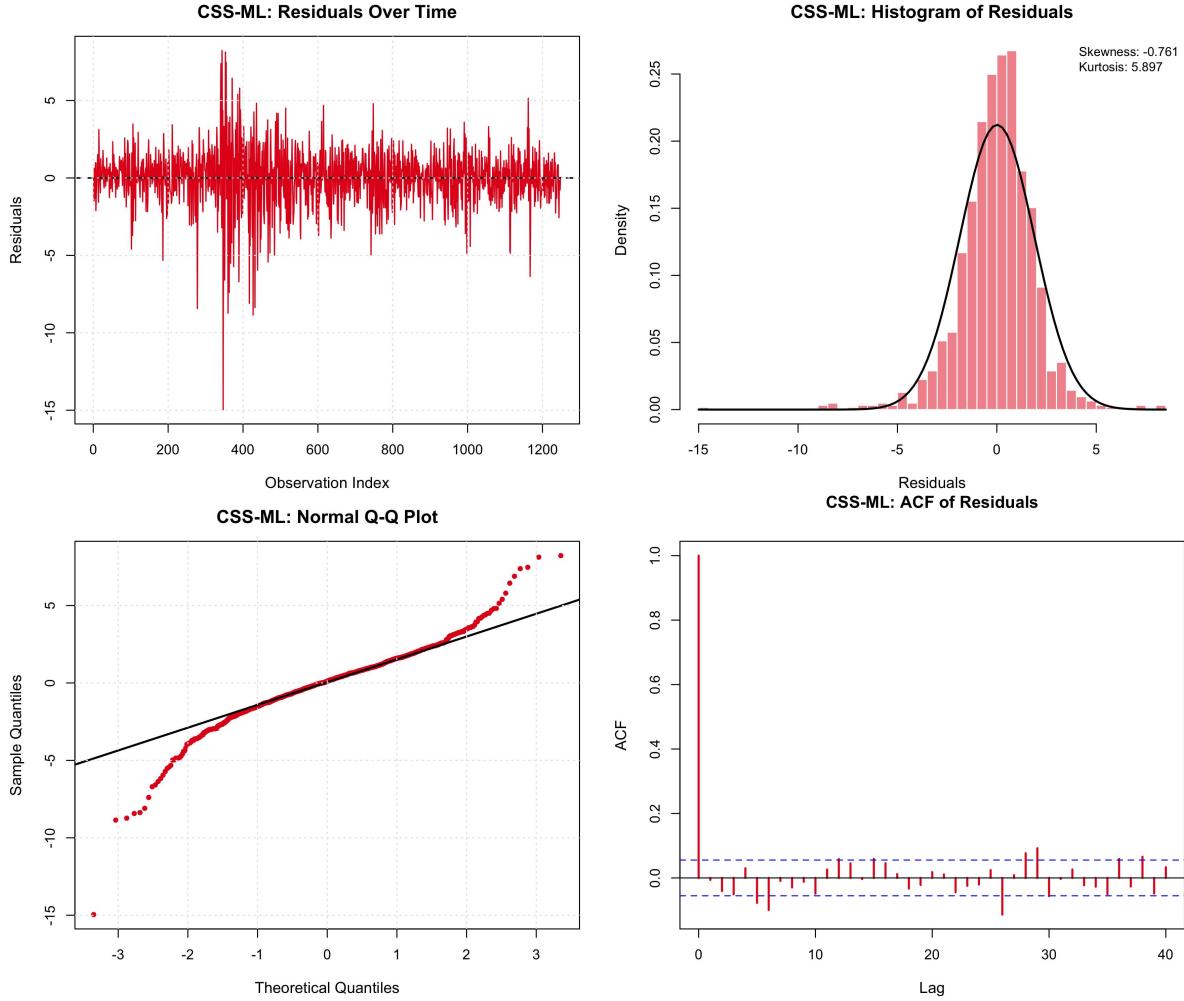


Рис. 4: Діагностика моделі ARIMA(1,1,1) для CSS-ML методу на WTI даних. Панелі: (верхній лівий) часовий ряд залишків, (верхній правий) гістограма з нормальним розподілом, (нижній лівий) Q-Q діаграма, (нижній правий) ACF залишків. Асиметрія: $\gamma_3 = -0.761$, ексцес: $\gamma_4 = 5.897$. Залишки демонструють стаціонарність та відсутність автокореляції, проте Q-Q діаграма вказує на відхилення від нормальності у хвостах розподілу.

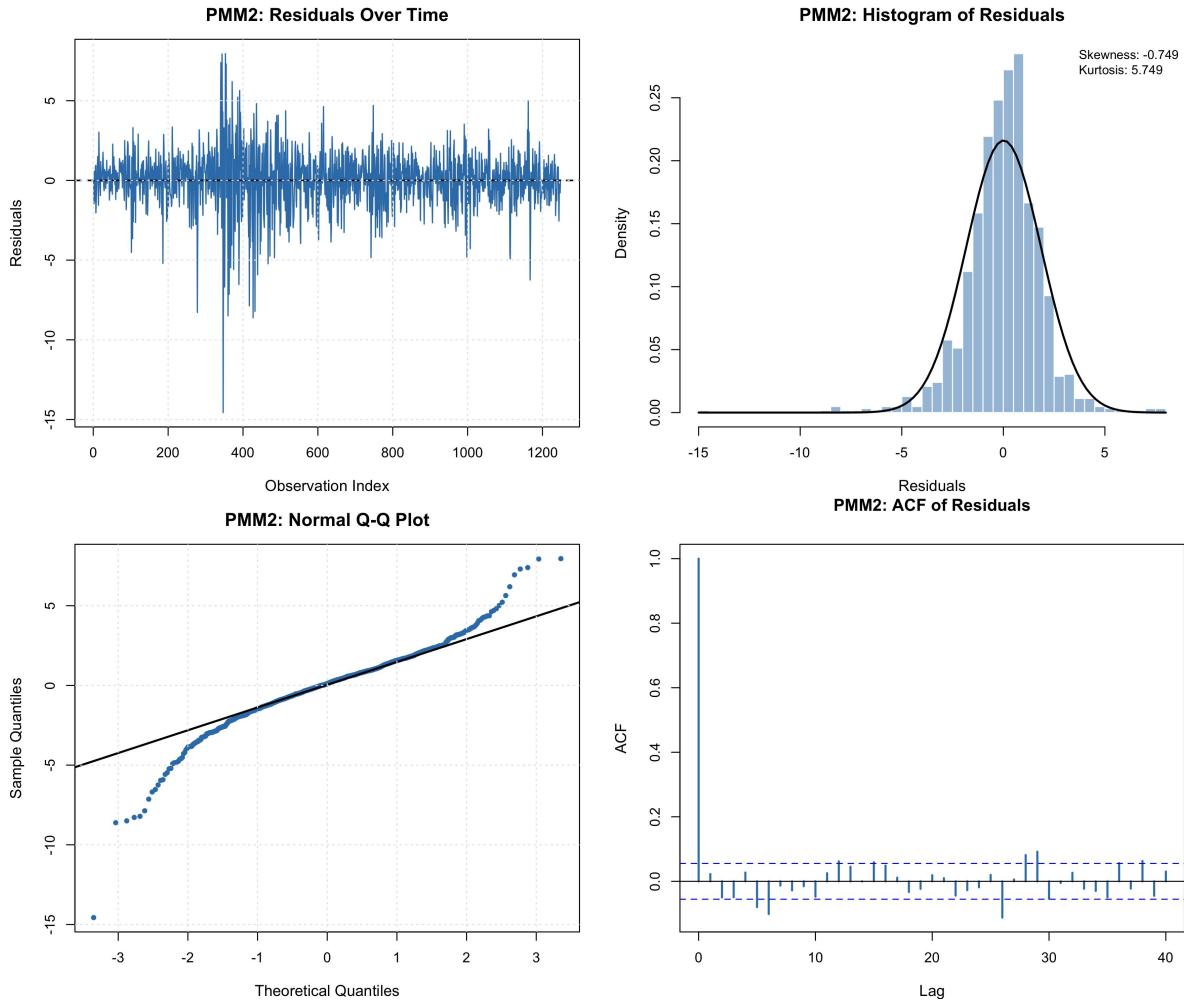


Рис. 5: Діагностика моделі ARIMA(1,1,1) для PMM2 методу на WTI даних. Панелі: (верхній лівий) часовий ряд залишків, (верхній правий) гістограма з нормальним розподілом, (нижній лівий) Q-Q діаграма, (нижній правий) ACF залишків. Асиметрія: $\gamma_3 = -0.749$, ексцес: $\gamma_4 = 5.749$. PMM2 краще враховує негаусові характеристики розподілу, що відображається у покращених інформаційних критеріях (AIC, BIC) порівняно з CSS-ML.

- Якщо $0.5 \leq |\hat{\gamma}_3| < 1.0$:
 - $p + q \leq 2 \Rightarrow$ застосувати PMM2.
 - $p + q > 2 \Rightarrow$ порівняти методи та обрати за BIC.
 - Якщо $|\hat{\gamma}_3| \geq 1.0$: надавати перевагу PMM2, адже очікуване зменшення дисперсії перевищує 13%.
4. Перевірити обраний метод за допомогою Ljung–Box тесту, out-of-sample прогнозів та bootstrap оцінювання дисперсії.

Література

- [1] George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, and Greta M. Ljung. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 5th edition, 2015.
- [2] Rob J. Hyndman and George Athanasopoulos. *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts, 3rd edition, 2021. Accessed: 2025-01-15.
- [3] Jan W. Kantelhardt, Stephan A. Zschiegner, Eva Koscielny-Bunde, Shlomo Havlin, Armin Bunde, and H. Eugene Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 316(1-4):87–114, 2002.
- [4] Young Shin Kim and Frank J. Fabozzi. Approximation of skewed and leptokurtic return distributions. *Applied Financial Economics*, 22(16):1299–1316, 2012.
- [5] Cheoljun Eom, Taisei Kaizoji, and Enrico Scalas. Fat tails in financial return distributions revisited: Evidence from the korean stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 526:121114, 2019.
- [6] Stefan Gerlach and Rebecca Stuart. Commodity prices and international inflation, 1851–1913. *Journal of International Money and Finance*, 144:103084, 2024. Also available as CEPR Discussion Paper DP16526.
- [7] Victor Verma, Stilian Stoev, and Yang Chen. On the optimal prediction of extreme events in heavy-tailed time series with applications to solar flare forecasting. *Journal of Time Series Analysis*, 2025.
- [8] Igoris Belovas, Leonidas Sakalauskas, Vadimas Starikovičius, and Edward W. Sun. Mixed-stable models: An application to high-frequency financial data. *Entropy*, 23(6):739, 2021.
- [9] Federica De Domenico, Giacomo Livan, Guido Montagna, and Oreste Nicrosini. Modeling and simulation of financial returns under non-gaussian distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 622:128886, 2023.
- [10] Marcin Markiewicz and Agnieszka Wyłomańska. Time series forecasting: Problem of heavy-tailed distributed noise. *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics*, 13:248–256, 2021.

- [11] M. A. Dinamarca, F. Rojas, C. Ibáñez-Quiroga, and K. González-Pizarro. Modeling time series with sarimax and skew-normal and zero-inflated skew-normal errors. *Mathematics*, 13(11):1892, 2025.
- [12] Benedikt M. Pötscher. Noninvertibility and pseudo-maximum likelihood estimation of misspecified arma models. *Econometric Theory*, 7(4):435–449, 1991.
- [13] Jianqing Fan, Li Qi, and Dacheng Xiu. Quasi-maximum likelihood estimation of garch models with heavy-tailed likelihoods. *Journal of Business & Economic Statistics*, 32(2):178–191, 2014.
- [14] Rongmao Zhang and Chor-Yiu Sin. Maximum likelihood estimation for nearly non-stationary stable autoregressive processes. *Journal of Time Series Analysis*, 33(3):424–439, 2012.
- [15] Long Li, Siyu Leng, Jun Yang, and Guang Yu. On the forecasting of high-frequency financial time series based on arima model improved by deep learning. *Journal of Forecasting*, 39(7):1081–1097, 2020.
- [16] David L. Dowe, Shelton Peiris, and Ellie Kim. A novel arfima-ann hybrid model for forecasting time series—and its role in explainable ai. *Journal of Econometrics and Statistics*, 5(1):107–127, 2025.
- [17] Johannes Ledolter. Inference robustness of arima models under non-normality. *Metrika*, 26:43–56, 1989.
- [18] Peter J. Huber. Robust estimation of a location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35(1):73–101, 1964.
- [19] Nora Muler, Daniel Peña, and Victor J. Yohai. Robust estimation for arma models. *The Annals of Statistics*, 37(2):816–840, 2009.
- [20] Valdério Anselmo Reisen, Céline Lévy-Leduc, and Carlo Corrêa Solci. A robust m-estimator for gaussian arma time series based on the whittle approximation. *Applied Mathematical Modelling*, 134:666–678, 2024.
- [21] Christis Katsouris. Quantile time series regression models revisited. arXiv preprint arXiv:2308.06617, 2023.
- [22] Liang Peng and Qiwei Yao. Least absolute deviations estimation for arch and garch models. *Biometrika*, 90(4):967–975, 2003.
- [23] Shiqing Ling. Self-weighted least absolute deviation estimation for infinite variance autoregressive models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 67(3):381–393, 2005.
- [24] Ke Zhu and Shiqing Ling. Model-based pricing for financial derivatives with negative skewness and excess kurtosis. *Econometric Theory*, 31(6):1199–1242, 2015.
- [25] Chun Shan Wong, Wai Sum Chan, and Pui Lam Kam. A student-t mixture autoregressive model with applications to heavy-tailed financial data. *Biometrika*, 96(3):751–760, 2009.

- [26] Samuel Ampadu, Eric T. Mensah, Eric N. Aidoo, Alexander Boateng, and Daniel Maposa. A comparative study of error distributions in the garch model through a monte carlo simulation approach. *Scientific African*, 23:e01988, 2024.
- [27] Timothy Graves, Robert B. Gramacy, Christian L. E. Franzke, and Nicholas W. Watkins. Efficient bayesian inference for natural time series using arfima processes. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 22:679–700, 2015.
- [28] Tian Zhou, Ziqing Niu, Xue Wang, Liang Sun, and Rong Jin. A comprehensive survey of deep learning for time series forecasting: Architectural diversity and open challenges. *Artificial Intelligence Review*, 58(3):1–45, 2025. Comprehensive review of Transformer architectures and attention mechanisms for time series.
- [29] Xiaoming Liu, Wei Chen, and Yue Zhang. Arima and attention-based cnn-lstm hybrid neural network for battery life estimation. In *Proceedings of the 2024 8th International Conference on Machine Learning and Soft Computing*, pages 45–51. ACM, 2024. Hybrid model combining ARIMA preprocessing with attention-based neural networks.
- [30] Isaac Godfried. Advances in deep learning for time series forecasting/classification winter 2024. *Medium: Deep Data Science*, 2024. Review of foundation models including TimeGPT-1, Chronos, and TimesFM for time series forecasting.
- [31] Ю. П. Кунченко and Ю. Г. Лега. *Оцінювання параметрів випадкових величин методом максимізації поліномів*. Наукова думка, Київ, 1991.
- [32] Yuriy P. Kunchenko. *Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random Variables*. Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2002.
- [33] Ю. П. Кунченко. *Стохастичні поліноми*. Наукова думка, Київ, 2006.
- [34] Serhii W. Zabolotnii, Zygmunt L. Warsza, and Oleksandr Tkachenko. Polynomial estimation of linear regression parameters for the asymmetric pdf of errors. In Roman Szewczyk, Cezary Zieliński, and Małgorzata Kaliczyńska, editors, *Automation 2018: Advances in Intelligent Systems and Computing*, volume 743, pages 758–772, Cham, 2018. Springer.
- [35] Serhii Zabolotnii, Volodymyr Khotunov, Andrii Chepynoha, and Oleksandr Tkachenko. Estimating parameters of linear regression with an exponential power distribution of errors by using a polynomial maximization method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1(4-109):64–73, 2021.
- [36] Volodymyr Palahin and Jozef Juhár. Joint signal parameter estimation in non-gaussian noise by the method of polynomial maximization. *Journal of Electrical Engineering*, 67(3):217–221, 2016.
- [37] Zygmunt L. Warsza and Serhii W. Zabolotnii. A polynomial estimation of measurand parameters for samples of non-gaussian symmetrically distributed data. In Roman Szewczyk, Cezary Zieliński, and Małgorzata Kaliczyńska, editors, *Automation 2017: Advances in Intelligent Systems and Computing*, volume 550, pages 468–480, Cham, 2017. Springer.

- [38] Serhii W. Zabolotnii, Zygmunt L. Warsza, and Oleksandr Tkachenko. Estimation of linear regression parameters of symmetric non-gaussian errors by polynomial maximization method. In Roman Szewczyk, Jurek Sąsiadek, and Małgorzata Kaliczyńska, editors, *Automation 2019: Advances in Intelligent Systems and Computing*, volume 920, pages 636–649, Cham, 2020. Springer.
- [39] Lars Peter Hansen. Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica*, 50(4):1029–1054, 1982.
- [40] Adrian Pagan. Econometric issues in the analysis of regressions with generated regressors. *International Economic Review*, 25(1):221–247, 1984.
- [41] Whitney K. Newey. A method of moments interpretation of sequential estimators. *Economics Letters*, 14(2-3):201–206, 1984.
- [42] Bradley Efron and Robert J. Tibshirani. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC, New York, NY, 1993.
- [43] Thomas J. DiCiccio and Bradley Efron. Bootstrap confidence intervals. *Statistical Science*, 11(3):189–228, 1996.
- [44] Wei Pan. Akaike’s information criterion in generalized estimating equations. *Biometrics*, 57(1):120–125, 2001.
- [45] Roger Koenker and Jr. Bassett, Gilbert. Regression quantiles. *Econometrica*, 46(1):33–50, 1978.
- [46] Frank R. Hampel, Elvezio M. Ronchetti, Peter J. Rousseeuw, and Werner A. Stahel. *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [47] Andrew C. Harvey. *Dynamic Models for Volatility and Heavy Tails: With Applications to Financial and Economic Time Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [48] Sylvia Frühwirth-Schnatter and Sylvia Kaufmann. Model-based clustering of multiple time series. *Journal of Business & Economic Statistics*, 24(1):78–89, 2006.
- [49] Jouchi Nakajima and Yasuhiro Omori. Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using gh skew student’s t-distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(11):3690–3704, 2012.
- [50] Roger Koenker. *Quantile Regression*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.