Застосування Методу Максимізації Поліномів для Оцінювання Параметрів ARIMA Моделей з Негаусовими Інноваціями

Application of the Polynomial Maximization Method for ARIMA Parameter Estimation Under Non-Gaussian Innovations

Абстракт

[Абстракт буде доданий після завершення основного тексту. Орієнтовний обсяг: 200-250 слів]

Ключові слова: ARIMA моделі, метод максимізації поліномів, PMM2, негаусові інновації, оцінювання параметрів, часові ряди, асиметричні розподіли, кумулянти вищих порядків, Monte Carlo симуляції

1. Вступ

1.1. Актуальність Проблеми

Моделі авторегресії та інтегрованого ковзного середнього (ARIMA) залишаються одним з найпоширеніших інструментів аналізу та прогнозування часових рядів у сучасній науці. Починаючи від піонерської роботи Box і Jenkins (1970), ARIMA моделі знайшли застосування у фінансовій економетриці, макроекономічному прогнозуванні, аналізі метеорологічних даних, медичній статистиці та багатьох інших галузях [Box et al., 2015; Hyndman & Athanasopoulos, 2021].

Класичні методи оцінювання параметрів ARIMA моделей — метод максимальної правдоподібності (MLE), метод умовної суми квадратів (CSS) та звичайний метод найменших квадратів (OLS) — базуються на фундаментальному припущенні гаусовості інновацій (випадкових похибок). Це припущення забезпечує низку бажаних статистичних властивостей: асимптотичну ефективність оцінок, простоту обчислень та зрозумілу інференцію. Проте, практика аналізу реальних даних систематично демонструє порушення цього припущення.

Останні дослідження надають переконливі емпіричні свідчення негаусовості у різноманітних типах часових рядів:

- **Фінансові часові ряди:** Доходності акцій, обмінні курси та волатильність демонструють асиметричні розподіли з важкими хвостами. Дослідження показують, що навіть після врахування волатильності через GARCH моделі, важкі хвости залишаються [Viswanathan et al., 2003; Kim & Fabozzi, 2012]. Нещодавнє дослідження Korean stock market підтвердило персистентність важких хвостів навіть після контролю за кризовими періодами та кластеризацією волатильності [ArXiv 1904.02567].
- **Економічні показники:** Ціни на сировинні товари, інфляційні дані та торговельні обсяги характеризуються значною асиметрією. Дослідження 15 економік за період 1851-1913 виявило сильний зв'язок між асиметрією цін на

товари та інфляцією, при цьому до 48% варіації інфляції пояснюється змінами цін на товари [CEPR, 2024].

- **Екологічні та метеорологічні дані:** Вимірювання забруднення, опади, температурні аномалії та сонячна активність часто мають асиметричний характер з екстремальними значеннями. Verma et al. (2024) продемонстрували важкі хвости у даних сонячних спалахів та обговорили теоретичні межі прогнозування за умов важких хвостів [arXiv:2407.11887].
- **Високочастотні фінансові дані:** Mixed-stable моделі, застосовані до DAX компаній на 10-секундних інтервалах, виявили 43-82% нульових змін (стагнаційні ефекти), що потребує спеціальних методів моделювання [Entropy, 2023; De Domenico et al., 2023].

Дуже свіжі дослідження 2025 року продовжують підтверджувати ці висновки. Markiewicz & Wyłomańska (2021) показали, що SARIMAX моделі з Student-t інноваціями значно покращують прогнози для даних з важкими хвостами. У роботі "Modeling Time Series with SARIMAX and Skew-Normal Errors" (Mathematics MDPI, 2025) продемонстровано, що врахування асиметрії через skew-normal розподіл зменшує MAE до 0.40 та RMSE до 0.49 для сценаріїв з негативною асиметрією.

1.2. Обмеження Класичних Методів

За умов порушення припущення гаусовості, класичні методи оцінювання параметрів ARIMA моделей зазнають суттєвих проблем:

Систематична зміщеність та неконсистентність. Pötscher (1991) продемонстрував, що псевдо-максимізатори правдоподібності можуть поводитися драстично інакше, ніж локальні максимізатори, коли розподіл інновацій специфіковано невірно. Gaussian pseudo-likelihood може призводити до неконсистентних оцінок за умов розподільної неспецифікації [Pötscher, 1991; Econometric Theory]. Qi & Fan (2010) показали, що non-Gaussian квазі-MLE страждає від неконсистентності, якщо квазі-правдоподібність не є справжнім розподілом, пропонуючи двокроковий non-Gaussian QMLE для досягнення консистентності з вищою ефективністю порівняно з Gaussian QMLE [arXiv:1001.3895].

Втрата статистичної ефективності. Навіть коли оцінки залишаються консистентними, їх дисперсія може бути суттєво завищеною порівняно з оптимальними оцінками, адаптованими до справжнього розподілу інновацій. Zhang & Sin (2012) показали, що граничні розподіли є сумішшю стабільних та гаусових процесів для near-unit root AR процесів з α-стабільним шумом, демонструючи ускладнення за умов важких хвостів та близькості до одиничного кореня [Journal of Time Series Analysis].

Зниження точності прогнозів. Li et al. (2020) документували, що традиційні ARIMA моделі мають великі відхилення для високочастотного фінансового прогнозування, оскільки фінансові дані демонструють нерегулярні флуктуації, що потребують альтернативних підходів [Journal of Forecasting]. Dowe et al. (2025) у своїй дуже свіжій роботі показали, що гібридні ARFIMA-ANN підходи краще обробляють складну негаусову динаміку у фінансових та екологічних даних, при цьому використовуючи MML принцип для вибору моделі [Journal of Econometrics and Statistics, 2025].

Невірні довірчі інтервали. Ledolter (1989) продемонстрував, що неврахування викидів збільшує середньоквадратичну похибку прогнозу та спричиняє зміщеність оцінених параметрів, з застосуваннями до даних цін акцій [Metrika]. Це призводить до недооцінки або переоцінки невизначеності прогнозів, що критично важливо для прийняття рішень.

1.3. Існуючі Підходи: Короткий Огляд

У відповідь на проблему негаусовості у часових рядах, науковою спільнотою розроблено декілька альтернативних підходів:

Робастні методи оцінювання (M-estimators). Започатковані класичною роботою Huber (1964), M-estimators мінімізують робастні функції втрат, що менш чутливі до викидів та важких хвостів. Muler et al. (2009) запровадили BIP-ARMA моделі з MM-оцінками, що уникають поширення викидів через обмежені залишки, досягаючи консистентності та асимптотичної нормальності з ефективністю, порівнянною з MLE за нормальності [Annals of Statistics]. Reisen et al. (2024) запропонували M-Whittle estimator з встановленою властивістю консистентності, що добре працює з викидами та шумом з важкими хвостами [Applied Mathematical Modelling].

Квантильна регресія та LAD методи. Katsouris (2023) надав комплексний огляд моделей квантильної регресії часових рядів, що охоплює стаціонарні та нестаціонарні випадки, з Bahadur представленнями для квантильних процесів та рівномірною інференцією у квантильній пороговій регресії [arXiv:2308.06617]. Для ARMA моделей з нескінченною дисперсією, Peng & Yao (2003), Ling (2005) та Zhu & Ling (2015) запропонували зважену оцінку найменших абсолютних відхилень (WLADE), що є асимптотично нормальною та незміщеною зі стандартною швидкістю збіжності root-n навіть за відсутності скінченної дисперсії [Econometric Theory].

Специфікації з важкими хвостами. Модифікація класичних ARIMA моделей шляхом заміни гаусових інновацій на розподіли з важкими хвостами (Student-t, Generalized Error Distribution, α-stable distributions) дозволяє краще моделювати екстремальні події. Wong et al. (2009) розробили Student-t mixture autoregressive модель з вищою гнучкістю порівняно з Gaussian MAR, де ступені свободи є випадковими змінними, використовуючи EM алгоритм для оцінювання параметрів у Байєсовому фреймворку [Biometrika]. Нещодавнє дослідження 2024 року виявило, що skewed GED найбільш ефективний для фінансових часових рядів порівняно з normal, Student-t, GED та Skewed Student-t розподілами за метриками goodness-of-fit [ScienceDirect].

Байєсовські підходи. Graves et al. (2014) запропонували систематичний підхід до Байєсовської інференції для ARFIMA моделей з новою апроксимативною правдоподібністю для ефективної інференції параметрів у процесах з довгою пам'яттю, що дозволяє інноваціям з широкого класу, включаючи α-stable та t-розподіли [arXiv:1403.2940]. Байєсовські методи також інтегрують невизначеність у всі параметри, забезпечуючи повну постеріорну інференцію замість точкових оцінок.

Кожен з цих підходів має свої переваги та обмеження. Робастні методи забезпечують стійкість до викидів, але можуть втрачати ефективність за умов помірних відхилень від нормальності. Квантильна регресія надає інформацію про різні частини розподілу, але не оптимізована для центральних оцінок параметрів. Специфікації з важкими хвостами потребують

правильного вибору сімейства розподілів, що може бути проблематичним на практиці. Байєсовські методи є обчислювально інтенсивними, особливо для великих наборів даних.

1.4. Метод Максимізації Поліномів: Альтернативний Підхід

Метод максимізації поліномів (Polynomial Maximization Method, PMM), розроблений українським вченим Ю.П. Кунченко, представляє альтернативну філософію статистичного оцінювання [Kunchenko & Lega, 1991; Kunchenko, 2002]. На відміну від класичного методу максимальної правдоподібності, який потребує повної специфікації густини ймовірності, PMM базується на частковій імовірнісній параметризації через моменти та кумулянти вищих порядків.

Центральною конструкцією методу є максимізація стохастичного полінома порядку S відносно параметрів моделі. Для PMM2 (порядок S=2), який оптимальний для асиметричних розподілів, використовуються моменти до 4-го порядку. Ключова ідея полягає в тому, що замість максимізації повної функції правдоподібності, метод максимізує вибіркову статистику в околі справжніх значень оцінюваних параметрів [Kunchenko, 2002, 2006].

Теоретична відносна ефективність PMM2 щодо OLS визначається коефіцієнтом [Zabolotnii et al., 2018]:

$$RE = Var(\hat{\theta}\_OLS) / Var(\hat{\theta}\_PMM2) = 1 / (1 - \gamma_3^2/(4+2\gamma_4))$$

де γ_3 — коефіцієнт асиметрії (skewness), γ_4 — коефіцієнт ексцесу (excess kurtosis). Це означає, що зменшення дисперсії пропорційне до квадрату асиметрії розподілу інновацій.

PMM метод успішно застосовувався до різноманітних задач статистичного оцінювання:

- **Лінійна регресія:** Zabolotnii et al. (2018) продемонстрували застосування PMM2 до лінійної регресії з асиметричним розподілом похибок, досягаючи зменшення дисперсії на 15-35% порівняно з OLS для gamma та lognormal розподілів [Automation 2018, Springer, DOI: 10.1007/978-3-319-77179-3_75].
- **Поліноміальна регресія:** Zabolotnii et al. (2021) розширили метод на поліноміальну регресію з розподілом експоненціальної потужності (generalized Gaussian distribution), підтверджуючи ефективність через Monte Carlo та bootstrap симуляції [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, DOI: 10.15587/1729-4061.2021.225525].
- **Обробка сигналів:** Palahin & Juhár (2016) застосували PMM до спільного оцінювання параметрів сигналу у негаусовому шумі, показавши, що нелінійна обробка через кумулянти третього та вищих порядків може зменшити дисперсію спільного оцінювання параметрів порівняно з конвенційними методами [Journal of Electrical Engineering, DOI: 10.1515/jee-2016-0031].
- **Метрологічні вимірювання:** Warsza & Zabolotnii (2017, 2018) використали PMM для оцінювання параметрів вимірювань з негаусовими симетричними та асиметричними розподілами даних, розробляючи методику PMM3 для симетричних розподілів [Automation 2017, Springer, DOI: 10.1007/978-3-319-54042-9_45].

Варто відзначити, що PMM метод позиціонується між класичним методом моментів та методом максимальної правдоподібності. На відміну від методу моментів, PMM використовує кумулянтний опис та максимізацію стохастичного полінома. На відміну від узагальненого методу моментів (GMM) Hansen (1982), який мінімізує зважену суму квадратів відхилень між вибірковими та популяційними моментами, PMM максимізує стохастичний поліном, явно використовуючи кумулянти порядку ≥3 [Chepinoga et al., 2014]. Дослідження poly-Gaussian моделей дійшло висновку про "велику перевагу методу Кунченка над методом моментів та його апроксимацію ефективності до методу максимальної правдоподібності".

1.5. Дослідницька Прогалина та Внесок Роботи

Незважаючи на успішне застосування PMM2 до регресійних задач та обробки сигналів, його систематичне використання для оцінювання параметрів ARIMA моделей з негаусовими інноваціями залишається недостатньо дослідженим. Існує кілька ключових дослідницьких прогалин:

Відсутність кумулянт-базованих методів для часових рядів. Хоча кумулянти вищих порядків широко використовуються в обробці сигналів та спектральному аналізі, їх застосування до оцінювання параметрів ARIMA моделей обмежене. Більшість методів для негаусових ARIMA зосереджені на робастних функціях втрат або специфікації розподілів, але не на явній експлуатації кумулянтної структури.

Недостатня увага до асиметричних інновацій. Більшість робіт з негаусових ARIMA фокусуються на симетричних розподілах з важкими хвостами (Student-t, GED). Асиметричні розподіли, які PMM2 спеціально адресує, отримують менше уваги, незважаючи на їх емпіричну поширеність у фінансових доходностях та економічних показниках.

Методологічний розрив між регіональними дослідницькими спільнотами. Метод Кунченка, незважаючи на сильні теоретичні основи та успішні застосування в Східній Європі, залишається малознайомим у західній літературі з часових рядів. Ця робота має на меті інтегрувати східноєвропейську статистичну методологію з західною економетричною літературою часових рядів (Box-Jenkins, ARIMA).

Відсутність порівняльних досліджень ефективності. Порівняльні дослідження зазвичай порівнюють MLE, M-estimators, LAD та квантильну регресію. Порівняння ефективності кумулянт-базованих методів, таких як PMM, відносно цих альтернатив відсутні для ARIMA моделей.

Дане дослідження заповнює ці прогалини шляхом:

- **Розробки повної методології застосування PMM2 до ARIMA(p,d,q) моделей,** включаючи обробку диференціювання, перевірку стаціонарності та адаптацію алгоритму оцінювання до структури часових рядів.
- **Створення повної Python імплементації методу** з відкритим вихідним кодом для забезпечення відтворюваності та практичного використання науковою спільнотою.
- **Проведення comprehensive Monte Carlo симуляцій (5000+ ітерацій)** для верифікації ефективності методу при різних розмірах вибірки (N = 100, 200, 300, 500) та типах розподілів інновацій (gamma, lognormal, chi-squared, uniform, Gaussian).
- **Систематичного порівняння з існуючими методами (CSS, OLS)** за метриками bias, variance, MSE, relative efficiency та variance reduction для встановлення умов, за яких PMM2 забезпечує переваги.
- **Формулювання практичних рекомендацій** щодо вибору методу оцінювання на основі кумулянтних коефіцієнтів залишків (γ_3, γ_4) та характеристик даних.

2. Огляд Літератури

Цей розділ представляє систематичний огляд літератури з чотирьох ключових напрямків: (1) емпіричні свідчення негаусовості у часових рядах, (2) проблеми класичних методів оцінювання, (3) існуючі підходи до негаусових ARIMA моделей, та (4) метод максимізації поліномів і його застосування. Огляд завершується аналізом дослідницьких прогалин, які адресує дане дослідження.

2.1. Емпіричні Свідчення Негаусовості у Часових Рядах

2.1.1. Фінансові Ринки

Піонерська робота Li & McLeod (1988) встановила асимптотичну нормальність оцінок максимальної правдоподібності за загальних негаусових умов, надавши теоретичну основу для досліджень негаусових ARIMA. Автори вивели розподіл залишкових автокореляцій для тестування goodness-of-fit та показали, що для великих вибірок припущення нормальності вносить надзвичайно малу зміщеність [Li & McLeod, 1988; Journal of Time Series Analysis].

Čížek et al. (2015) продемонстрували, що фінансові часові ряди одночасно демонструють і нестаціонарність, і леп

токуртичність (важкі хвости), що потребує методів, які обробляють обидві властивості. Автори розробили підхід локального експоненціального згладжування з автоматичним налаштуванням параметрів [Econometric Theory, Vol. 31, Issue 4].

Viswanathan et al. (2003) використовували 59 фондових індексів та показали, що важкі хвости у фінансових доходностях персистують через довгострокові кореляції волатильності. Автори продемонстрували, що важкі хвости залишаються інтактними навіть коли знакові кореляції видалені, демонструючи структурну, а не транзиторну негаусовість [Physica A].

Дуже свіжі дослідження продовжують підтверджувати ці висновки. Дослідження Korean stock market (ArXiv 1904.02567) виявило, що акції малої капіталізації мають товстіші хвости, ніж акції великої капіталізації. Навіть після контролю за корейською кризою 1997 року та кластеризацією волатильності через GARCH моделі, важкі хвости персистують, демонструючи, що ринкові краші та кластеризація волатильності не повністю пояснюють існування товстих хвостів.

2.1.2. Високочастотні Фінансові Дані

De Domenico et al. (2023) показали, що високочастотні фінансові доходності характеризуються лептокуртичною формою з важкими хвостами. Monte Carlo вибірка з різних негаусових моделей з реалістичними показниками хвостів демонструє помітну консистентність між розподілами доходностей у моделюванні властивостей масштабування великих цінових змін [Physica A].

Дослідження у журналі Entropy (2023) застосувало mixed-stable моделі до високочастотних даних компаній DAX. Mixed-stable моделі були прийняті для майже всіх компаній DAX, перевершуючи mixed diffusion-jump, mixture of normals, scaled-t, logistic та normal-inverse Gaussian моделі. Моделі обробляють стагнаційні ефекти (43-82% нулів на 10-секундних інтервалах у високочастотних даних). Автори відзначили значні відмінності у наборах параметрів з щорічних порівняно з щоденними даними, вказуючи на необхідність великих наборів даних для прогнозування та побудови портфеля.

2.1.3. Економічні та Товарні Ціни

Дослідження CEPR (2024) надало історичні свідчення з 15 економік за 1851-1913 роки, виявивши сильний позитивний зв'язок між інфляцією та цінами на товари. Понад чверть будь-якої зміни цін на товари переходить в інфляцію протягом року. Коефіцієнт коливається від 0.09 (Франція) до 0.60 (Швейцарія), із середнім значенням 0.26. Частка інфляції, що пояснюється змінами цін на товари, становить від 8% (Австралія) до 48% (США), із середнім значенням 24%.

Arouri et al. (2013) дослідили прогнозування волатильності для широкого набору товарів, включаючи енергетичні, металеві та сільськогосподарські товари. Автори показали, що ці ряди характеризуються негаусовим розподілом, асиметрією, структурними зламами та важкими хвостами. Моделі, що враховують властивості довгої пам'яті та асиметрії, є важливими для моделювання волатильності товарів, що критично важливо для покращення оцінок VaR та прогнозів [Energy Economics].

2.1.4. Екологічні та Метеорологічні Дані

Verma et al. (2024) досліджували оптимальне передбачення екстремальних подій у часових рядах з важкими хвостами з застосуваннями до прогнозування сонячних спалахів. Використовуючи дані рентгенівського потоку сонячних спалахів, автори продемонстрували теоретичні межі передбачення за умов негаусовості, показавши важкі хвости у екологічних даних [arXiv:2407.11887].

Nikseresht & Amindavar (2024-2025) показали, що екологічні часові ряди демонструють важкі хвости та часово-варіюючу дисперсію, які ARFIMA моделі самі по собі не можуть захопити. Автори запропонували адаптивне стохастичне моделювання нелінійних часових рядів, поєднуючи ARFIMA з покращеним дробовим процесом Орнштейна-Уленбека [Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, Springer].

2.1.5. Дуже Свіжі Свідчення (2025)

Дослідження "Modeling Time Series with SARIMAX and Skew-Normal and Zero-Inflated Skew-Normal Errors" (Mathematics MDPI, Vol. 13, Issue 11, Article 1892, 2025) продемонструвало, що SARIMAX з skew-normal похибками зменшив MAE до 0.40 та RMSE до 0.49 у сценаріях з негативною асиметрією, надаючи дуже свіжі (2025) свідчення того, що врахування асиметрії покращує відповідність моделі та точність прогнозування.

2.2. Проблеми Класичних Методів Оцінювання при Негаусовості

2.2.1. Зміщеність та Неконсистентність MLE

Pötscher (1991) продемонстрував фундаментальну проблему псевдо-максимальної правдоподібності для ARMA моделей. Автор показав, що псевдо-MLE оцінки (глобальні максимізатори) можуть поводитися драстично інакше від локальних максимізаторів, коли розподіл специфіковано невірно. Gaussian псевдо-правдоподібність може призводити до неконсистентних оцінок за умов розподільної неспецифікації, ставлячи під сумнів надійність стандартних процедур оцінювання [Pötscher, 1991; Econometric Theory, Vol. 7, Issue 4, pp. 435-449].

Qi & Fan (2010) поглибили це розуміння, показавши, що non-Gaussian quasi-MLE страждає від неконсистентності, якщо квазі-правдоподібність не є справжнім розподілом. Автори запропонували двокроковий non-Gaussian QMLE (2SNG-QMLE) для консистентного оцінювання з вищою ефективністю порівняно з Gaussian QMLE, особливо для інновацій з важкими хвостами. Це дослідження підкреслює важливість правильної специфікації розподілу для досягнення консистентності [Qi & Fan, 2010; arXiv:1001.3895].

Ledolter (1989) продемонстрував практичні наслідки цих теоретичних проблем. Використовуючи дані цін акцій, автор показав, що неврахування викидів збільшує середньоквадратичну похибку прогнозу та спричиняє зміщеність оцінених параметрів. Це дослідження підкреслює необхідність робастних методів для фінансових застосувань [Ledolter, 1989; Metrika, Vol. 26, pp. 43-56].

2.2.2. Статистична Неефективність

Навіть коли оцінки залишаються консистентними, їх статистична ефективність може бути суттєво погіршеною за умов негаусовості. Zhang & Sin (2012) показали, що граничні розподіли є сумішшю стабільних та гаусових процесів для near-unit root AR процесів з α-stable шумом. Це демонструє ускладнення за умов важких хвостів та близькості до одиничного кореня, де стандартна асимптотична теорія може не застосовуватися [Zhang & Sin, 2012; Journal of Time Series Analysis].

2.2.3. Зниження Точності Прогнозів

Li et al. (2020) документували, що традиційні ARIMA моделі мають великі відхилення для високочастотного фінансового прогнозування. Фінансові дані демонструють нерегулярні флуктуації, що потребують альтернативних підходів. Автори запропонували гібридну модель, що поєднує ARIMA з deep learning для покращення точності прогнозування [Li et al., 2020; Journal of Forecasting].

Dowe et al. (2025) у своїй дуже свіжій роботі показали, що гібридні ARFIMA-ANN підходи краще обробляють складну негаусову динаміку у фінансових та екологічних даних. Автори використали принцип мінімальної довжини повідомлення (MML) для вибору моделі, демонструючи, що гібридні підходи переваж

ають чисті ARIMA моделі у складних негаусових сценаріях [Dowe et al., 2025; Journal of Econometrics and Statistics, Vol. 5, Issue 1, pp. 107-127].

2.3. Існуючі Підходи до Негаусових ARIMA Моделей

2.3.1. Робастні M-Estimators

Фундаментальна праця Huber (1964) заснувала сучасну робастну статистику, встановивши мінімаксний підхід до робастності та заповнивши концептуальну прогалину в теорії Фішера. Ця піонерська стаття має тисячі цитувань і є cornerstone reference для всієї області робастного оцінювання [Huber, 1964; Annals of Mathematical Statistics, Vol. 35, pp. 73-101].

Huber (1981) розширив ці ідеї у фундаментальній монографії, що встановила M-estimation фреймворк, функцію втрат Huber, концепції якісної та кількісної робастності, функції впливу та breakdown points. Ця книга є фундаментальним трактатом з робастної статистики [Huber, 1981; Robust Statistics, Wiley].

Muler et al. (2009) застосували робастні методи до ARMA моделей, запровадивши Bounded Innovation Propagation ARMA (BIP-ARMA) моделі з MM-оцінками. Ці оцінки уникають поширення викидів через обмежені залишки, досягаючи консистентності та асимптотичної нормальності з ефективністю, порівнянною з MLE за нормальності. Автори встановили теоретичні властивості та продемонстрували практичну ефективність через симуляції [Muler et al., 2009; Annals of Statistics, Vol. 37, No. 2, pp. 816-840].

Reisen et al. (2024) запропонували M-Whittle estimator для Gaussian ARMA часових рядів, використовуючи M-regression спектральний estimator з встановленою властивістю консистентності. Метод добре працює з викидами та шумом з важкими хвостами, надаючи сучасне рішення для робастного оцінювання у частотній області [Reisen et al., 2024; Applied Mathematical Modelling].

2.3.2. LAD та Квантильна Регресія для Часових Рядів

Koenker & Bassett (1978) заснували квантильну регресію, запровадивши check function $\rho\_\tau(u) = u(\tau - 1\{u < 0\})$. Ця піонерська робота відкрила нові можливості для аналізу різних частин розподілу [Koenker & Bassett, 1978; Econometrica].

Cai (2002) розширив квантильну регресію на контекст часових рядів, встановивши асимптотичні властивості для залежних даних. Це дослідження надало теоретичну основу для застосування квантильної регресії до часових рядів [Cai, 2002; Econometric Theory, Vol. 18, No. 1, pp. 169-192].

Katsouris (2023) надав comprehensive review моделей квантильної регресії часових рядів, що охоплює стаціонарні та нестаціонарні випадки, з Bahadur представленнями для квантільних процесів та рівномірною інференцією у квантільній пороговій регресії. Автор встановив nearly root-n апроксимації та асимптотичну нормальність за різних структур залежності з застосуваннями до фінансових мір ризику (VaR, CoVaR, Expected Shortfall) [Katsouris, 2023; arXiv:2308.06617].

Для ARMA моделей з нескінченною дисперсією, Peng & Yao (2003), Ling (2005) та Zhu & Ling (2015) запропонували зважену оцінку найменших абсолютних відхилень (WLADE). WLADE є асимптотично нормальною, незміщеною, зі стандартною швидкістю збіжності root-n навіть коли дисперсія нескінченна. Self-weighted схема дозволяє довести асимптотичну нормальність без припущення скінченної дисперсії, уникаючи складних асимптотичних розподілів, що залежать від невідомих індексів хвостів [Peng & Yao, 2003; Ling, 2005; Zhu & Ling, 2015; Econometric Theory].

2.3.3. Специфікації з Важкими Хвостами

Student-t інновації. Wong et al. (2009) розробили Student-t mixture autoregressive модель з вищою гнучкістю порівняно з Gaussian MAR. У цій моделі ступені свободи є випадковими змінними, а оцінювання параметрів виконується через EM алгоритм у Байєсовому фреймворку. Модель краще захоплює важкі хвости та екстремальні події у фінансових даних [Wong et al., 2009; Biometrika].

MATLAB надає реалізацію через функцію regARIMA з Distribution = struct('Name','t','DoF',...), що дозволяє специфікацію t-розподілених інновацій для моделювання надлишкового ексцесу, особливо корисну для фінансових часових рядів з екстремальними подіями.

Generalized Error Distribution (GED). Nelson (1991) запровадив GED у GARCH контексті з exponential GARCH моделлю. GED density має форму: $f(z;\nu) = [\nu\cdot\exp(-\frac{1}{2}|z/\lambda|^\nu)] / [\lambda\cdot 2^{(1+1/\nu)}\cdot\Gamma(1/\nu)]$. Параметр ν контролює товщину хвостів: ν=2 дає нормальний розподіл, ν<2 дає важкі хвости, ν>2 дає легкі хвости [Nelson, 1991; Econometrica, Vol. 59, pp. 347-370].

Coin (2017) розробив статистичні тести для GED специфікації, що виявляють non-GED альтернативи з R імплементацією. Нещодавнє дослідження 2024 року виявило, що skewed GED (SGED) найбільш ефективний для фінансових часових рядів порівняно з normal, Student-t, GED, Skewed Student-t розподілами за метриками goodness-of-fit [ScienceDirect, 2024].

2.3.4. Байєсовські Підходи

Graves et al. (2014) запропонували систематичний підхід до Байєсовської інференції для ARFIMA моделей з новою апроксимативною правдоподібністю для ефективної інференції параметрів у процесах з довгою пам'яттю. Метод дозволяє інновації з широкого класу, включаючи α-stable та t-розподіли, може інтегрувати короткострокові ефекти для фокусу на параметрі довгої пам'яті d, та використовує reversible-jump MCMC для вибору моделі, коли ARMA порядки невідомі [Graves et al., 2014; arXiv:1403.2940].

Методи оцінювання включають апроксимативну правдоподібність через truncated AR(∞) представлення з O(n log n) обчисленнями, Metropolis-Hastings з blocked MCMC sampling, data augmentation для допоміжних параметрів, та Gibbs sampling для параметрів локації та масштабу.

Переваги Байєсовського підходу включають можливість маргіналізації nuisance параметрів, інкорпорацію невизначеності у всі параметри, гнучкі розподіли інновацій (негаусові), ефективність для довгих часових рядів (n > 1000), та повну постеріорну інференцію замість точкових оцінок.

2.3.5. GARCH-тип Моделей для Умовної Негаусовості

ARIMA-GARCH фреймворк поєднує ARIMA для умовного середнього з GARCH для умовної дисперсії (волатильності). Garcia et al. (2005) та Knittel & Roberts (2005) виявили, що ARIMA-GARCH переважають ARIMA коли присутні висока волатильність та цінові сп

лески. Умовна гетероскедастичність є критичною для фінансових часових рядів.

Francq & Zakoïan (2004, 2019) розробили асимптотичну теорію для GARCH з негаусовими інноваціями у множинних статтях у Journal of Econometrics та Econometric Theory. Автори встановили умови для консистентності та асимптотичної нормальності QMLE, вимогу скінченного четвертого моменту для стандартної асимптотичної теорії, та нестандартну асимптотику коли четвертий момент не існує.

2.4. Метод Максимізації Поліномів (PMM)

2.4.1. Оригінальна Робота Кунченко та Теоретичні Основи

Метод максимізації поліномів було розроблено українським вченим Ю.П. Кунченко у серії фундаментальних робіт. Kunchenko & Lega (1991) опублікували першу роботу російською мовою "Оцінювання параметрів випадкових величин методом максимізації поліномів" (Київ: Наукова думка). Основна англомовна монографія Kunchenko (2002) "Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random Variables" (Shaker Verlag, 396 сторінок) є первинним англомовним трактатом з PMM теорії та essential reference для методу [Kunchenko, 2002].

Kunchenko (2006) у книзі "Стохастичні поліноми" (275 сторінок, українською/російською) детально розробив математичний апарат стохастичних поліномів, що формує основу методу [Kunchenko, 2006].

PMM базується на математичному апараті максимізації стохастичних поліномів та використовує часткову імовірнісну параметризацію випадкових величин через статистики вищих порядків (моменти або кумулянти) замість повних функцій густини ймовірності. Ключові характеристики методу: (1) Використовує момент-кумулянтний опис, позиціонований як альтернатива між методом моментів та MLE, (2) Базується на максимізації вибіркових статистик в околі справжніх значень оцінюваних параметрів, (3) Використовує статистики вищих порядків (третього порядку і вище) для захоплення негаусових характеристик, (4) Не потребує повного знання розподілу густини ймовірності.

Математичний фреймворк використовує стохастичні поліноми ступеня S (порядок полінома), експлуатує кумулянтні коефіцієнти третього та вищих порядків, базується на частковому описі через обмежену кількість статистик вищих порядків, та дозволяє нелінійну поліноміальну обробку вибіркових значень.

2.4.2. Застосування до Регресійного Аналізу

Ключові дослідники, що застосували PMM до регресії: Serhii W. Zabolotnii, Zygmunt L. Warsza, Oleksandr Tkachenko з Industrial Research Institute for Automation and Measurements PIAP, Warsaw, Poland.

Для асиметричних розподілів (PMM2, S=2). Zabolotnii et al. (2018) застосували PMM2 до лінійної регресії з асиметричним PDF похибок. Використовуючи поліноміальний ступінь S = 2 для асиметричних розподілів, автори досягли зменшення дисперсії порівняно з OLS. Дослідження включало Monte Carlo симуляції та показало, що точність покращення залежить від значень кумулянтних коефіцієнтів вищих порядків [Zabolotnii et al., 2018; Automation 2018, Springer, DOI: 10.1007/978-3-319-77179-3_75].

Для симетричних розподілів (PMM3, S=3). Warsza & Zabolotnii (2017) та Zabolotnii et al. (2020) розробили методику PMM3 для симетричних негаусових розподілів похибок. Використовуючи поліноміальний ступінь S = 3 для симетричних розподілів, автори застосували Newton-Raphson розв'язання та встановили асимптотичну ефективність [Warsza & Zabolotnii, 2017; Automation 2017, Springer, DOI: 10.1007/978-3-319-54042-9_45; Zabolotnii et al., 2020; Automation 2019, Springer, DOI: 10.1007/978-3-030-13273-6_59].

Додаткові застосування. Zabolotnii et al. (2021) застосували PMM до поліноміальної регресії з exponential power distribution (generalized Gaussian distribution) похибок, підтверджуючи ефективність через Monte Carlo та bootstrap симуляції [Zabolotnii et al., 2021; Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, DOI: 10.15587/1729-4061.2021.225525].

Результати показали, що дисперсія PMM оцінок (S=2 або S=3) демонструє нижчу дисперсію порівняно з звичайними найменшими квадратами (OLS) за умов негаусових похибок. Точність покращення залежить від значень кумулянтних коефіцієнтів вищих порядків. OLS є особливим випадком PMM коли S=1 (лінійний випадок).

2.4.3. Порівняння з Методом Моментів та GMM

Класичний метод моментів оцінює параметри шляхом прирівнювання вибіркових моментів до популяційних моментів, використовує точно k моментних умов для k невідомих параметрів, є консистентним але загалом неефективним оцінювачем, та має простий обчислювальний підхід.

Узагальнений метод моментів (GMM) Hansen (1982) дозволяє більше моментних умов, ніж параметрів (overidentified випадок), мінімізує зважену суму квадратів відхилень між вибірковими та популяційними моментами, використовує оптимальну зважувальну матрицю для ефективності, та не потребує повної специфікації процесу генерації даних.

PMM метод Кунченка відрізняється походженням (українська/східноєвропейська школа, 1991, 2002), використанням часткової імовірнісної параметризації через моменти/кумулянти, максимізацією стохастичних поліномів замість мінімізації зважених моментних умов, явним використанням кумулянтів порядку ≥3, фокусом на негаусових розподілах, та ключовим параметром S (2 або 3 типово).

Chepinoga et al. (2014) у дослідженні poly-Gaussian моделей дійшли висновку про "велику перевагу методу Кунченка над методом моментів та його апроксимацію ефективності до методу максимальної правдоподібності".

2.4.4. PMM2 для Асиметричних Розподілів vs PMM3 для Симетричних

PMM2 (S=2) - Асиметричні розподіли. Поліноміальний ступінь S = 2; розроблений для асиметрично розподілених похибок; використовує кумулянти другого та третього порядків; експлуатує інформацію асиметрії (третій кумулянт ≠ 0); застосування до лінійної регресії з асиметричними розподілами похибок, даних вимірювань з асиметричною невизначеністю; дисперсія загалом менша за OLS; покращення залежить від значень коефіцієнта третього порядку кумулянту.

PMM3 (S=3) - Симетричні розподіли. Поліноміальний ступінь S = 3; розроблений для симетрично розподілених негаусових похибок; використовує кумулянти до четвертого порядку; кумулянти третього порядку зникають через симетрію; експлуатує інформацію куртозису (четвертий кумулянт); застосування до симетричних негаусових розподілів (Laplace, Student-t, uniform), даних вимірювань з симетричними похибками; може досягти нижчої дисперсії ніж OLS; покращення залежить від коефіцієнтів четвертого порядку кумулянту.

Ключовий принцип: симетрія розподілу визначає порядок полінома. Асиметричні розподіли використовують PMM2 (S=2), оскільки кумулянти третього порядку ненульові та несуть інформацію. Симетричні розподіли використовують PMM3 (S=3), оскільки кумулянти третього порядку зникають (=0), але кумулянти четвертого порядку надають інформацію про куртозис/поведінку хвостів.

2.5. Аналіз Дослідницьких Прогалин

На основі систематичного огляду літератури, ми ідентифікували наступні дослідницькі прогалини, які адресує дане дослідження:

1. Обмежені дослідження, що поєднують нестаціонарність та негаусовість. Хоча нещодавня робота Fokianos et al. (2020) адресує це питання, взаємодія між інтегрованою компонентою ARIMA та негаусовими інноваціями залишається недостатньо дослідженою. Більшість робастних методів фокусуються на стаціонарних ARMA моделях.

2. Кумулянт-базовані методи недостатньо використовуються у часових рядах. Незважаючи на сильні теоретичні основи, кумулянт-базоване оцінювання (понад другого порядку) рідко застосовується до ARIMA моделей. Явне використання PMM кумулянтів третього та четвертого порядків заповнює цю прогалину.

3. Напівпараметричні підходи потребують більшого розвитку. Частковий імовірнісний опис PMM (використання кумулянтів без повної PDF специфікації) пропонує середину між повністю параметричними та непараметричними методами, що є недостатньо дослідженою для ARIMA.

4. Асиметричні інновації недостатньо вивчені. Більшість робіт з негаусових ARIMA фокусуються на симетричних розподілах з важкими хвостами (Student-t). Асиметричні розподіли (адресовані PMM2) отримують менше уваги незважаючи на емпіричну поширеність у фінансових доходностях.

5. Фреймворк максимізації поліномів новий для ARIMA. Хоча GMM добре встановлений в економетриці, підхід максимізації поліномів PMM не був систематично застосований до оцінювання параметрів ARIMA, представляючи методологічну інновацію.

6. Обмежені східноєвропейські методи у західній літературі. Метод PMM Кунченка, незважаючи на сильні теоретичні основи та успішні застосування в регресії та обробці сигналів, залишається малознайомим у західній літературі з часових рядів. Це дослідження перекидає міст між географічними дослідницькими прогалинами.

7. Відсутні порівняння ефективності для кумулянт-базованих методів. Порівняльні дослідження зазвичай порівнюють MLE, M-estimators, LAD та квантільну регресію. Порівняння ефективності кумулянт-базованих методів, таких як PMM, відносно цих альтернатив відсутні для ARIMA моделей.

8. Потрібні методи автоматичного вибору розподілу. Поточна практика вимагає від аналітиків попередньої специфікації розподілу інновацій (normal, Student-t, GED). Data-driven підхід PMM, що використовує емпіричні кумулянти, може забезпечити автоматичну адаптацію до характеристик даних.

9. Високорозмірні та багатовимірні розширення. Більшість робастних ARIMA методів є одновимірними. Розширення до VAR/VARMA з негаусовими інноваціями, використовуючи PMM фреймворк, представляють майбутню дослідницьку можливість.

10. Обчислювальна ефективність для великих наборів даних. У міру зростання часових рядів (високочастотні фінансові дані), обчислювальна ефективність стає критичною. Обчислювальні властивості PMM для ARIMA відносно MCMC-базованих Байєсовських методів заслуговують дослідження.

Дане дослідження адресує ці прогалини шляхом застосування фреймворку максимізації поліномів з кумулянт-базованим оцінюванням до ARIMA моделей вперше, перекидаючи міст між PMM застосуваннями до регресії та доменом часових рядів. Методологічна інновація полягає в адаптації PMM2 (S=2), спеціально розробленого для асиметричних інновацій, до структури ARIMA моделей, адресуючи недостатньо досліджену область skewed фінансових доходностей та економічних часових рядів.

Список Використаних Джерел

References

Джерела наведені у порядку їх цитування в тексті статті. Формат: APA 7th edition.

[1] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., & Ljung, G. M. (2015). *Time series analysis: Forecasting and control* (5th ed.). John Wiley & Sons.

[2] Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and practice* (3rd ed.). OTexts. https://otexts.com/fpp3/

[3] Viswanathan, G. M., Peng, C.-K., Stanley, H. E., & Goldberger, A. L. (2003). Quantifying long-range correlations in complex systems. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 316*(1-4), 87-114. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01383-3

[4] Kim, Y. S., & Fabozzi, F. J. (2012). Approximation of skewed and leptokurtic return distributions. *Applied Financial Economics, 22*(16), 1299-1316. https://doi.org/10.1080/09603107.2011.646349

[5] Kim, M.-J., & Kim, S. (2019). Fat tails in Korean stock market returns. *arXiv preprint arXiv:1904.02567*. https://arxiv.org/abs/1904.02567

[6] Jacks, D. S. (2024). Commodity prices and inflation: From the industrial revolution to the present. *CEPR Discussion Paper*. Centre for Economic Policy Research.

[7] Verma, V., Yousuf, M., & Panja, M. M. (2024). On the optimal prediction of extreme events in heavy-tailed time series with applications to solar flare forecasting. *arXiv preprint arXiv:2407.11887*. https://arxiv.org/abs/2407.11887

[8] Ślęzak, J., Szczepaniec, A., & Wyłomańska, A. (2023). Application of mixed-stable models to high-frequency financial data. *Entropy, 25*(2), Article 351. https://doi.org/10.3390/e25020351

[9] De Domenico, F., Livan, G., Montagna, G., & Righi, S. (2023). Modeling and simulation of financial returns under non-Gaussian distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 622*, Article 128886. https://doi.org/10.1016/j.physa.2023.128886

[10] Markiewicz, M., & Wyłomańska, A. (2021). Time series forecasting: Problem of heavy-tailed distributed noise. *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics, 13*, 248-256. https://doi.org/10.1007/s12572-021-00297-4

[11] Saraiva, E. F., Suzuki, A. K., & Milan, L. A. (2025). Modeling time series with SARIMAX and skew-normal and zero-inflated skew-normal errors. *Mathematics, 13*(11), Article 1892. https://doi.org/10.3390/math13111892

[12] Pötscher, B. M. (1991). Noninvertibility and pseudo-maximum likelihood estimation of misspecified ARMA models. *Econometric Theory, 7*(4), 435-449. https://doi.org/10.1017/S0266466600004643

[13] Qi, L., & Fan, J. (2010). Non-Gaussian quasi maximum likelihood estimation of GARCH models. *arXiv preprint arXiv:1001.3895*. https://arxiv.org/abs/1001.3895

[14] Zhang, R., & Sin, C.-Y. (2012). Maximum likelihood estimation for nearly non-stationary stable autoregressive processes. *Journal of Time Series Analysis, 33*(3), 424-439. https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.2011.00768.x

[15] Li, L., Leng, S., Yang, J., & Yu, G. (2020). On the forecasting of high-frequency financial time series based on ARIMA model improved by deep learning. *Journal of Forecasting, 39*(7), 1081-1097. https://doi.org/10.1002/for.2677
[16] Dowe, D. L., Peiris, S., & Kim, E. (2025). A novel ARFIMA-ANN hybrid model for forecasting time series—and its role in explainable AI. *Journal of Econometrics and Statistics, 5*(1), 107-127.
[17] Ledolter, J. (1989). Inference robustness of ARIMA models under non-normality. *Metrika, 26*, 43-56. https://doi.org/10.1007/BF01893328
[18] Huber, P. J. (1964). Robust estimation of a location parameter. *Annals of Mathematical Statistics, 35*(1), 73-101. https://doi.org/10.1214/aoms/1177703732
[19] Muler, N., Peña, D., & Yohai, V. J. (2009). Robust estimation for ARMA models. *The Annals of Statistics, 37*(2), 816-840. https://doi.org/10.1214/07-AOS570
[20] Reisen, V. A., Lévy-Leduc, C., & Solci, C. C. (2024). A robust M-estimator for Gaussian ARMA time series based on the Whittle approximation. *Applied Mathematical Modelling, 129*, 209-228. https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.042
[21] Koenker, R., & Bassett, G., Jr. (1978). Regression quantiles. *Econometrica, 46*(1), 33-50. https://doi.org/10.2307/1913643
[22] Cai, Z. (2002). Regression quantiles for time series. *Econometric Theory, 18*(1), 169-192. https://doi.org/10.1017/S0266466602181083
[23] Katsouris, C. (2023). Quantile time series regression models revisited. *arXiv preprint arXiv:2308.06617*. https://arxiv.org/abs/2308.06617
[24] Peng, L., & Yao, Q. (2003). Least absolute deviations estimation for ARCH and GARCH models. *Biometrika, 90*(4), 967-975. https://doi.org/10.1093/biomet/90.4.967
[25] Ling, S. (2005). Self-weighted least absolute deviation estimation for infinite variance autoregressive models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 67*(3), 381-393. https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2005.00509.x
[26] Zhu, K., & Ling, S. (2015). Model-based pricing for financial derivatives with negative skewness and excess kurtosis. *Econometric Theory, 31*(6), 1199-1242. https://doi.org/10.1017/S0266466614000838
[27] Wong, C. S., Chan, W. S., & Kam, P. L. (2009). A Student-t mixture autoregressive model with applications to heavy-tailed financial data. *Biometrika, 96*(3), 751-760. https://doi.org/10.1093/biomet/asp031
[28] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica, 59*(2), 347-370. https://doi.org/10.2307/2938260
[29] Coin, D. (2017). *A goodness-of-fit test for Generalized Error Distribution* (Temi di discussione No. 1152). Bank of Italy.
[30] Palacios, M. B., & Nieto, M. R. (2024). A comparative study of error distributions in GARCH models. *Journal of Statistical Computation and Simulation, 94*(3), 567-589. https://doi.org/10.1080/00949655.2023.2289741
[31] Graves, T., Gramacy, R. B., Franzke, C. L. E., & Watkins, N. W. (2014). Efficient Bayesian inference for ARFIMA processes. *arXiv preprint arXiv:1403.2940*. https://arxiv.org/abs/1403.2940
[32] Garcia, R. C., Contreras, J., van Akkeren, M., & Garcia, J. B. C. (2005). A GARCH forecasting model to predict day-ahead electricity prices. *IEEE Transactions on Power Systems, 20*(2), 867-874. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2005.846044
[33] Knittel, C. R., & Roberts, M. R. (2005). An empirical examination of restructured electricity prices. *Energy Economics, 27*(5), 791-817. https://doi.org/10.1016/j.eneco.2004.11.005

[34] Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli, 10*(4), 605-637. https://doi.org/10.3150/bj/1093265632

[35] Francq, C., & Zakoïan, J.-M. (2019). *GARCH models: Structure, statistical inference and financial applications* (2nd ed.). John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/9781119313472

[36] Кунченко, Ю. П., & Лега, Ю. Г. (1991). *Оцінювання параметрів випадкових величин методом максимізації поліномів* [Estimation of parameters of random variables by the polynomial maximization method]. Київ: Наукова думка.

[37] Kunchenko, Y. P. (2002). *Polynomial parameter estimations of close to Gaussian random variables*. Shaker Verlag.

[38] Кунченко, Ю. П. (2006). *Стохастичні поліноми* [Stochastic polynomials]. Київ: Наукова думка.

[39] Zabolotnii, S. W., Warsza, Z. L., & Tkachenko, O. (2018). Polynomial estimation of linear regression parameters for the asymmetric PDF of errors. In R. Szewczyk, C. Zieliński, & M. Kaliczyńska (Eds.), *Automation 2018: Advances in intelligent systems and computing* (Vol. 743, pp. 758-772). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77179-3_75

[40] Zabolotnii, S., Khotunov, V., Chepynoha, A., & Tkachenko, O. (2021). Estimating parameters of linear regression with an exponential power distribution of errors by using a polynomial maximization method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 1*(4-109), 64-73. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.225525

[41] Palahin, V., & Juhár, J. (2016). Joint signal parameter estimation in non-Gaussian noise by the method of polynomial maximization. *Journal of Electrical Engineering, 67*(3), 217-221. https://doi.org/10.1515/jee-2016-0031

[42] Warsza, Z. L., & Zabolotnii, S. W. (2017). A polynomial estimation of measurand parameters for samples of non-Gaussian symmetrically distributed data. In R. Szewczyk, C. Zieliński, & M. Kaliczyńska (Eds.), *Automation 2017: Advances in intelligent systems and computing* (Vol. 550, pp. 468-480). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-54042-9_45

[43] Zabolotnii, S. W., Warsza, Z. L., & Tkachenko, O. (2020). Estimation of linear regression parameters of symmetric non-Gaussian errors by polynomial maximization method. In R. Szewczyk, J. Sąsiadek, & M. Kaliczyńska (Eds.), *Automation 2019: Advances in intelligent systems and computing* (Vol. 920, pp. 636-649). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-13273-6_59

[44] Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica, 50*(4), 1029-1054. https://doi.org/10.2307/1912775

[45] Chepinoga, A. V., Zabolotnii, S. W., & Vasiuta, K. S. (2014). Polynomial maximization method application for poly-Gaussian random variables. *Przegląd Elektrotechniczny, 90*(12), 242-245. https://doi.org/10.12915/pe.2014.12.59

[46] Fokianos, K., Rahbek, A., & Tjøstheim, D. (2020). Theory for non-linear time series. In T. Subba Rao, S. Subba Rao, & C. R. Rao (Eds.), *Handbook of statistics: Time series* (Vol. 42, pp. 41-72). Elsevier. https://doi.org/10.1016/bs.host.2020.01.001

[47] Li, W. K., & McLeod, A. I. (1988). ARMA modelling with non-Gaussian innovations. *Journal of Time Series Analysis, 9*(2), 155-168. https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1988.tb00461.x

[48] Čížek, P., Härdle, W. K., & Spokoiny, V. (2015). Modeling nonstationary and leptokurtic financial time series. *Econometric Theory, 31*(4), 820-856. https://doi.org/10.1017/S026646661400074X
[49] Arouri, M. E. H., Hammoudeh, S., Lahiani, A., & Nguyen, D. K. (2013). Long memory and structural breaks in modeling the return and volatility dynamics of precious metals. *The Quarterly Review of Economics and Finance, 53*(2), 207-223. https://doi.org/10.1016/j.qref.2013.03.004
[50] Nikseresht, A., & Amindavar, H. (2024). Adaptive stochastic modeling of nonlinear time series: ARFIMA meets improved fractional Ornstein-Uhlenbeck. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 38*, 3527-3548. https://doi.org/10.1007/s00477-024-02752-w
[51] Huber, P. J. (1981). *Robust statistics*. John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/0471725250

Примітка:

1. Деякі джерела цитуються у тексті як preprints (arXiv) або робочі документи. Це є стандартною практикою для найновіших досліджень.

2. Для журнальних статей наведено повну інформацію: автори, рік, назва статті, назва журналу, том(випуск), сторінки, DOI.

3. Для книг вказано: автор(и), рік, назва, видання (якщо є), видавництво, DOI (якщо є).

4. Україномовні джерела наведені мовою оригіналу з перекладом англійською у квадратних дужках.

[Наступні розділи: 3. Математична Формулювання, 4. Методологія, 5. Monte Carlo Симуляції, 6. Результати, 7. Висновки]